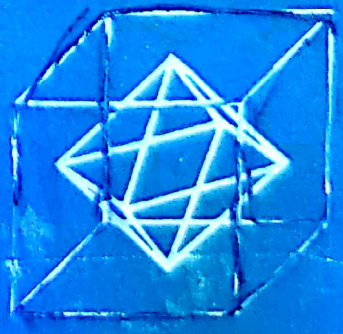
D. I. PEREPIOLKIN

Probleme rezolvate din lecții de geometrie elementară

geometrie în spațiu de J. Hadamard



EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

513
P51

D. I. PEREPIOLKIN

Probleme rezolvate
din
Lecţii de Geometrie elementară
Geometrie în spaţiu
de J. Hadamard

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAŞI

147.416

EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti – 1962

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea conține circa 400 de probleme rezolvate din cartea „Lecții de geometrie elementară — Geometrie în spațiu" de J. Hadamard. Problemele sînt din secțiunile: Planul și dreapta, Poliedre, Deplasări — simetrii — asemănare, Corpuri rotunde și Complemente de geometrie în spațiu (capitolele: Poli și polare în raport cu sfera — inversiunea în spațiu — complemente de geometrie sferică, Ariile poligoanelor sferice și Teorema lui Euler — poliedre regulate).

Se adresează cadrelor didactice din învățămîntul de cultură generală și învățămîntul tehnic, studenților din primul an de studii, elevilor înaintați și candidaților la examenul de admitere în învățămîntul superior.

Scanned with OKEN Scanner

PENTRU CITITORI

Această lucrare apare ca o completare a volumului de „Lecții de Geometrie elementară — Geometrie în spațiu" de J. Hadamard, tradus din limba franceză și publicat de noi în anul 1961.

Trebuie să menționăm că în ediția a doua în limba rusă a „Geometriei în spațiu" de J. Hadamard, unele capitole (împreună cu problemele respective) au fost lăsate la o parte, dîndu-se soluții numai problemelor rămase, deoarece în felul acesta s-a alcătuit o lucrare mai strîns legată de nevoile cadrelor didactice din învățămîntul mediu și ale studenților din institutele pedagogice, cărora li se adresa în primul rînd. Din această cauză, lucrarea de față nu conține soluțiile tuturor problemelor din „Geometria în spațiu", ci numai soluțiile problemelor din primele patru secțiuni și din trei capitole ale „Complementelor de geometrie în spațiu".

De asemenea, trebuie să mai spunem că volumul „Lecții de geometrie elementară — Geometrie în spațiu" a fost tradus în limba romînă după ediția a opta (după cum se știe), în timp ce în limba rusă a fost tradus după ediția a șaptea. Cum noi am păstrat enunțurile problemelor din traducerea romînească, și cum prof. D. I. Perepiolkin a făcut unele precizări în enunțarea cîtorva probleme, noi am dat indicații în note ori de cîte ori s-a constatat o deosebire între textul romînesc și textul rusesc.

Enunțurile problemelor care lipsesc din ediția în limba rusă (nouă la număr) n-au mai fost date, cu excepția a două dintre ele (703 și 704) care intră, parțial, în conținutul altora.

Ca și la problemele din „Geometria plană", soluțiile problemelor din „Geometria în spațiu" sînt date de prof. D. I. Perepiolkin cu multă grijă și competență.

Considerăm că venim în sprijinul cititorilor noștri prin publicarea acestei lucrări, întrucît, după cum spune și prof. D. I. Perepiolkin în prefața la ediția a doua în limba rusă, «foarte multe dintre problemele conținute în carte („Geometria în spațiu") nu pot fi considerate numai ca subiecte de exercițiu. Ele conțin un material bogat și interesant, completînd conținutul cărții. O serie din aceste probleme ar putea, în ceea ce privește conținutul, să intre în partea „teoretică"... În același timp, rezolvarea independentă a acestor probleme, în majoritate grele, ar necesita din partea cititorului mult timp și eforturi importante».

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Cartea a cincea

PLANUL ȘI DREAPTA

Capitolul I. Intersecția dreptelor și a planelor 7
Capitolul II. Drepte și plane paralele 8
Capitolul III. Dreaptă și plan perpendiculare între ele 9
Capitolul IV. Unghiuri diedre. Plane perpendiculare 10
Capitolul V. Proiecția unei drepte pe un plan. Unghiul format de o dreaptă cu un plan. Distanța cea mai mică dintre două drepte. Proiecția unei arii plane..... 11
Capitolul VII. Unghiuri poliedre. Poligoane sferice 12
Probleme propuse la cartea a cincea 16

Cartea a șasea

POLIEDRELE

Capitolul I. Noțiuni generale.... 19
Capitolul II. Volumul prismei.... 21
Capitolul III. Volumul piramidei.. 21
Probleme propuse la cartea a șasea 22

Cartea a șaptea

DEPLASĂRI. SIMETRII. ASEMĂNARE

Capitolul I. Deplasări 25
Capitolul II. Simetrii 27
Capitolul III. Omotetie și asemănare 28
Probleme propuse la cartea a șaptea 28

Cartea a opta

CORPURILE ROTUNDE

Capitolul I. Definiții generale. Cilindrul 30
Capitolul II. Conul. Trunchiul de con 31
Capitolul III. Proprietățile sferelor 33
Capitolul IV. Aria și volumul sferei 36
Probleme propuse la cartea a opta 38

COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

Capitolul III. Poli și polare în raport cu sfera. Inversiunea în spațiu. Complemente de geometrie sferică 40
Capitolul IV. Ariile poligoanelor sferice 49
Capitolul V. Teorema lui Euler. Poliedre regulate 50

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚIILE EXERCIȚIILOR ȘI ALE PROBLEMELOR

Cartea a cincea

PLANUL ȘI DREAPTA

Exerciţiile la capitolul I 56
Exerciţiile la capitolul II 57
Exerciţiile la capitolul III 62
Exerciţiile la capitolul IV 69
Exerciţiile la capitolul V 75
Exerciţiile la capitolul VII 82
Problemele la cartea a cincea .. 117

Cartea a şasea

POLIEDRELE

Exerciţiile la capitolul I 136
Exerciţiile la capitolul II 147
Exerciţiile la capitolul III 150
Problemele la cartea a şasea.... 157

Cartea a şaptea

DEPLASĂRI. SIMETRII. ASEMĂNARE

Exerciţiile la capitolul I 172
Exerciţiile la capitolul II 190
Exerciţiile la capitolul III 200
Problemele la cartea a şaptea.. 206

Cartea a opta

CORPURILE ROTUNDE

Exerciţiile la capitolul I 226
Exerciţiile la capitolul II 232
Exerciţiile la capitolul III 248
Exerciţiile la capitolul IV 287
Problemele la cartea a opta.... 295

COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

Exerciţiile la capitolul III 307
Exerciţiile la capitolul IV 404
Exerciţiile la capitolul V 419

Scanned with OKEN Scanner

CARTEA A CINCEA

PLANUL ŞI DREAPTA

CAPITOLUL I

INTERSECŢIA DREPTELOR ŞI A PLANELOR

423. Dacă un anumit număr de drepte sînt astfel că două oarecare dintre ele se taie, atunci

— sau toate aceste drepte trec printr-un acelaşi punct;

— sau sînt situate toate în acelaşi plan.

424. Printr-un punct dat, să se ducă o dreaptă care taie două drepte date nesituate în acelaşi plan[1]).

Există o infinitate de drepte care taie trei drepte date ce nu sînt situate două cîte două în acelaşi plan.

Ce devin răspunsurile la cele două întrebări de mai sus, dacă două dintre dreptele date se află în acelaşi plan?

425. Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, nesituate în acelaşi plan, sînt astfel încît laturile BC, $B'C'$ se taie, la fel CA, $C'A'$ şi AB, $A'B'$, atunci

1° cele trei drepte AA', BB', CC' trec printr-un acelaşi punct sau sînt paralele două cîte două;

2° cele trei puncte de intersecţie ale dreptelor BC şi $B'C'$, CA şi $C'A'$, AB şi $A'B'$ sînt în linie dreaptă.

426. Fiind date un plan P şi trei puncte A,B,C (necoliniare), exterioare acestui plan, să se afle

1° un punct M astfel ca dreptele care îl unesc cu punctele A,B,C să înţepe planul P în vîrfurile unui triunghi omotetic cu un triunghi dat;

2° un punct M astfel ca dreptele care îl unesc cu punctele A,B,C să înţepe planul P în vîrfurile unui triunghi egal cu un triunghi dat[1]).

426 *bis*. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ şi un plan P, să se găsească în acest plan un triunghi $\alpha\beta\gamma$, astfel ca dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ să fie concurente, situaţia fiind aceeaşi pentru $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$[1]).

427. Să se extindă la cazul unui poligon *strîmb* (adică o linie frîntă închisă, ale cărei laturi nu sînt situate în acelaşi plan) şi al unui punct oarecare din spaţiu teorema care face obiectul exerciţiului 8 *bis*.

---

[1]) V. nota de la sfîrşitul problemelor la Cartea a cincea. (Notele care însoţesc enunţurile problemelor, dacă nu este specificat altfel, sînt notele prof. J. Hadamard. Nota Red. E.T.).

CAPITOLUL II

DREPTE ŞI PLANE PARALELE

428. Ce devin concluziile exerciţiului 423, dacă ştim doar că două drepte oarecare dintre dreptele date sînt în acelaşi plan?

429. Să se ducă o dreaptă paralelă la o dreaptă dată şi care taie două drepte date[1]).

430. Mijloacele laturilor unui patrulater strîmb (ex. 427) sînt vîrfurile unui paralelogram. Centrul acestui paralelogram este mijlocul segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor patrulaterului.

Să se afle locul geometric al centrului acestui paralelogram, dacă trei dintre vîrfurile patrulaterului rămîn fixe, în timp ce al patrulea descrie un plan dat sau o dreaptă dată.

431. Reciproca teoremei de la nr. **336.** Dacă două drepte sînt împărţite în părţi proporţionale prin punctele A,B,C pentru una, A',B',C', pentru cealaltă, putem duce prin dreptele AA', BB', CC' respectiv trei plane paralele între ele.

432. Fiind date două drepte D, D', nesituate în acelaşi plan, să se afle locul geometric al punctelor obţinute, împărţind într-un raport dat segmentul de dreaptă care uneşte un punct oarecare M al dreptei D cu un punct oarecare M' al dreptei D'.

432 *bis.* Aceeaşi întrebare, dacă punctele M, M' în loc să varieze în mod arbitrar pe dreptele date, sînt supuse condiţiei ca dreapta MM' să fie paralelă cu un plan fix.

Să se tragă de aici concluzia că o dreaptă care variază, întîlnind două drepte fixe şi rămînînd paralelă cu un plan dat, întîlneşte o infinitate de alte drepte fixe, paralele toate cu acelaşi plan.

433. Invers, dacă o dreaptă mobilă întîlneşte trei drepte fixe *paralele cu un acelaşi plan*, ea este împărţită de aceste drepte într-un raport constant şi rămîne paralelă cu un plan fix.

434. Să se demonstreze că, dacă dreapta mobilă considerată în cele două exerciţii precedente se îndepărtează nemărginit, ea tinde să devină paralelă cu o direcţie determinată.

435. Să se ducă o dreaptă care să întîlnească trei drepte date şi care să fie împărţită de acestea într-un raport dat[1]).

436. Dacă o dreaptă mobilă întîlneşte două drepte fixe D, D' şi este împărţită într-un raport constant de aceste drepte şi de un plan fix (care nu este paralel simultan cu D, D'), ea este paralelă cu un plan fix.

437. Dreptele care unesc două puncte, luate pe două laturi consecutive ale unui patrulater strîmb, cu punctele care împart respectiv în acelaşi raport laturile opuse celor dintîi, se intersectează şi fiecare dintre ele este împărţită de cealaltă în acelaşi raport ca laturile pe care nu le întîlneşte.

438. Să se ducă, între două drepte date, o secantă de lungime dată, paralelă cu un plan dat[1]).

[1]) V. nota de la sfîrşitul problemelor la Cartea a cincea.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

DREAPTĂ ŞI PLAN PERPENDICULARE ÎNTRE ELE

439. Să se ducă într-un plan dat, printr-un punct al acestui plan, o perpendiculară pe o dreaptă dată oarecare[1]).

440. Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele trei vîrfuri ale unui triunghi dat, ABC.

441. Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de două drepte concurente date. Aceeaşi problemă pentru două drepte paralele.

442. Să se afle locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct dat şi care formează unghiuri egale cu două drepte date, nesituate în acelaşi plan.

443. Să se ducă, printr-un punct dat, o dreaptă care formează unghiuri egale cu trei drepte date[1]).

444. Dacă o semidreaptă formează unghiuri egale cu trei semidrepte dintr-un plan, ea este perpendiculară pe plan.

446. Locul geometric al punctelor care au diferenţa pătratelor distanţelor lor la două puncte date constantă este un plan.

447. Să se demonstreze direct (luînd ca model textul, nr. **340**) propoziţia precedentă. Să se deducă de aici din nou teorema de la nr. **341.**

448. Să se afle locul geometric al punctelor dintr-un plan dat care au raportul distanţelor lor la două puncte date constant.

449. Să se afle locul geometric al punctelor dintr-un plan dat care au suma pătratelor distanţelor lor la două puncte date constantă.

450. Să se afle locul geometric al punctelor dintr-un plan, din care un segment de dreaptă dat se vede sub un unghi drept.

Cazul în care una dintre extremităţile segmentului este în planul dat.

451. Care sînt segmentele, cel mai scurt şi cel mai lung, ce se pot duce între un punct şi un cerc, date în mod arbitrar în spaţiu?

452. Fiind date două puncte A, B, situate de aceeaşi parte a unui plan, să se afle, în acest plan, punctul care are suma distanţelor sale la punctele A, B minimă[1]).

453. Fiind date două puncte A, B, situate de o parte şi de cealaltă a unui plan, să se afle, în plan, punctul pentru care diferenţa distanţelor la punctele A, B să fie maximă[1]).

454. Se dau două drepte D, D', nesituate în acelaşi plan, şi se iau respectiv pe aceste drepte două puncte A, A'; fie M, M' două puncte, luate de asemenea unul pe D, iar celălalt pe D', astfel ca $AM = A'M'$.

1° Dacă A şi A' rămîn fixe, iar lungimea comună a segmentelor AM, $A'M'$ variază, planul perpendicular pe mijlocul lui MM' trece prin una sau

---

[1]) V. nota de la sfîrşitul problemelor la Cartea a cincea.

prin cealaltă din dreptele fixe G_1, G_2 (după sensul în care sînt luate segmentele AM, $A'M'$), ale căror puncte sînt egal depărtate de cele două drepte date.

2° Dacă A, A' variază în toate modurile posibile pe dreptele date, fiecare dintre dreptele G_1, G_2 rămîne paralelă cu un plan fix.

3° Fiecare dreaptă G_1 taie toate dreptele G_2.

4° Prin orice punct egal depărtat de cele două drepte date trece o dreaptă G_1 şi o dreaptă G_2.

CAPITOLUL IV

UNGHIURI DIEDRE. PLANE PERPENDICULARE

455. Planele egal înclinate pe două plane secante date sînt paralele cu una sau cu alta dintre două drepte fixe.

456. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o direcţie fixă, cuprinse între două plane fixe.

457. Să se afle locul geometric al celui de-al treilea vîrf al unui triunghi ale cărui laturi rămîn paralele cu drepte fixe, în timp ce primele două vîrfuri se mişcă respectiv în două plane fixe.

458. Aceeaşi problemă, dacă primele două vîrfuri alunecă respectiv pe o dreaptă fixă şi pe un plan fix.

459. Să se afle locul geometric al punctelor care au suma sau diferenţa distanţelor lor la două plane date constantă.

460. Să se afle locul geometric al extremităţilor segmentelor duse din acelaşi punct şi a căror sumă a proiecţiilor pe două drepte date are o valoare dată.

461. O semidreaptă D, dusă printr-un punct al muchiei xy a unui diedru şi interioară acestui diedru, este astfel că, dacă planul perpendicular pe D într-un punct H al acestei drepte taie feţele diedrului respectiv după OA şi OB, atunci punctul H este pe bisectoarea unghiului AOB (se presupune că punctul H nu se află pe muchia xy). Să se demonstreze că dreapta D aparţine planului bisector al diedrului.

461 *bis*. Fiind date un diedru şi o dreaptă D care taie muchia, să se ducă prin această dreaptă un plan care să fie tăiat de cele două feţe ale diedrului după un unghi avînd ca bisectoare dreapta D. Caz de imposibilitate sau de nedeterminare.

462. Prin două drepte concurente fixe D, D', ducem respectiv două plane care variază, rămînînd mereu perpendiculare între ele. Să se afle locul geometric al punctului în care muchia diedrului drept, astfel format, întîlneşte un plan fix, perpendicular pe una dintre cele două drepte date.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

PROIECȚIA UNEI DREPTE PE UN PLAN. UNGHIUL FORMAT DE O DREAPTĂ CU UN PLAN. DISTANȚA CEA MAI MICĂ DINTRE DOUĂ DREPTE. PROIECȚIA UNEI ARII PLANE

463. Orice linie care se proiectează pe două plane secante după linii drepte este, în general, o linie dreaptă. În ce caz această propoziție nu este valabilă?

464. Două drepte care au proiecțiile respective pe două plane secante paralele sînt paralele. Cazul excepțional analog aceluia care se prezintă în propoziția de la exercițiul 463.

465. Într-un plan dat, printr-un punct dat al acestui plan, să se ducă o dreaptă care formează un unghi dat cu o dreaptă dată[1]).

Într-un plan dat, printr-un punct al acestui plan, să se ducă o dreaptă care să formeze un unghi dat cu un alt plan dat[1]).

465 *bis*. Printr-o dreaptă dată, să se ducă un plan care să formeze un unghi dat cu un plan dat[1]). Condiția de posibilitate.

466. O dreaptă egal înclinată în raport cu cele două fețe ale unui diedru intersectează aceste fețe în două puncte egal depărtate de muchie, și invers.

467. Să se afle locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat care formează unghiuri egale cu două plane date.

467 *bis*. Să se afle locul geometric al punctelor din plan astfel încît dreptele care le unesc cu două puncte date A, B sînt egal înclinate pe acest plan.

468. Dacă proiectăm un unghi AOB pe un plan paralel cu bisectoarea sa OC, proiecția este un unghi a cărui bisectoare este paralelă cu OC.

469. Dacă proiectăm un unghi drept pe un plan care îi taie laturile sau pe unul care taie prelungirile laturilor, proiecția este un unghi obtuz; proiecția este, dimpotrivă, un unghi ascuțit, dacă planul de proiecție taie o latură și prelungirea celeilalte.

469 *bis*. Un unghi este ascuțit sau obtuz în același timp cu proiecția sa pe un plan paralel cu una dintre laturile sale.

470. Piciorul perpendicularei comune la două drepte D, D' este situat, în raport cu un punct arbitrar M de pe D, de aceeași parte ca porțiunea din D care formează un unghi ascuțit cu perpendiculara coborîtă din punctul M pe D'.

470 *bis*. Un punct de pe o dreaptă fixă D este cu atît mai depărtat de o dreaptă fixă D', cu cît este mai depărtat de piciorul perpendicularei comune dreptelor D și D'.

471. Locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat și admițînd cu o dreaptă dată D o perpendiculară comună de lungime dată este format din două plane.

472. Fiind date o dreaptă D, proiectată pe un plan P după o dreaptă d, și un punct Q din spațiu, să se arate că există în planul P un punct O', astfel că distanța punctului O la un punct arbitrar M de pe D este într-un raport constant cu distanța punctului O' la proiecția m a lui M pe planul P.

472 *bis*. Să se găsească, pe o dreaptă dată D, un punct astfel ca distanțele sale la o altă dreaptă dată D' și la un punct dat O să fie într-un raport dat (se va folosi ex. 472)[1]). Caz de nedeterminare.

[1]) V. nota de la sfîrșitul problemelor la Cartea a cincea.

473. Putem face ca oricărui poligon plan să-i corespundă un segment de dreaptă, astfel ca proiecţia sa pe o dreaptă oarecare din spaţiu să fie măsurată prin acelaşi număr ca aria proiecţiei poligonului pe un plan perpendicular pe această dreaptă.

(Acest segment este perpendicular pe planul poligonului, iar lungimea sa este măsurată prin acelaşi număr ca şi aria poligonului).

CAPITOLUL VII

UNGHIURI POLIEDRE. POLIGOANE SFERICE

474. Să se demonstreze direct prima parte a enunţului de la nr. **375** (fără intermediul părţii a doua). (Se va imita calea urmată în text, observînd că putem presupune suma a două feţe[1]) mai mică decît 2 dr, altfel teorema fiind evidentă.)

475. Suma unghiurilor formate de o semidreaptă, dusă din vîrful unui triedru şi interioară triedrului, cu cele trei muchii este cuprinsă între suma feţelor triedrului şi semisuma lor.

Suma unghiurilor formate de o semidreaptă, dusă din vîrful unui unghi poliedru cu n feţe cu muchiile, este mai mare decît semisuma feţelor şi mai mică decît n—1 ori această semisumă.

Enunţurile corespunzătoare pentru sferă.

475 *bis*. Suma unghiurilor unui poligon strîmb (ex. 427) cu n laturi este mai mică decît $(2n-4)$dr (se va urmări raţionamentul de la nr. **44** *bis*).

476. Suma diedrelor unui unghi poliedru convex cu n feţe sau suma unghiurilor unui poligon sferic convex cu n laturi este mai mare decît $(2n-4)$dr.

477. Suma unghiurilor formate de o dreaptă oarecare cu două plane perpendiculare între ele este mai mică decît un unghi drept, dacă dreapta nu este perpendiculară pe intersecţia celor două plane.

478. O dreaptă variabilă (care trece printr-un punct fix) nu poate tinde în acelaşi timp către două poziţii limită diferite.

Dacă două drepte variabile tind fiecare către o poziţie limită, unghiul lor tinde către o valoare egală cu a unghiului celor două poziţii limită.

Dacă trei drepte (care trec printr-un acelaşi punct fix) tind fiecare către o poziţie limită rămînînd mereu în acelaşi plan, atunci poziţiile lor limită sînt situate într-un acelaşi plan.

479. Planele bisectoare ale diedrelor unui triedru se taie după o aceeaşi dreaptă.

Situaţia este aceeaşi, cînd înlocuim două dintre diedre prin suplementele lor[2]).

---

[1]) Reamintim că J. Hadamard numeşte *faţă* a unui unghi poliedru unghiul cuprins între două muchii consecutive; vezi Geometria în spaţiu, nr. **373** (Nota Red. E.T.).

[2]) Numim aici, pentru a scurta, *supplement* al unui unghi (sau al unui diedru) unghiul (diedrul) format de o latură a acestui unghi (sau de o faţă a diedrului) şi de prelungirea celeilalte.

Scanned with OKEN Scanner

Dreptele astfel obținute sînt în număr de patru; ele formează locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei fețe ale triedrului.

Enunțurile corespunzătoare pentru sferă. Există opt cercuri mici înscrise sau exînscrise unui triunghi sferic dat, adică tangente la laturile triunghiului sau la prelungirile acestora.

479 *bis*. Dreptele duse prin vîrf în planul bisector al suplementului[1]) fiecărui diedru al unui triedru, perpendicular pe muchia acestui diedru, sînt în același plan, egal înclinat pe cele trei fețe.

Care sînt celelalte plane egal înclinate pe cele trei fețe? Enunțurile corespunzătoare pentru sferă.

480. 1° Bisectoarele suplementelor[1]) fețelor unui triedru sînt situate în același plan; tot astfel, bisectoarele a două fețe și bisectoarea suplementului celei de-a treia. Fiecare dintre planele astfel obținute formează unghiuri egale cu cele trei muchii.

2° Planele duse perpendicular pe fețele unui triedru, prin bisectoarele acestor fețe, se taie după o aceeași dreaptă, perpendiculară pe planul considerat la exercițiul 479 *bis*. (Pe sferă, găsim astfel polii cercului circumscris unui triunghi).

Care este locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei muchii ale unui triedru?

481. Medianele unui triunghi sferic sînt concurente (nu se deosebește de teorema cu același enunț pentru triunghiul rectiliniu avînd aceleași vîrfuri).

Planele duse prin fiecare muchie a unui triedru și prin bisectoarea feței opuse se taie după aceeași dreaptă.

481 *bis*. Planele bisectoare ale suplementelor diedrelor unui triedru taie fețele opuse respectiv după trei drepte situate în același plan.

482. 1° Planele duse prin fiecare muchie a unui triedru, perpendicular pe fața opusă, se taie după aceeași dreaptă. (Se reduce la teorema corespunzătoare din plan, intersectînd triedrul cu un plan perpendicular pe o muchie).

Înălțimile unui triunghi sferic (cercurile mari duse prin fiecare vîrf, perpendicular pe latura opusă) sînt concurente.

2° Dreptele duse în fiecare față a unui triedru prin vîrf, perpendicular pe muchia opusă, sînt situate în același plan.

3° Ce se întîmplă cu dreptele și cu planele a căror existență formează obiectul exercițiilor 479—482, dacă trecem de la un triedru dat la suplementul său, sau de la un triunghi sferic la polarul său?

483. Proiecțiile Sa, Sb, Sc ale muchiilor SA, SB, SC ale unui triedru pe fețele opuse sînt muchiile unui nou triedru ale cărui diedre au ca plane bisectoare planele SAa, SBb, SCc (se vor folosi ex. 461 și ex. 71 din Geometria plană).

484. Două triedre suplementare au aceeași orientare.

485. În orice triedru isoscel, planul bisector al diedrului cuprins între cele două fețe egale este perpendicular pe a treia față și o taie în două părți egale.

Reciproc, un triedru este isoscel, dacă

1° planul bisector al unui diedru este perpendicular pe fața opusă;

---

[1]) V. nota 2 de la p. 12

2° planul care trece printr-o muchie şi prin bisectoarea feţei opuse este perpendicular pe planul acestei feţe.

De pe bisectoarea unei feţe a unui triedru, vedem pe cea mai mare dintre celelalte două feţe sub un unghi diedru obtuz şi pe cea mai mică sub un unghi diedru ascuţit.

486. Enunţurile exerciţiilor 5(3°), 7, 11, 12, 17 din Geometria plană nu sînt exacte în geometria sferică.

Dacă planul bisector al unui diedru aparţinînd unui triedru trece prin bisectoarea feţei opuse, nu rezultă neapărat că triedrul este isoscel.

Dacă mediana unui triunghi sferic (arcul de cerc mare minor care uneşte un vîrf cu mijlocul laturii opuse) este egală cu un sfert de cerc mare, ea este, în acelaşi timp, bisectoarea unghiului prin vîrful căruia trece (indiferent dacă triunghiul este sau nu isoscel) şi egală cu semisuma laturilor acestui unghi.

Dacă mediana este mai mică decît un sfert de cerc mare, ea formează cu cea mai mare dintre cele două laturi AB, AC, care o cuprind, un unghi mai mic decît cu cealaltă; ea este (exceptînd cazul triunghiului isoscel) mai mare decît bisectoarea unghiului BAC, mărginită de a treia latură[1]); ea este mai mică decît semisuma celor două laturi AB, AC, care este şi ea mai mică decît un sfert de cerc mare. Au loc însă inegalităţile contrare, dacă mediana este mai mare decît un sfert de cerc mare.

(Această a doua parte se reduce la prima, înlocuind vîrful A din care este dusă mediana prin punctul diametral opus).

Reciprocele. Una dintre ele se enunţă astfel: dacă o mediană a unui triunghi sferic este, în acelaşi timp, bisectoarea unghiului care o cuprinde, ea este sau egală cu un sfert de cerc mare, sau triunghiul este isoscel. Enunţurile corespunzătoare pentru triedre.

În triedrul $S{\cdot}ABC$, ducem bisectoarea unghiului format de una dintre muchiile SB, SC cu prelungirea celeilalte. Unghiul format de muchia SA cu această dreaptă diferă de unghiul drept printr-o cantitate cuprinsă între semisuma şi semidiferenţa feţelor ASB, ASC. Figura corespunzătoare pe sferă.

486 *bis.* Ipotenuza unui triunghi sferic dreptunghic este mai mică decît un sfert de cerc mare, dacă ambele catete sînt de aceeaşi speţă (adică ambele mai mici sau ambele mai mari decît un sfert de cerc mare), şi mai mare decît un sfert de cerc mare, dacă ele sînt de speţă diferită.

Exerciţiul 16 din Geometria plană poate fi extins la triunghiurile sferice dreptunghice?

487. Dacă, într-un patrulater sferic convex, laturile opuse sînt egale, diagonalele se taie în părţi egale. Punctul lor de intersecţie este polul cercului mare care trece prin punctele de intersecţie ale laturilor opuse. Două vîrfuri consecutive A, B şi punctele diametral opuse celorlalte două vîrfuri C, D se află pe acelaşi cerc, avînd unul dintre poli pe cercul mare bisector al unuia dintre unghiurile formate de AB, CD.

---

[1]) Pentru a demonstra acest din urmă punct, trebuie să ne asigurăm că, dacă mediana este mai mică decît un sfert de cerc mare, latura BC, spre care este dusă, nu poate conţine piciorul H al arcului perpendicular mai lung (**384**) dus din A pe cercul mare BC. În acest scop, se va ţine seama că, pe acest cerc mare, punctele care au distanţa de un sfert de cerc mare de A nu sînt altele decît polii cercului mare AH.

Scanned with OKEN Scanner

Într-un patrulater avînd cele patru laturi egale (*romb sferic*), diagonalele sînt, în plus, perpendiculare între ele.

Dacă, laturile opuse fiind egale, diagonalele sînt egale, atunci punctul lor de intersecţie şi punctele de intersecţie ale laturilor opuse sînt vîrfurile unui triunghi tridreptunghic. Cele patru unghiuri ale patrulaterului sînt atunci egale între ele.

488. Dacă un cerc mare Γ variază pe sferă, rămînînd tot timpul tangent la un cerc mic fix C, polul lui Γ situat în aceeaşi emisferă cu C descrie un cerc mic C', numit *polarul* celui dintîi. Relaţia dintre C şi C' este reciprocă, adică polarul lui C' este tocmai C.

489. Să se rezolve *efectiv* (v. nota de la sfîrşitul problemelor la Cartea a cincea) cu ajutorul unor construcţii sferice şi, la nevoie, al unor construcţii plane, următoarele probleme:

a) Să se afle punctul diametral opus unui punct dat.

b) Să se ducă un cerc mare prin două puncte date pe o sferă.

c) Să se ducă un cerc prin trei puncte date pe o sferă. Să se afle polii unui cerc dat.

d) Să se ducă, printr-un punct dat, un cerc mare, perpendicular pe un cerc dat.

e) Să se împartă în părţi egale unghiul a două cercuri mari. Să se împartă în două părţi egale un arc de cerc oarecare.

f) Printr-un punct dat pe sferă, să se ducă un cerc mare care să formeze cu un cerc mare dat un unghi egal cu un unghi dat. Se cere minimul acestui unghi.

Să se construiască un triunghi sferic, cunoscînd

g) două laturi şi unghiul cuprins între ele;

h) două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele (discuţie);

i) o latură şi două unghiuri[1]) (discuţie);

j) cele trei unghiuri.

k) Să se construiască un triunghi sferic dreptunghic: 1° cunoscînd ipotenuza şi un unghi alăturat sau o catetă; 2° cunoscînd o catetă şi unghiul opus.

l) Să se ducă un cerc tangent la un cerc dat într-un punct dat şi trecînd printr-un alt punct dat.

m) Să se ducă cercul mare tangent la un cerc dat într-un punct dat al acestui cerc.

n) Printr-un punct oarecare al unei sfere, să se ducă un cerc mare tangent la un cerc mic dat (pentru această construcţie şi pentru cea următoare, se va folosi ex. 488). Discuţie.

o) Să se ducă un cerc mare tangent la două cercuri mici date. Discuţie.

p) Printr-un punct dat, luat ca pol, să se ducă un cerc care taie un cerc dat sub un unghi drept.

q) Să se construiască un cerc mic tangent la trei cercuri mari date.

r) Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat într-un punct dat şi tangent la un alt cerc dat.

---

[1]) De observat că, dacă unghiurile nu sînt ambele adiacente la latura dată, nu putem proceda ca în Geometria plană (**85**, Constr. 8): trebuie să recurgem la considerarea triunghiurilor polare (**377**), ca pentru construcţia următoare.

Scanned with OKEN Scanner

489 *bis*. Să se ducă un cerc mare pe care două cercuri mici date determină arce egale cu arce date.

491. Pe o sferă solidă, presupunem marcați polii (**385**) și un punct A al ecuatorului, luat ca origine a longitudinilor. Să se afle (efectiv) longitudinea și latitudinea unui alt punct M, dat arbitrar pe suprafață. Reciproc, să se determine punctul avînd longitudinea și latitudinea date.

492. Fiind date trei cercuri pe sferă, există un cerc, și în cazul general unul singur, care împarte pe fiecare dintre ele în cîte două părți egale. Care este planul acestui cerc?

493. Fiind date două cercuri mari tangente la un același cerc mic C, un al treilea cerc mare oarecare tangent la C formează cu primele două un triunghi sferic de perimetru constant.

494. Să se construiască (efectiv) un triunghi sferic, cunoscînd o latură, un unghi alăturat și suma celorlalte două laturi (dată printr-un arc de cerc mare, egal cu această sumă).

495. Să se construiască (efectiv) un triunghi sferic cunoscînd un unghi, o înălțime (ex. 482) și perimetrul. (Se va folosi ex. 493; de deosebit două cazuri).

496. Să se afle condițiile pentru ca un patrulater sferic să fie circumscriptibil unui cerc.

497. Printr-un punct de pe sferă, exterior unui cerc mic dat, se duc la acesta două cercuri mari tangente (ex. 489, n). Pentru ce poziție a punctului aceste două cercuri mari vor forma unghiul cel mai mic?

498. Cercul mare care trece prin mijloacele M, N ale laturilor AB, AC ale unui triunghi sferic are ca pol un punct P, egal depărtat de B și de C; arcele de cercuri mari care unesc acest pol cu B și cu C formează între ele un unghi care este dublul unghiului MPN. Cercul mare MN taie cercul mare BC în mijloacele celor două arce avînd ca extremități punctul C și punctul diametral opus lui B. (ex. 489, k 1°).

PROBLEME
PROPUSE LA CARTEA A CINCEA

499. Să se ducă o dreaptă care întîlnește două drepte date sub unghiuri date.[1])

500. Să se taie un unghi poliedru cu patru fețe printr-un plan, astfel ca secțiunea să fie un paralelogram[1]). Cînd va fi acest paralelogram un romb sau un dreptunghi?

501. Să se afle locul geometric al proiecțiilor unui punct dat pe planele care trec printr-o dreaptă fixă.

502. Să se afle locul geometric al mijlocului unui segment de lungime constantă, care se sprijină pe două drepte perpendiculare, nesituate în același plan.

503. Să se deducă din exercițiul 425 teorema analogă în plan (**195**):

Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt astfel că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct O, atunci punctele de intersecție ale lui BC cu $B'C'$, CA cu $C'A'$, AB cu $A'B'$ sînt în linie dreaptă.

[1]) V. nota de la sfîrșitul problemelor la Cartea a cincea.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

(Se va observa că figura plană astfel formată poate fi considerată ca proiecție a unei figuri de felul celei care face obiectul ex. 425).

504. Opt puncte A,B,C,D, A',B',C',D' (dintre care primele patru nu sînt în același plan, cum nu sînt nici ultimele patru) sînt astfel că dreptele AA', BB', CC', DD' trec printr-un același punct O. Să se arate că dreptele de intersecție ale planului $B'C'D'$ cu BCD, ale planului $C'D'A'$ cu CDA, ale planului $D'A'B'$ cu DAB, ale planului $A'B'C'$ cu ABC se află în același plan.

Să se deducă de aici teorema de la nr. **195**, despre care este vorba la ex. 503. (Se va presupune, pentru aceasta, că dreptele OAA', OBB', OCC' sînt conținute în același plan).

505. Un plan oarecare împarte laturile unui poligon strîmb în rapoarte al căror produs este egal cu unitatea. Reciproca este adevărată pentru cazul patrulaterului, nu însă pentru poligoanele cu mai mult de patru laturi.

506. Fiind date două semidrepte OA, OB, duse dintr-un punct O al unui plan și de aceeași parte a acestui plan, să se ducă, în același plan, dreapta care formează cu OA și cu OB unghiuri a căror sumă să fie minimă.

507. Fiind date două semidrepte OA, OB, duse dintr-un punct O al unui plan, de o parte și de cealaltă a planului, să se ducă, în același plan, dreapta care formează cu OA și cu OB unghiuri a căror diferență să fie maximă.

508. Printr-un punct O de pe muchia unui diedru, ducem, în cele două fețe, dreptele OA, OB, care formează cu muchia un același unghi determinat. Să se demonstreze că, dacă acest unghi nu este drept, unghiul AOB nu variază proporțional cu diedrul. Raportul dintre unghiul AOB și unghiul plan al diedrului este crescător sau descrescător, cînd acesta din urmă crește?

509. Diferența unghiurilor pe care o dreaptă le formează cu două plane este mai mică decît unghiul acestor două plane[1]).

510. Diferența unghiurilor pe care le formează un plan cu două drepte este mai mică decît unghiul celor două drepte.[1])

511. Dacă o dreaptă și un plan care variază tind fiecare către o poziție limită, unghiul lor tinde către unghiul pe care-l formează poziția limită a dreptei cu poziția limită a planului.

512. Fiind date două plane și o dreaptă, să se ducă prin aceasta un plan care să formeze cu primele două un triedru isoscel.

(Se vor distinge două cazuri, după cum fețele egale trebuie să fie în cele două plane date, sau una dintre ele în planul căutat).

513. Dacă tăiem un triedru *tridreptunghic* (care are toate fețele unghiuri drepte, deci și toate diedrele drepte) $S \cdot ABC$ printr-un plan oarecare, atunci

1° Triunghiul secțiunii ABC are ca punct de concurență al înălțimilor sale proiecția punctului S pe planul ABC.

2° Fiecare dintre triunghiurile SBC, SCA, SAB este medie proporțională între proiecția sa pe planul secțiunii și secțiunea ABC.

3° Suma pătratelor ariilor acestor trei triunghiuri este egală cu pătratul ariei triunghiului ABC.

514. Fiind dat un triunghi ABC, să se găsească un triedru tridreptunghic ale cărui muchii să treacă prin vîrfurile acestui triunghi. Condiția de posibilitate.

147.416

---

[1]) *sau egală cu el*, în ediția rusă (Nota Red. E.T.).

Scanned with OKEN Scanner

Să se taie un triedru tridreptunghic printr-un plan, astfel ca secţiunea să fie egală cu un triunghi dat.

515. Să se afle un triedru tridreptunghic, ale cărui muchii să se proiecteze pe un plan care trece prin vîrf, după trei drepte date. Condiţia de posibilitate.

516. Dacă patru puncte A,B,C,D sînt astfel că dreapta AB este perpendiculară pe CD, iar dreapta AC pe BD, atunci şi dreapta AD este perpendiculară pe BC.

Cele trei sume $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$, $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$ sînt egale între ele.

517. Fiind date trei plane care se taie după o aceeaşi dreaptă şi o semidreaptă în unul dintre ele (neparalelă cu intersecţia lor comună), există un triedru avînd proprietatea că fiecare dintre planele date trece printr-o muchie şi este perpendicular pe faţa opusă, una dintre muchii fiind semidreapta dată.

518. Fiind date trei drepte într-un acelaşi plan şi un plan P care trece prin una dintre ele, există un triedru avînd proprietatea că fiecare dintre dreptele date este perpendiculară pe una dintre muchii şi situată în faţa opusă, una dintre aceste feţe fiind în planul P.

(V. la ex. 625—626, reciprocele analoge pentru ex. 479—481.)

519. (Generalizarea ex. 454.) Fiind date două drepte D, D', nesituate în acelaşi plan, luăm un punct A pe D şi un punct A' pe D', apoi încă două puncte M, M', respectiv pe D şi pe D', astfel ca $AM=A'M'$.

Dacă M,M' variază (astfel ca AM să rămînă egal cu $A'M'$), planul (ex. 446) care este locul geometric al punctelor avînd diferenţa pătratelor distanţelor lor la M şi la M' egală cu un număr k^2 dat, trece prin una sau prin cealaltă dintre două drepte fixe H_1, H_2. Toate punctele lui H_1 şi ale lui H_2 sînt astfel încît diferenţa pătratelor distanţelor lor la D, D' este egală cu k^2. Să se afle locul geometric al lui H_1 şi al lui H_2, dacă (A şi A' rămînînd fixe) facem pe k să varieze.

Dacă A şi A' se deplasează (k avînd o valoare dată), dreptele H_1 şi H_2 rămîn paralele cu plane fixe; orice dreaptă H_1 intersectează o anumită dreaptă H_2.

Prin orice punct avînd diferenţa pătratelor distanţelor sale la D şi la D' egală cu k^2, trec o dreaptă H_1 şi o dreaptă H_2.

Notă. În toate problemele de construcţie (ex. 424, 426, 426 *bis* etc.) vom presupune, dacă nu există o indicaţie specială în sens contrar (v. mai jos), că ştim:

să ducem un plan prin trei puncte date;

să construim intersecţia a două plane; a unei drepte cu un plan;

să efectuăm, într-un plan dat în mod arbitrar în spaţiu, construcţiile cunoscute din geometria plană.

Această presupunere este pur convenţională, deoarece nu există nici un mijloc de a realiza practic aceste operaţii. Totuşi, geometria descriptivă ne învaţă să reprezentăm figurile din spaţiu prin figuri plane; şi, în acest mod de reprezentare, construcţiile enumerate mai sus pot fi efectuate cu rigla şi cu compasul.

Vom numi construcţii *efective* acele construcţii care trebuie realizate fără a beneficia de convenţia precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

CARTEA A ȘASEA

POLIEDRELE

CAPITOLUL I

NOȚIUNI GENERALE

520. Orice segment dus prin punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelipiped este împărțit de acest punct și de suprafața poliedrului în două părți egale.

521. Fiind date trei drepte, dintre care două oarecare nesituate în același plan, să se construiască un paralelipiped avînd cîte o muchie pe fiecare dintre ele.[1])

521 *bis*. Să se afle locul geometric al centrului paralelipipedului precedent, dacă două dintre drepte rămînînd fixe, a treia se mișcă paralel cu ea însăși, într-un plan dat.

522. Dacă diagonalele unui paralelipiped sînt toate egale, paralelipipedul este dreptunghic.

523. Să se construiască un cub, cunoscînd lungimea uneia dintre diagonalele sale.

524. Fie A, C' două vîrfuri opuse într-un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$; B, D, A' vîrfurile vecine cu punctul A; D', B', C vîrfurile vecine cu C'. Să se demonstreze

1° că diagonala AC' trece prin centrele de greutate ale triunghiurilor BDA'; $D'B'C$;

2° că ea este împărțită de aceste două puncte în trei părți egale;

3° dacă paralelipipedul considerat este un cub, triunghiurile BDA', $D'B'C$ sînt echilaterale, iar dreapta AC' este perpendiculară pe planele lor.

525. Tăiem un cub printr-un plan perpendicular pe una dintre diagonalele sale. Să se studieze forma secțiunii, presupunînd că planul ia toate pozițiile posibile, fără a înceta să fie perpendicular pe diagonală.

Cazul în care planul secțiunii este perpendicular pe mijlocul diagonalei.

526. Se numește *tetraedru regulat*, tetraedrul care are toate muchiile egale și deci toate fețele triunghiuri echilaterale.

Să se arate că vîrfurile unui cub pot fi împărțite în două grupuri, astfel ca vîrfurile fiecărui grup să fie vîrfuri ale unui tetraedru regulat.

527. Dacă un punct se mișcă în planul bazei unei piramide regulate și în interiorul acestei baze, suma distanțelor sale la fețele laterale rămîne constantă.

---

[1]) Bineînțeles, în problemele de construcție, se ține seama de nota de la sfîrșitul problemelor la Cartea a cincea; ne vom folosi deci de convenția enunțată în acel loc, cu excepția cazurilor în care va fi vorba de construcții efective.

Scanned with OKEN Scanner

Suma segmentelor determinate de fețele laterale pe perpendiculara dusă în acest punct pe planul bazei rămîne de asemenea constantă.

Ce se întîmplă cu aceste proprietăți, dacă punctul considerat devine exterior bazei, rămînînd însă în planul ei?

528. Segmentele care unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse sînt concurente într-un punct care împarte pe fiecare dintre ele în raportul 1 : 3.

Segmentele care unesc mijloacele muchiilor opuse trec printr-un același punct, care împarte pe fiecare dintre ele în două părți egale.

529. Dacă trei segmente de dreaptă, nesituate în același plan, trec printr-un același punct care le taie în părți egale, putem găsi, și în mai multe moduri, un tetraedru care să aibă ca mijloace ale muchiilor extremitățile segmentelor considerate.

530. Dacă, prin segmentul care unește mijloacele a două muchii opuse într-un tetraedru, ducem un plan care taie alte două muchii opuse, segmentul care unește punctele de intersecție este împărțit de primul în două părți egale.

531. Planele duse perpendicular pe muchiile unui tetraedru, în mijloacele acestora, sînt concurente într-un punct.

532. Planele bisectoare ale diedrelor unui tetraedru sînt concurente.

533. Dacă, prin fiecare muchie a unui tetraedru, vom duce un plan, astfel ca diedrul format de acest plan cu planul care trece prin muchia respectivă și printr-un punct determinat O din spațiu să aibă același plan bisector ca și diedrul de aceeași muchie al tetraedrului dat, atunci cele șase plane astfel duse trec printr-un același punct O' [1]).

534. Planele duse, prin mijlocul fiecărei muchii a unui tetraedru, perpendicular pe muchia opusă, se taie într-un același punct, coliniar cu acela care formează obiectul exercițiului 528 și cu acela care formează obiectul exercițiului 531.

535. În fiecare dintre unghiurile triedre ale unui tetraedru, ducem dreapta a cărei existență formează obiectul exercițiului 482. În ce condiții aceste patru drepte vor fi concurente? Să se arate că, în acest caz, cele patru înălțimi ale tetraedrului sînt de asemenea concurente.

(Vîrfurile tetraedrului au atunci așezarea considerată la exercițiul 516: un astfel de tetraedru se numește *tetraedru cu muchii ortogonale*).

536. Să se rezolve problema analogă pentru dreapta a cărei existență formează obiectul exercițiului 480. (Răspuns: sumele muchiilor opuse trebuie să fie egale între ele).

537. Aceeași problemă pentru dreapta a cărei existență formează obiectul ex. 481 (produsele muchiilor opuse vor trebui să fie egale).

538. Fiind date lungimile muchiilor unui tetraedru, să se găsească *efectiv* [2]) cele patru înălțimi.

---

[1]) În ediția rusă este completat astfel: sau se intersectează trei cîte trei după patru drepte paralele (Nota Red. E.T.).

[2]) V. nota de la sfîrșitul problemelor la Cartea a cincea.

CAPITOLUL II

VOLUMUL PRISMEI

539. Volumul unei prisme triunghiulare este egal cu semiprodusul dintre aria unei fețe laterale oarecare și distanța de la această față la muchia laterală opusă.

540. Pe trei paralele date, luăm trei lungimi AA', BB', CC', egale între ele. Să se demonstreze că volumul prismei astfel formate depinde numai de poziția paralelelor date și de lungimea comună a muchiilor AA', BB', CC', nu și de locul ocupat de aceste segmente pe dreptele pe care se află.

541. Pe trei fețe SBC, SCA, SAB ale unui tetraedru, ca baze inferioare, construim trei prisme, de altfel oarecare, exterioare tetraedrului. Dacă I este punctul de intersecție al planelor bazelor superioare, construim, pe a patra față ABC ca bază, o prismă avînd muchia laterală egală și paralelă cu SI.

Să se demonstreze că această din urmă prismă este echivalentă cu suma primelor trei.

542. Fiind date un dreptunghi $ABCD$ cu laturile a, b al cărui plan este P și un punct S, situat la o distanță h de planul P, considerăm piramida cu vîrful S și cu bază $ABCD$; tăiem această piramidă cu un plan Q, paralel cu P, și, în dreptunghiul de secțiune, înscriem un patrulater avînd trei laturi paralele cu diagonalele dreptunghiului. În sfîrșit, considerăm prisma dreaptă R, avînd ca una dintre baze acest patrulater, iar pe cealaltă în planul P.

1° Să se determine distanța punctului S la planul Q, astfel ca suma celor 12 muchii ale prismei R să aibă valoarea dată de $4m$. Caz de imposibilitate.

2° Dintre toate prismele R, corespunzînd aceleiași poziții a planului Q, care este aceea cu volumul maxim? Să se studieze variația acestui volum maxim, dacă planul Q se deplasează.

CAPITOLUL III

VOLUMUL PIRAMIDEI

543. Să se demonstreze direct formula care dă volumul piramidei triunghiulare, considerînd-o ca limită a sumei prismelor înscrise (**406**, Cor.). (Se va folosi formula care dă suma pătratelor primelor n numere întregi, Bourlet, Leçons d'Algèbre, p. 402).

544. Să se afle volumul tetraedrului regulat (ex. 526) de muchie a.

545. Volumele a două tetraedre care au un unghi triedru egal sau simetric sînt în același raport ca produsele muchiilor unghiului considerat.

Scanned with OKEN Scanner

546. Volumele a două tetraedre care au în comun o muchie și diedrul corespunzător acestei muchii sînt în același raport ca produsele ariilor fețelor care cuprind acest diedru.

547. Să se afle un punct, astfel ca, unindu-l cu vîrfurile unui tetraedru dat, acesta să fie împărțit în patru tetraedre echivalente.

548. Se dau trei paralele, nesituate în același plan. Pe una dintre ele, luăm un segment AB, de lungime dată, pe celelalte două, respectiv două puncte arbitrare C, D.

Să se arate că volumul tetraedrului astfel format nu depinde de poziția punctelor A, C, D și nici de alegerea paralelei pe care luăm punctele A și B, cu condiția ca AB să aibă mereu aceeași lungime.

549. Prin fiecare vîrf al unui tetraedru, ducem un plan paralel cu fața opusă. Care este raportul dintre volumul noului tetraedru astfel format și volumul tetraedrului inițial?

550. Prin fiecare muchie a unui tetraedru, ducem un plan paralel cu muchia opusă. Care este raportul dintre volumul paralelipipedului astfel format și volumul tetraedrului dat?

551. Volumul unui tetraedru este a șasea parte din produsul obținut dacă înmulțim cea mai scurtă distanță dintre două muchii opuse cu aria paralelogramului care are laturile respectiv egale și paralele cu aceste două muchii.

552. Dacă luăm pe două drepte date D, D' segmente respectiv egale cu a, a', obținem patru puncte care formează un tetraedru, al cărui volum nu variază dacă segmentele considerate se deplasează pe dreptele lor respective, fără a-și schimba lungimea.

553. Se dau două segmente AB, CD și considerăm dreptele L, astfel ca volumele a două tetraedre care au muchia comună pe L, muchiile opuse fiind AB pentru unul, CD pentru celălalt, să fie într-un raport dat. Să se afle locul geometric al dreptelor L care trec printr-un punct dat.

Cazul în care AB și CD sînt situate în același plan. Să se arate că, în acest caz, dreapta L întîlnește întotdeauna una dintre două drepte fixe.

554. Fie AD diagonala paralelogramului în care AB, AC sînt două laturi vecine. Să se arate că, EF fiind un segment arbitrar, tetraedrul $ADEF$ este echivalent cu suma sau cu diferența tetraedrelor $ABEF$, $ACEF$.

555. Prelungim, dincolo de vîrf, muchiile unei piramide și tăiem aceste prelungiri printr-un plan paralel cu baza. Să se exprime suma volumelor celor două piramide, fiind date cele două baze B, B' și distanța h dintre planele lor.

PROBLEME
PROPUSE LA CARTEA A ȘASEA

556. Să se taie un tetraedru cu un plan, astfel ca secțiunea să fie un paralelogram. Există trei direcții pentru planele care satisfac problema. Să se găsească, pentru fiecare dintre aceste direcții, paralelogramul maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Să se ducă secţiunea în aşa fel încît să fie un romb. Să se exprime latura acestui romb cu ajutorul lungimilor muchiilor tetraedrului.

557. Unind trei vîrfuri ale unui tetraedru regulat cu mijlocul înălţimii coborîte din al patrulea vîrf, obţinem trei drepte perpendiculare două cîte două.

558. Dacă suma a două muchii opuse ale unui tetraedru este egală cu suma altor două muchii opuse, aceeaşi relaţie are loc între diedrele corespunzătoare.

559. Dacă perpendicularele coborîte dîn vîrfurile unui tetraedru pe feţele unui al dolea tetraedru sînt concurente în acelaşi punct, avem aceeaşi situaţie şi pentru perpendicularele coborîte din vîrfurile celui de-al doilea tetraedru pe feţele celui dintîi.

560. Dacă un tetraedru are muchiile ortogonale (ex. 535), paralelipipedul dedus din el la exerciţiul 550 are toate muchiile egale.

561. Dacă, dintr-un punct O, luat pe baza ABC a unui tetraedru $SABC$, ducem paralelele Oa, Ob şi Oc la muchiile SA, SB, SC, pînă întîlnesc respectiv feţele SBC, SCA şi SAB în punctele a, b şi c, avem

$$\frac{Oa}{SA}+\frac{Ob}{SB}+\frac{Oc}{SC}=1.$$

562. Planul bisector al diedrului unui tetraedru împarte muchia opusă într-un raport egal cu raportul ariilor feţelor care cuprind diedrul.

563. Să se afle rapoartele dintre ariile triunghiurilor în care o faţă a unui tetraedru este împărţită de planele bisectoare ale diedrelor formate de celelalte feţe.

564. Tăiem o piramidă triunghiulară $SABC$ printr-un plan paralel cu baza ABC. Fie D, E, F punctele de intersecţie ale acestui plan cu muchiile SA, SB, SC. Dacă planul secant se deplasează paralel cu el însuşi, să se afle

1° locul geometric descris de punctul de intersecţie al planelor AEF, BFD, CDE;

2° locul geometric descris de punctul de intersecţie al planelor BCD, CAE, ABF.

565. Orice poliedru poate fi descompus în trunchiuri de prismă avînd muchiile laterale paralele cu o aceeaşi direcţie oarecare dată.

566. Să se ducă, într-o prismă, o secţiune paralelă cu bazele, astfel ca piramida avînd vîrful într-un punct al bazei superioare, baza în planul bazei inferioare şi muchiile laterale trecînd prin vîrfurile secţiunii să fie echivalentă cu prisma.

567. Suma volumelor piramidelor avînd ca baze feţele laterale ale unei prisme şi ca vîrf comun un punct interior arbitrar este constantă. În ce raport se află ea cu volumul prismei?

568. Orice plan dus prin mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru împarte acest solid în două părţi echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

569. Împărţim cele şase muchii ale unui tetraedru în rapoarte date. Să se afle raportul dintre volumul poliedrului convex (octaedru) avînd ca vîrfuri punctele de diviziune şi volumul tetraedrului.

570. Considerăm două triunghiuri echilaterale ABC, DEF, situate în plane paralele şi astfel ca punctele A, B, C şi proiecţiile punctelor D, E, F pe planul ABC să fie vîrfurile unui hexagon regulat. Unim centrul fiecăruia dintre triunghiuri cu fiecare dintre cele trei vîrfuri ale celuilalt. Care este forma solidului comun celor două piramide astfel formate? Care este volumul său?

571. Prin fiecare vîrf al unui paralelipiped P, ducem un plan paralel cu planul care trece prin cele trei vîrfuri vecine. Să se studieze solidul S, mărginit de aceste plane. Să se construiască P, cunoscînd pe S. Să se găsească raportul volumelor celor două poliedre.

Ce particularităţi prezintă solidul S, dacă P este un paralelipiped dreptunghic, un romboedru (**390** *bis*), un cub?

572. Prin două vîrfuri opuse A, C ale unui pătrat $ABCD$, ducem perpendicularele AA', CC' pe planul său şi alegem pe prima punctul A', astfel ca distanţa sa la centrul pătratului să fie egală cu latura $a = AB$; pe a doua luăm punctul C', astfel ca distanţa sa la punctul A' să fie dublul lui a.

1° Să se arate că planul $A'BD$ este perpendicular pe $A'C'$.

2° Să se exprime, cu ajutorul lui a, volumele tetraedrelor $A'ABD$, $C'CBD$, $C'A'BD'$.

573. Un plan împarte feţele laterale ale unei prisme triunghiulare în rapoarte date. Ce condiţii trebuie să satisfacă aceste rapoarte, pentru ca planul să împartă prisma în două trunchiuri de prismă? Să se afle raportul volumelor acestor două trunchiuri de prismă.

574. Poliedrul mărginit de două poligoane oarecare situate în plane paralele şi, pe de altă parte, de triunghiuri sau de trapeze formate de vîrfurile acestor poligoane, are ca volum

$$V = \frac{1}{6} h(B + B' + 4B''),$$

unde h este distanţa dintre planele poligoanelor, B şi B' ariile poligoanelor, iar B'' aria secţiunii poliedrului printr-un plan paralel cu planele poligoanelor şi egal depărtat de ele.

(Se va descompune în piramide avînd ca vîrf comun un punct al secţiunii).

Să se deducă de aici volumul trunchiului de piramidă.

575. Să se evalueze volumul cuprins între două dreptunghiuri, ale căror laturi sînt respectiv paralele şi între patru trapeze avînd fiecare ca baze cîte o latură a primului dreptunghi şi cîte una a celui de-al doilea.

Dimensiunile celor două dreptunghiuri se vor nota cu a, b; a', b'; distanţa dintre planele lor cu h.

CARTEA A ŞAPTEA

DEPLASĂRI. SIMETRII. ASEMĂNARE

CAPITOLUL I

DEPLASĂRI

577. Rotim o figură invariabilă S în jurul unei axe fixe D, cu un unghi de rotaţie arbitrar; după aceea, rotim o parte S' a figurii S în jurul unei axe D', care face parte din S (restul figurii S rămînînd fix), de asemenea cu un unghi de rotaţie arbitrar.

Să se arate că, în general, putem alege cele două unghiuri de rotaţie astfel ca o dreaptă dată[1]) din S' să fie paralelă cu o dreaptă dată[2]) arbitrar în spaţiu (sau, ceea ce este acelaşi lucru, un plan arbitrar din S', paralel cu un plan arbitrar în spaţiu). Care sînt cazurile de excepţie?

578. Rotim o figură invariabilă S în jurul unei axe fixe D, cu un unghi de rotaţie arbitrar; apoi, rotim o parte S' a figurii S în jurul unei axe D', aparţinînd lui S, apoi o parte S'' din S', în jurul unei axe D'', aparţinînd lui S', aceste din urmă două unghiuri de rotaţie fiind de asemenea arbitrare.

Să se demonstreze că putem alege unghiurile celor trei rotaţii astfel ca toate dreptele figurii S'' să devină paralele cu dreptele corespunzătoare dintr-o figură dată S''_0, egală cu S''.

579. Să se găsească o rotaţie care transformă două puncte date respectiv în alte două puncte date (presupunînd, bineînţeles, că distanţa dintre primele două puncte este egală cu distanţa dintre celelalte două).

În ce caz problema este nedeterminată?

580. Să se construiască axa rotaţiei care transformă două semidrepte concurente date OA, OB în două semidrepte OA', OB', concurente cu primele două (unghiul $\widehat{A'OB'}$ fiind egal cu $\widehat{AOB}$).

581. Admiţînd că două figuri egale F, F', care au un punct comun, se obţin una din cealaltă printr-o rotaţie, să se deducă de aici că două figuri egale oarecare se obţin una din cealaltă printr-o deplasare elicoidală.

(Se va arăta că există drepte din F paralele cu omoloagele lor din F'. Fie atunci P un plan din F, perpendicular pe dreptele considerate, P' omologul său, f partea din F situată în P, f' partea corespunzătoare din F'. Vom aplica lui f şi proiecţiei lui f' pe planul P teorema de la nr. **102**).

582. Care sînt diferitele deplasări care lasă neschimbată o dreaptă dată?

583. Există o infinitate de rotaţii care transformă una în cealaltă două drepte date D, D'. Axele acestor rotaţii coincid cu dreptele notate prin G_1, G_2 la exerciţiul 454.

Printre aceste rotaţii, există, în general, două al căror unghi este de 180°.

---

[1]) notată D'' în soluţie (Nota Red. E.T.).
[2]) notată D_0 în soluţie (Nota Red. E.T.).

584. Orice deplasare elicoidală care transformă una în cealaltă două drepte date D, D' are, în general, axa A paralelă cu axa uneia dintre rotațiile considerate la exercițiul 583.

Care este locul geometric al axei A, dacă este dată direcția ei?

Să se afle acest loc geometric: 1° direct; 2° utilizînd compunerea unor deplasări și cele două exerciții precedente. Se va demonstra că axa A taie întotdeauna sub un unghi drept una dintre două drepte fixe (după cum ea este paralelă cu o dreaptă G_1 sau cu o dreaptă G_2).

585. Să se afle locul geometric al axei unei deplasări elicoidale, cunoscînd direcția acestei axe și două puncte omoloage.

586. Să se construiască axa unei deplasări elicoidale cunoscînd un punct de pe această axă, mărimea translației și două puncte omoloage.

587. O deplasare dată oarecare poate fi descompusă, în general, în două rotații, dintre care una în raport cu o dreaptă dată oarecare. Ce cazuri fac excepție?

588. Compunem o deplasare elicoidală dată cu una oarecare dintre translațiile T, paralele cu o direcție dată. Să se afle locul geometric al axei noii deplasări astfel obținute, dacă variem mărimea translației T. Să se arate că, în general, numai una singură dintre aceste deplasări se reduce la o rotație.

589. Compunem o rotație dată cu o rotație de axă fixă și care taie axa primei rotații, însă al cărei unghi este variabil. Să se afle locul geometric al axei rotației rezultante.

590. Să se compună o rotație dată cu o rotație de axă dată și a cărei axă întîlnește axa primei rotații, însă al cărei unghi este necunoscut, astfel ca deplasarea rezultantă să fie o transpoziție (sau, mai general, o rotație de unghi dat).

591. Să se compună o deplasare elicoidală dată cu o deplasare necunoscută, însă de axă dată, astfel ca deplasarea rezultantă să fie o transpoziție.

592. Două rotații (de unghi nenul) ale căror axe nu sînt situate în același plan nu se compun niciodată într-o rotație.

593. Dacă o deplasare elicoidală nu se reduce nici la o translație, nici la o rotație[1]), atunci nu există vreun plan care să nu fie afectat de această deplasare.

594. Să se ducă, printr-un punct dat, două drepte pe care o deplasare dată le transformă una în cealaltă.

595. Fiind dată o deplasare, să se găsească două drepte omoloage, situate într-un același plan dat.

596. Să se construiască un unghi poliedru, cunoscînd bisectoarele fețelor.

Problema poate să fie nedeterminată?

Cunoscînd toate bisectoarele minus două, să se găsească locul geometric al acestora din urmă, astfel încît problema să fie nedeterminată.

597. Să se deducă, din compunerea rotațiilor, locul geometric al transpuselor unui punct dat în raport cu toate dreptele care trec printr-un punct fix, și sînt situate într-un plan fix.

598. Să se descompună o rotație R în două rotații S, S', ale căror unghiuri să fie egale, axa rotației S fiind o dreaptă dată, concurentă cu axa

---

[1]) *și are un unghi de rotație diferit de 180°*, în ediția rusă (Nota Red. E.T.).

rotației R. Care este locul geometric descris de axa rotației S', dacă axa rotației S descrie un plan?

598 *bis*. Să se descompună o deplasare elicoidală în două deplasări elicoidale S, S', compuse din translații egale și din rotații egale, ambele drepte sau ambele stîngi, axa deplasării S fiind dată.

599. Să se afle două deplasări elicoidale de axe date, care se compun într-o deplasare de axă iarăși dată.

CAPITOLUL II

SIMETRII

600. Două figuri sînt simetrice cu o a treia, în raport cu două plane diferite. Prin ce deplasare putem aduce pe prima să coincidă cu a doua?

(Se vor deosebi două cazuri, după cum cele două plane sînt concurente sau paralele).

601. Aceeași problemă pentru două figuri simetrice cu o a treia, una în raport cu un plan, iar a doua în raport cu un punct exterior planului.

602. O figură mărginită din toate părțile poate avea două centre de simetrie?

603. Orice plan dus prin punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelipiped îl împarte în două părți echivalente.

604. *Simetria oblică.* Considerînd un punct arbitrar M, fie M' punctul avînd proprietatea că segmentul MM' este paralel cu o dreaptă fixă D și tăiat în două părți egale de un plan P (care taie pe D); punctul M' se spune că este obținut din M printr-o *simetrie oblică*.

Să se demonstreze că

1° figura oblic simetrică a unei drepte este o dreaptă;

2° figura oblic simetrică a unui plan este un plan;

3° două poliedre care sînt unul simetricul oblic al celuilalt sînt echivalente. (Se poate folosi în acest scop ex. 565).

605. Aceeași problemă, dacă punctul M' este definit cu ajutorul lui M, prin condiția că segmentul MM' să fie paralel cu un plan fix P și împărțit în părți egale printr-o dreaptă fixă D (care taie planul P).

Se va demonstra că această transformare poate fi redusă la două simetrii oblice, așa cum au fost definite la ex. 604, sau încă la o simetrie oblică și la o simetrie în raport cu un punct.

606. Să se aplice concluziile exercițiului precedent la exercițiul 568.

607. Dacă o figură F este egală cu simetrica în raport cu un plan a unei figuri F', cele două figuri F și F' pot fi făcute să coincidă printr-o rotație, precedată sau urmată de o simetrie în raport cu un plan perpendicular pe axa de rotație, sau în raport cu un punct situat pe această axă[1]).

608. Să se înscrie, într-un unghi poliedru convex dat, un unghi poliedru care să aibă suma fețelor minimă.

Cazul triedrului.

[1]) În ediția rusă este completat astfel: sau printr-o translație, precedată sau urmată de o simetrie în raport cu un plan paralel cu direcția translației (Nota Red. E.T.).

CAPITOLUL III
OMOTETIE ȘI ASEMĂNARE

609. Dacă două figuri, compuse din puncte care nu sînt toate coliniare, se corespund punct cu punct astfel ca dreapta care unește două puncte oarecare ale unei figuri să fie paralelă cu dreapta care unește omoloagele lor din cealaltă, atunci ele sînt omotetice.

610. Dacă două figuri se corespund punct cu punct, astfel încît A, B, C fiind trei puncte ale uneia, A', B', C', omoloagele lor în cealaltă, unghiul $B'A'C'$ să fie întotdeauna egal cu $\widehat{BAC}$, atunci ele sînt asemenea, sau una este asemenea cu simetrica celeilalte.

611. Două figuri asemenea (însă nu egale) pot fi aduse să coincidă cu ajutorul unei rotații urmată de o omotetie directă în raport cu un punct situat pe axa de rotație.

Enunțul analog pentru două figuri dintre care una este asemenea cu simetrica celeilalte.

612. Două figuri mărginite din toate părțile nu pot fi omotetice mai mult decît în două feluri diferite.

613. Să se afle locul geometric al centrului unei omotetii în care omoloagele a trei puncte date se află respectiv în trei plane date.

614. Să se afle locul geometric al centrului unei omotetii, al cărei raport de asemănare este dat, știind că omoloaga unei drepte date D taie o dreaptă dată D'.

615. Să se afle locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat și împărțite într-un raport dat de acest punct și de două plane date; de trei plane date care trec prin aceeași dreaptă dată.

616. Să se demonstreze că putem găsi, într-o infinitate de moduri, două poliedre P, Q, astfel ca volumele lor să fie în același raport ca ariile lor. Să se determine Q, cunoscînd P și un poliedru asemenea cu Q.

PROBLEME
PROPUSE LA CARTEA A ȘAPTEA

617. Două tetraedre sînt egale sau simetrice:

1° dacă au un diedru egal, cuprins între fețe respectiv egale;

2° dacă au un triedru egal sau simetric, cuprins între muchii respectiv egale;

3° dacă au o față egală, alăturată la trei diedre respectiv egale;

4° dacă au o muchie egală, alăturată la două triedre egale sau simetrice;

5° dacă au cele șase muchii respectiv egale.

Este însă subînțeles, în toate aceste enunțuri, că elementele egale sau simetrice sînt la fel așezate.

618. Să se deducă, din cazurile de egalitate enunțate în problema 617, cazuri de asemănare pentru tetraedre.

619. Fiind date o dreaptă D și două puncte A, B, să se afle pe D un punct M, astfel ca suma $MA + MB$ să fie minimă, și un punct N, astfel ca diferența $NA - NB$ să fie maximă.

Scanned with OKEN Scanner

620. Să se găsească, pe o dreaptă dată, un punct pentru care suma distanţelor la două paralele date să fie minimă.

621. Cum se modifică enunţurile problemelor 604 şi 605, dacă segmentul MM' este împărţit de planul P (ex. 604) sau de dreapta D (ex. 605) într-un raport dat arbitrar, şi nu în două părţi egale?

622. O rotaţie şi o translaţie, neparalelă cu axa de rotaţie, se compun după o deplasare elicoidală, a cărei axă este paralelă cu axa de rotaţie. Dacă inversăm ordinea celor două operaţii, obţinem două deplasări ale căror axe sînt una simetrica celeilalte în raport cu planul care trece prin axa de rotaţie şi prin perpendiculara comună dusă pe acesta din urmă şi pe translaţie.

623. Mai general, compunînd două deplasări într-o ordine determinată, apoi în ordinea inversă, obţinem două deplasări ale căror axe sînt una transpusă celeilalte în raport cu perpendiculara comună pe primele două axe (mărimea rotaţiei şi aceea a translaţiei rezultante vor fi aceleaşi în ambele cazuri).

624. Ordinea în care compunem două deplasări nu este indiferentă decît dacă deplasările — care se numesc atunci *permutabile* — sînt

1° sau două deplasări de aceeaşi axă;

2° sau două translaţii;

3° sau două rotaţii de 180° în jurul unor axe care se taie sub un unghi drept.

625. Fiind date trei plane P, Q, R, care se intersectează după aceeaşi dreaptă D, iar în unul dintre ele o dreaptă[1]) SA, care taie dreapta D în punctul S, există, în general

1° un triedru avînd o muchie după SA şi astfel ca P, Q, R să fie planele bisectoare ale diedrelor sale sau ale suplementelor lor (ex. 479). Să se discute, după caz, dacă are loc unul sau celălalt dintre aceste două lucruri.

Dacă planele P, Q, R şi punctul S rămîn fixe, iar SA variază, planul feţei opuse lui SA trece printr-o dreaptă fixă;

2° un triedru, astfel ca P, Q, R să fie respectiv perpendiculare pe feţele sale şi să treacă prin bisectoarele acestor feţe sau prin bisectoarele suplementelor lor, una dintre aceste bisectoare fiind SA. Discuţia analogă celei de la 1°. Să se afle locul geometric al muchiilor triedrului, dacă SA variază iar P, Q, R şi S rămîn fixe;

3° un triedru, astfel ca P, Q, R să treacă fiecare prin cîte o muchie şi prin bisectoarea feţei opuse sau a suplementului acesteia, una dintre bisectoare fiind SA.

626. Fiind date trei drepte concurente Sa, Sb, Sc din acelaşi plan, există, în general,

1° un triedru, astfel ca Sa, Sb, Sc să fie dreptele despre care este vorba la exerciţiul 480, una dintre feţe situîndu-se într-un plan dat P, care trece prin Sa. Să se afle locul geometric al muchiilor acestui triedru, dacă P se roteşte în jurul lui Sa;

2° un triedru, astfel ca Sa, Sb, Sc să fie dreptele despre care este vorba la ex. 479 *bis*, unul dintre planele bisectoare menţionate acolo fiind un plan dat P, care trece prin Sa;

---

[1]) În ediţia rusă se consideră dreapta SA în planul P şi perpendiculară pe dreapta D în punctul S (Nota Red. E.T.).

3° un triedru, astfel ca Sa, Sb, Sc să fie dreptele despre care este vorba la ex. 481 *bis*, unul dintre planele bisectoare menționate acolo fiind un plan dat P, care trece prin Sa.

627. (Generalizarea punctului 1° de la ex. 626). Să se construiască un unghi poliedru, cunoscînd bisectoarele suplementelor fețelor sale. În general, problema este posibilă, dacă numărul fețelor este par. Dacă acest număr este impar, problema este, dimpotrivă, imposibilă sau nedeterminată. Care este, în acest din urmă caz, locul geometric al unei muchii a unghiului poliedru căutat?

Dacă se dau toate bisectoarele, cu excepția uneia, să se afle locul geometric pe care trebuie să fie situată aceasta din urmă, pentru ca problema să fie posibilă.

628. Fiind date trei plane P, Q, R, care trec prin aceeași dreaptă D, iar într-unul din ele o dreaptă SA, care taie dreapta D în punctul S, să se afle un triedru, astfel ca P, Q și R să treacă fiecare prin cîte o muchie și prin bisectoarea feței opuse, una dintre muchii fiind SA. (Se va folosi ex. 597).

CARTEA A OPTA

CORPURILE ROTUNDE

CAPITOLUL I

DEFINIȚII GENERALE. CILINDRUL

629. Dacă o dreaptă are mai mult decît două puncte comune cu o suprafață cilindrică cu bază circulară, ea este o generatoare a suprafeței.

630. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de o suprafață cilindrică cu bază circulară pe drepte duse printr-un punct fix.

631. Să se ducă, printr-un punct dat al spațiului, un plan tangent la un cilindru de rotație dat.

632. Să se afle locul geometric al centrelor omotetiilor de raport dat și avînd proprietatea că omoloaga unei drepte date întîlnește un cerc dat.

633. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu avînd proprietatea că proiecțiile lor pe laturile unui triunghi dat se află pe aceeași dreaptă.

634. Să se demonstreze că singurele suprafețe de rotație care sînt totodată și cilindri sînt cilindrii de rotație definiți la nr. **439.**

635. Să se calculeze dimensiunile litrului care servește la măsurarea unor corpuri friabile și ale litrului care servește la măsurarea lichidelor, știind că ambele instrumente au formă cilindrică, înălțimea fiind în primul egală cu diametrul bazei, iar în al doilea, cu dublul diametrului bazei.

636. Care este raportul dintre volumele generate de un dreptunghi care se rotește succesiv în jurul a două laturi vecine?

Scanned with OKEN Scanner

637. Fiind date un cerc și doi diametri perpendiculari, să se afle un dreptunghi avînd două laturi după direcțiile acestor diametri, un vîrf pe cerc și care, rotindu-se în jurul uneia dintre laturi, să genereze un cilindru cu aria totală dată. Maximul acestei suprafețe totale.

638. Fiind dat un cilindru circular drept, să se evalueze porțiunea din aria laterală, cuprinsă între bază, un plan P care trece printr-un diametru al bazei și două generatoare arbitrare (fig. 132 din Geometria în spațiu). Să se arate că aria astfel definită este *cuadrabilă*, adică putem construi cu ajutorul riglei și al compasului un dreptunghi echivalent (se presupune că am dus cercul bazei, că am marcat pe el picioarele celor două generatoare, că sînt date lungimea determinată de planul P pe una dintre ele precum și direcția diametrului comun celor două plane).

(Se va imita metoda de la nr. **440**, înlocuind întîi suprafața cilindrică printr-o suprafață prismatică înscrisă).

639. Tăind o suprafață cilindrică cu baza circulară prin două plane neparalele (dar care nu se întretaie în interiorul suprafeței), obținem un corp (care poate fi denumit *trunchi de cilindru*). Să se demonstreze că aria laterală și volumul acestui corp sînt aceleași ca și acelea ale unui cilindru mărginit de aceeași suprafață cilindrică și de două plane paralele cu baza cilindrului dat, duse prin punctele în care paralela la generatoare, dusă prin centrul acestei baze, taie planele date.

CAPITOLUL II

CONUL. TRUNCHIUL DE CON

640. Dacă o dreaptă are mai mult decît două puncte comune cu o suprafață conică cu baza circulară, ea este o generatoare a suprafeței.

641. Să se demonstreze că singurele suprafețe de rotație care sînt totodată și conuri sînt conurile de rotație definite la nr. **442.**

642. Să se ducă, printr-un punct dat, un plan tangent la un con dat cu baza circulară.

643. Dacă un con de rotație este tangent la cele două fețe ale unui diedru,

1° Generatoarele de contact formează unghiuri egale cu muchia.

2° Planul dus prin axa conului și prin muchia diedrului formează unghiuri egale cu fețele, precum și unghiuri egale cu planele meridiane ale generatoarelor de contact.

644. Care este locul geometric al axelor conurilor de rotație tangente la două plane date?

645. Care este locul geometric al axelor conurilor de rotație ce trec prin două drepte concurente date?

646. Să se afle locul geometric al punctelor avînd proprietatea că raportul distanțelor la un punct dat și la un plan care trece prin acest punct este constant.

Scanned with OKEN Scanner

647. Să se demonstreze că un con circular, însă de altfel oarecare (adică în general un con care nu este de rotaţie), admite întotdeauna un plan de simetrie şi că suprafaţa conică din care face parte admite o axă de transpoziţie.

648. Să se ducă un con de rotaţie prin trei drepte concurente date, nesituate în acelaşi plan. Care este numărul de soluţii?

Să se arate că două oarecare dintre conurile de rotaţie care trec prin cele trei drepte date au o a patra dreaptă comună (care poate fi confundată cu una dintre primele trei). Să se construiască a patra dreaptă.

649. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un unghi poliedru convex cu patru feţe să fie inscriptibil într-un con de rotaţie este ca suma a două diedre opuse să fie egală cu suma celorlalte două, sau să avem această situaţie dacă înlocuim una sau mai multe muchii prin prelungirile lor.

650. Care este condiţia pentru ca un unghi poliedru cu patru feţe să fie inscriptibil în două conuri de rotaţie? — pentru ca să fie inscriptibil în trei conuri de rotaţie? În acest din urmă caz, axele celor trei conuri formează un triedru tridreptunghic.

651. Să se găsească un con (sau un cilindru) de rotaţie tangent la trei plane date. Care este numărul de soluţii?

Două conuri arbitrare tangente la trei plane date au un al patrulea plan tangent comun. Să se construiască acest plan.

652. Ce condiţie trebuie să satisfacă feţele unui unghi poliedru cu patru feţe, pentru ca acest unghi să poată fi circumscris unui con de rotaţie? În ce caz unghiul poliedru este circumscriptibil la mai mult decît un con de rotaţie?

Să se compare soluţia cu aceea de la exerciţiul 496.

653. Printre generatoarele unui con de rotaţie, să se afle aceea care face unghiul cel mai mic sau cel mai mare cu o semidreaptă dată.

654. Unghiul la vîrf al unui con de rotaţie este mai mare decît unghiul a două generatoare nesituate în acelaşi plan meridian.

655. Tăiem un con circular printr-un plan paralel cu baza, însă situat dincolo de vîrf şi formînd, în consecinţă, cu a doua pînză a suprafeţei conice un al doilea con, omotetic cu primul. Să se evalueze volumul corpului (*trunchi de con de speţa a doua*) format de ansamblul celor două conuri, dacă se cunosc razele celor două cercuri şi distanţa dintre planele lor.

656. Să se înscrie într-un con de rotaţie dat un cilindru de arie laterală dată. Să se afle maximul acesteia. Poate fi extinsă soluţia la un con circular arbitrar?

657. Se dau două conuri de rotaţie egale SAB, $S'A'B'$, aşezate astfel încît planele cercurilor de bază AB, $A'B'$ să fie paralele, iar vîrful fiecărui con să fie situat în planul cercului de bază al celuilalt. Tăiem aceste două conuri printr-un plan P, paralel cu planele celor două baze şi situat între aceste două plane; acest plan P taie primul con după un cerc CD, iar pe al doilea după un cerc $C'D'$. Să notăm cu r, l, h respectiv raza bazei, generatoarea şi înălţimea fiecăruia dintre conuri, cu x distanţa de la vîrful S la punctul de intersecţie al planului P cu generatoarea SA şi cu y distanţa de la vîrful S la planul P.

Scanned with OKEN Scanner

1° Să se determine x, astfel ca raportul dintre suma ariilor laterale ale celor două trunchiuri de con $ABCD$, $A'B'C'D'$ și aria laterală a conului SAB să fie egal cu un număr dat λ. Discuție.

2° Să se determine y, astfel ca raportul dintre suma volumelor trunchiurilor de con $ABCD$, $A'B'C'D'$ și volumul conului SAB să fie egal cu un număr dat μ. Discuție.

CAPITOLUL III

PROPRIETĂȚILE SFERELOR

658. O suprafață, avînd proprietatea că cercul care trece prin trei puncte oarecare ale ei este conținut în întregime în ea, este o sferă (sau un plan).

659. Dacă un număr arbitrar de cercuri au proprietatea că două oarecare dintre ele se intersectează în două puncte, atunci

1° sau toate aceste cercuri au două puncte comune;

2° sau ele aparțin toate aceleiași sfere.

660. Care este suprafața generată de un cerc, cînd acesta se rotește în jurul unei axe care se proiectează pe planul său după un diametru?

661. Să se afle locul geometric al proiecțiilor unui punct dat pe planele care trec printr-un punct fix.

662. Să se afle locul geometric al centrelor secțiunilor efectuate într-o sferă prin plane care trec printr-un punct fix sau printr-o dreaptă fixă.

663. Centrul unei sfere este fix, pe cînd raza ei variază. Să se afle locul geometric al cercului de contact al conului circumscris acestei sfere și avînd ca vîrf un punct dat.

664. Să se afle locul geometric al punctelor din care putem duce la o sferă trei tangente formînd un triedru tridreptunghic.

665. Să se afle locul geometric al punctelor din care putem duce la o sferă trei plane tangente care să formeze un triedru tridreptunghic.

666. Să se arate că locul geometric al punctelor avînd proprietatea că distanțele lor la trei puncte date sînt proporționale cu trei numere date este un cerc ortogonal tuturor sferelor care trec prin cele trei puncte date.

667. Să se afle locul geometric al punctelor astfel încît conurile circumscrise la două sfere date și avînd ca vîrfuri aceste puncte să fie egale.

Aceeași problemă pentru cazul a trei sfere date.

668. Să se afle locul geometric al punctelor astfel încît suma pătratelor distanțelor lor la două puncte date, înmulțite respectiv cu coeficienți dați, să fie constantă.

669. Să se afle locul geometric al punctelor ale căror puteri în raport cu două sfere date să fie proporționale cu două numere date.

670. Aceeași problemă, pentru cazul a trei sfere date și a trei numere date.

671. Să se afle locul geometric al extremităților unui segment egal și paralel cu un segment fix, știind că aceste extremități sînt situate respectiv pe două sfere date.

Scanned with OKEN Scanner

672. Să se găsească un triunghi care se obţine prin translaţie dintr-un triunghi dat şi ale cărui vîrfuri sînt situate pe trei sfere date.

673. Un plan fix oarecare este intersectat de sfere care trec printr-un acelaşi cerc după cercuri avînd aceeaşi axă radicală.

674. Să se găsească o sferă, cunoscînd un cerc şi planul tangent într-un punct al acestui cerc.

675. Mai general, să se afle o sferă care trece printr-un cerc dat şi este tangentă la un plan sau la o sferă dată.

676. Să se ducă, printr-un cerc dat, o sferă ortogonală la o sferă dată.

677. Să se afle o sferă avînd centrul pe o dreaptă dată, tangentă la o altă dreaptă dată şi trecînd printr-un punct dat. (Cunoaştem un cerc situat pe sfera căutată).

678. Să se găsească o sferă avînd centrul pe o dreaptă dată şi tangentă la o altă dreaptă dată şi la un plan dat.

679. Să se afle o sferă care trece printr-un cerc dat şi este tangentă la un alt cerc dat. Discuţie.

680. O sferă variază, trecînd printr-un cerc fix C. Să se afle locul geometric al cercului de contact al conului circumscris sferei, avînd ca vîrf un punct dat din planul cercului C. Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale planelor tangente duse printr-o dreaptă dată din planul lui C. Să se afle locul geometric al dreptei de intersecţie a planelor tangente în două puncte ale cercului C.

681. Ce se întîmplă, dacă o sferă variază trecînd prin două puncte fixe A, B şi rămînînd tangentă la o dreaptă fixă, care taie prelungirea lui AB?

682. O sferă variabilă trece prin două puncte fixe şi este tangentă la un plan fix sau la o sferă fixă. Să se afle locul geometric al punctului de contact.

683. Să se găsească o sferă care trece prin două puncte date şi este tangentă la două plane date.

684. O sferă variabilă este tangentă la două drepte fixe şi are centrul în planul dus paralel cu aceste două drepte, la egală distanţă de una şi de cealaltă. Să se afle locul geometric al acestui centru.

685. Să se afle locul geometric al centrelor sferelor tangente la trei plane date (patru drepte, cu excepţia cazului în care două dintre planele date sînt paralele). Cîte conuri sau cîţi cilindri de rotaţie, tangenţi la cele trei plane date, există?

686. În general, există opt sfere tangente la laturile unui patrulater strîmb. Dacă însă suma a două laturi ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două, numărul de sfere tangente la cele patru laturi devine infinit. Să se afle, în aceste condiţii, locul geometric al centrelor sferelor. Care este sfera de rază minimă?

Să se deducă de aici soluţia exerciţiului 588.

687. Să se găsească condiţiile pentru ca să existe o sferă tangentă la cele şase muchii ale unui tetraedru.

688. Să se înscrie sau să se exînscrie o sferă într-un tetraedru. Vezi şi ex. 1211 *bis*.

689. O sferă variază, rămînînd tangentă la un plan fix într-un punct fix. Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale planelor tangente, paralele cu planul dat.

Scanned with OKEN Scanner

690. Să se afle o sferă care intersectează sub un unghi drept două cercuri date [1]). Caz de imposibilitate. Caz de nedeterminare.

691. Dacă un cerc variabil intersectează două cercuri fixe în cîte două puncte, planul său trece, în general, printr-un punct fix. Caz de excepție.

692. Să se afle în spațiu un cerc care taie pe fiecare dintre două cercuri date în două părți egale.

693. Să se afle un cerc care să fie împărțit de fiecare dintre două cercuri date în două părți egale. Condiții de posibilitate.

694. Să se afle un cerc tangent la două cercuri date [2]). Pentru acest exercițiu și pentru cele două precedente, vezi și exercițiile 703 și 704.

695. Să se afle locul geometric al centrelor sferelor care taie două sfere date după cercuri mari; al sferelor care sînt intersectate de două sfere date după cercuri mari; al sferelor care intersectează după un cerc mare o sferă dată și sînt intersectate după un cerc mare de o altă sferă dată. Problemele analoge (în număr de patru) dacă avem trei sfere date.

696. Dacă două sfere [3]) n-au nici un punct comun, atunci există două puncte (*punctele limită*) avînd proprietatea că sferele reduse la aceste puncte au același plan radical cu sferele date. Orice sferă ortogonală la primele două trece prin punctele limită.

697. Dacă trei sfere care nu au același plan radical [4]) nu au nici un punct comun, atunci sferele ortogonale la ele trec printr-un cerc fix. Acest cerc este locul geometric al punctelor avînd proprietatea că sferele reduse la aceste puncte au aceeași axă radicală cu sferele date.

698. Sfera ortogonală la patru sfere date (dacă există) este locul geometric al punctelor avînd proprietatea că sferele reduse la aceste puncte au același centru radical cu sferele date.

699. Să se afle locul geometric al punctelor limită (ex. 696) a două sfere S_1, S_2, care variază fiecare, trecînd printr-un cerc fix. Găsim sfera considerată la exercițiul 690, dar trebuie să ne convingem că orice punct al acestei sfere aparține locului geometric, construind sferele respective S_1, S_2 (se vor construi cercurile lor de intersecție cu Σ) [5]). Ce se întîmplă în cazul cînd problema de la exercițiul 690 este nedeterminată?

700. În jurul unui punct fix, luat ca vîrf, rotim un triedru tridreptunghic, ale cărui muchii taie o sferă dată. Să se arate că:

1° suma pătratelor coardelor determinate de sferă pe cele trei muchii rămîne constantă;

2° avem aceeași situație pentru suma pătratelor celor șase segmente duse din vîrf spre punctele de intersecție ale muchiilor cu sfera;

3° suma ariilor cercurilor de intersecție ale sferei cu cele trei fețe este de asemenea constantă.

---

[1]) O sferă și un cerc se intersectează sub un unghi drept, dacă tangenta la cerc, dusă printr-un punct comun, este perpendiculară pe planul tangent la sferă în același punct.

[2]) În ediția rusă, ceea ce urmează este înlocuit prin: Să se considere cazurile în care această problemă sau cele două precedente sînt nedeterminate (Nota Red. E.T.).

[3]) *neconcentrice*, în ediția rusă (Nota Red. E.T.).

[4]) În ediția rusă se pune condiția ca cele trei sfere *să nu aibă centrele coliniare*, în locul condiției de *a nu avea același plan radical* (Nota Red. E.T.).

[5]) În ediția rusă, a fost scoasă indicația din paranteză (Nota Red. E.T.).

701. În aceleași condiții, dacă facem să treacă un plan prin trei dintre punctele de intersecție considerate la exercițiul 700, locul geometric al proiecției vîrfului triedrului pe acest plan va fi o sferă (v. ex. 513, 1° și ex. 70).

Dacă vîrful tetraedrului se află pe sferă, planul considerat trece printr-un punct fix, anume centrul de greutate al triunghiului format de cele trei puncte de intersecție ale muchiilor cu sfera.

702. Putem alege trei sfere în așa fel, încît cele opt plane tangente comune ale lor (**464**) să existe. (Va fi suficient, după ce am ales ca centre trei puncte necoliniare, să luăm razele destul de mici).

703. Cazul de nedeterminare la exercițiul 692.

Pe sferă, există un cerc care taie în părți egale trei cercuri date.

Aceeași problemă în plan. Centrul cercului cerut este simetricul centrului radical în raport cu centrul cercului care trece prin centrele cercurilor date.

704. Cazul de nedeterminare în exercițiul 693.

Pe sferă, să se găsească un cerc care să fie tăiat în două părți egale cu trei cercuri date. Condiții de posibilitate.

Aceeași problemă în plan. În ambele cazuri, cercul căutat există, dacă cercul ortogonal comun nu există, și invers[1]).

CAPITOLUL IV

ARIA ȘI VOLUMUL SFEREI

706. Să se împartă suprafața unei sfere în porțiuni echivalente, prin plane care trec printr-o dreaptă dată, exterioară sferei.

707. Un cilindru este circumscris unei sfere. Să se arate că aria zonei sferice, cuprinsă între două plane perpendiculare pe axa cilindrului, este echivalentă cu aria cilindrului cuprinsă între aceleași plane.

708. La o sferă, căreia i s-a circumscris un cilindru, ducem un plan tangent P, perpendicular pe axa cilindrului; luăm secțiunea dreaptă, astfel determinată în cilindru, ca bază a unui con avînd vîrful în centrul sferei. Să se arate că,

1° dacă tăiem cele trei corpuri printr-un același plan paralel P, cercul care este secțiunea cilindrului are o arie echivalentă cu suma ariilor cercurilor după care sînt intersectate respectiv conul și sfera;

2° dacă intersectăm cele trei corpuri prin două plane paralele cu P, volumul cuprins între aceste două plane — în cilindru — este egal cu suma volumelor cuprinse în con și în sferă.

709. Să se demonstreze că volumele cilindrului, al conului, al trunchiului de con și al segmentului sferic satisfac relația

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B''),$$

---

[1]) Problema cercurilor tangente pe sferă se reduce la problema din plan, printr-o proiecție stereografică (**680**).

unde h, B, B', B'' sînt, ca la ex. 575, înălţimea corpului, ariile celor două baze (baza superioară a conului fiind nulă) şi aria secţiunii paralelă cu bazele şi, egal depărtată de ele.

710. Două cercuri mici care sînt unul polarul celuilalt (ex. 488) au proprietatea că, dacă am adopta ca unitate de lungime lungimea unui cerc mare şi ca unitate de arie aria emisferei, numărul care măsoară lungimea unuia ar fi egal cu unitatea, minus numărul care măsoară aria calotei sferice interioară celuilalt.

711. Pentru toate poliedrele circumscrise aceleiaşi sfere, raportul dintre volum şi arie este constant.

712. Enunţul precedent (ex. 711) subzistă şi pentru un cilindru, un con sau un trunchi de con, cirscumscrise sferei (se spune că un cilindru, un con sau un trunchi de con sînt circumscrise unei sfere, dacă 1° suprafaţa respectivă cilindrică sau conică este circumscrisă acestei sfere, 2° planele bazelor sînt tangente la aceeaşi sferă), mai general, pentru orice corp mărginit de porţiuni de suprafaţă cilindrică sau conică, circumscrise, şi de plane tangente.

713. Care este raportul dintre volumele generate de un paralelogram, care se roteşte succesiv în jurul a două laturi vecine?

714. Să se construiască (efectiv)[1]) un triunghi, cunoscînd razele sferelor echivalente cu volumele pe care le generează acest triunghi, rotindu-se succesiv în jurul fiecăreia dintre laturile sale.

715. Să se calculeze raza unui cerc dus pe o sferă de rază R, ştiind că aria cercului este egală cu diferenţa dintre ariile calotelor pe care le determină.

Care este înălţimea conului circumscris avînd acest cerc ca bază?

716. Să se afle, pe o sferă dată, o calotă a cărei arie să fie într-un raport dat cu aria cercului care îi serveşte ca bază.

717. Să se intersecteze o sferă cu un plan, astfel ca unul dintre segmentele sferice (cu o singură bază) obţinute să fie într-un raport dat cu sectorul sferic mărginit de aceeaşi calotă.

718. Luăm un cerc de pe o sferă ca bază a unui con avînd vîrful în unul dintre polii acestui cerc. Să se determine cercul astfel ca volumul conului să fie într-un raport dat cu volumul segmentului sferic, avînd ca bază acelaşi cerc şi care conţine conul.

Către ce limită tinde raportul dintre volumul conului şi volumul segmentului sferic, dacă înălţimea lor comună tinde către zero?

719. Să se construiască un segment sferic aparţinînd unei sfere date, dacă cunoaştem volumul său (egal cu acela al unei sfere de rază dată) şi aria zonei care îl mărgineşte (egală cu aceea a unui cerc dat).

Care este maximul volumului segmentului, dacă aria zonei este dată?

720. Să se ducă, pe o sferă, trei cercuri tangente două cîte două, avînd planele paralele cu aceeaşi dreaptă, primele două cercuri fiind egale între ele şi împărţind în patru părţi echivalente una dintre calotele determinate de al treilea cerc.

721. Fie A punctul de contact a două cercuri O şi O', tangente exterior; T, T' punctele de contact ale unei tangente comune exterioare la aceste cercuri. Să se arate că 1° volumul cuprins între trunchiul de con generat de TT' (în

[1]) *Să se calculeze*, în ediţia rusă (Nota Red. E. T.).

mișcarea sa de rotație în jurul liniei centrelor) și de sfera care trece prin cercurile de bază ale acestui trunchi de con este dublul volumului porțiunii aceluiași trunchi de con, exterioară sferelor S, S' generate de cercurile date și că 2° această porțiune este echivalentă cu suma inelelor sferice situate respectiv în sferele S, S', în exteriorul conurilor generate de coardele AT, AT'. Să se exprime aceste volume prin razele cercurilor date.

PROBLEME PROPUSE LA CARTEA A OPTA

724. Dacă centrul radical a patru sfere este interior față de acestea, el este centrul unei sfere tăiate de fiecare dintre sferele date după un cerc mare.

725. Să se afle locul geometric al generatoarelor de contact ale planelor tangente, duse printr-un punct dat[1]) al spațiului la conurile de rotație care trec prin laturile unui unghi dat (se reduce la ex. 681, considerînd sferele înscrise în conurile date).

Prin două puncte date A, B ale unei sfere, ducem un cerc mic variabil, iar printr-un punct C, situat pe cercul mare AB, ducem un cerc mare tangent la cercul mic. Care este locul geometric al punctului de contact T? Să se arate că avem $CT^2 = \frac{CA \cdot CB \cdot R}{d}$, notînd cu R raza sferei și cu d distanța centrului la coarda AB.

726. Considerăm două drepte perpendiculare, nesituate în același plan și le tăiem printr-un plan variabil, însă paralel cu un plan fix. Să se arate că sfera avînd ca puncte diametral opuse cele două puncte de intersecție trece printr-un cerc fix.

727. Pe două drepte date D, D', luăm, pornind din două puncte fixe A, A', două segmente AM, $A'M'$, al căror raport $A'M'/AM$ să fie egal cu un număr dat k și considerăm sfera (**447** *bis*) care este locul geometric al punctelor P satisfăcînd condiția $PM' : PM = k$.

Să se arate că, dacă punctele M, M' variază pe dreptele lor respective (însă astfel ca raportul $A'M'/AM$ să fie mereu egal cu k,) sferele obținute, cum s-a arătat mai sus, aparțin la una sau la cealaltă dintre două familii (după sensul în care purtăm segmentele AM, $A'M'$), sferele din prima familie trecînd toate[2]) printr-un același cerc C_1, iar sferele din a doua familie, printr-un același cerc C_2.

Direcția planului cercului C_1 ca și aceea a planului cercului C_2 este independentă de alegerea punctelor A, A', dacă se dau dreptele D, D' și raportul k. Dacă k variază, planele rămîn paralele cu o dreaptă fixă.

Orice punct aparținînd unui cerc C_1 sau C_2 are proprietatea că distanțele sale la cele două drepte date sînt în raportul k. Invers, prin orice punct din spațiu pentru care raportul distanțelor la D și la D' este egal cu k, trece un cerc C_1 și un cerc C_2.

728. Fiind date două sfere și un punct P, locul geometric al unei drepte, care trece prin P și care unește două puncte luate respectiv pe fiecare dintre

[1]) *situat în planul unghiului dat*, în ediția rusă (Nota Red. E. T.).

[2]) Trebuie să demonstrăm întîi că două sfere din aceeași familie sînt secante. Aceasta se face ușor cu ajutorul exercițiului 726.

sfere și este împărțită de aceste puncte și de punctul P într-un raport dat, este un con cu baza circulară.

Acest con se poate reduce la un plan. Să se afle locul geometric al punctului P, pentru ca să avem acest din urmă caz.

729. Locul geometric al muchiilor diedrelor drepte ale căror fețe trec respectiv prin două drepte concurente date este un con cu baza circulară (ex. 462).

730. Locul geomertic al punctelor pentru care raportul distanțelor lor la două drepte concurente date este constant este un con circular oblic (ex. 727).

731. Locul geometric al bisectoarelor unghiurilor care au o latură fixă, iar cealaltă descrie un plan fix (trecînd mereu prin punctul de intersecție al acestui plan cu prima latură), este un con (în general oblic) cu baza circulară.

732. Să se afle locul geometric al vîrfurilor unui unghi poliedru ale cărui patru fețe trec respectiv prin laturile unui patrulater plan dat, știind că acest unghi poliedru poate fi intersectat (ex. 500) după un dreptunghi.

Aceeași problemă, dacă știm că secțiunea, în loc să fie un dreptunghi, poate fi un romb.

Aceeași problemă, dacă știm că unghiul poliedru poate fi tăiat după un pătrat. Locul geometric al centrului pătratului (con oblic cu baza circulară).

733. Considerăm un trunchi de con, în care înălțimea este medie proporțională între diametrii celor două baze. Să se demonstreze că putem înscrie o sferă (ex. 712) în acest corp (compară cu ex. 135).

Să se arate că aria laterală a acestui trunchi de con este echivalentă cu aria unui cerc avînd ca rază generatoarea.

Să se construiască razele bazelor, cunoscînd înălțimea și generatoarea.

734. Să se construiască trei sfere care trec respectiv prin vîrfurile unui triunghi dat, sînt tangente în aceste vîrfuri la planul triunghiului și tangente două cîte două. Să se calculeze razele lor, cunoscînd laturile triunghiului.

735. Pe sfera cerească, considerăm punctele M avînd ascensiunea dreaptă egală cu declinația.

1° Să se afle locul geometric al proiecțiilor punctelor M pe planul ecuatorului.

2° Să se afle locul geometric al dreptelor AM, A fiind pe ecuator punctul origine al ascensiunilor drepte.

736. Fiind date trei puncte coliniare A, B, C (B între A și C), descriem pe diametrul BC un semicerc, la care ducem tangenta AD; fie M un punct al arcului BD. Se cere să determinăm punctul M, astfel ca, ducînd dreptele MC, MA și rotind figura în jurul lui AC, volumul generat de triunghiul MAC să fie împărțit într-un raport dat k de zona pe care o generează arcul MB. Să se afle limitele lui k în funcție de raportul h dintre OA și OB, unde O este mijlocul lui BC.

737. Se dă un pătrat $ABCD$, a cărui latură este egală cu $2a$, și considerăm un punct M în planul acestui pătrat.

1° Să se calculeze suma S a volumelor generate de triunghiurile MAB, MBC, MCD, MDA, care se rotesc respectiv primul în jurul lui AB, al doilea în jurul lui BC, al treilea în jurul lui CD, al patrulea în jurul lui DA.

2° Să se demonstreze că suma S nu depinde de mărimile a și d, unde d este distanța punctului M la centrul pătratului; să se găsească locul geometric

Scanned with OKEN Scanner

al punctului M, dacă acest punct se mișcă, astfel ca suma S să rămînă egală cu volumul conului de înălțime a și de raza r.

3° Să se determine, pe locul geometric precedent, pozițiile lui M pentru care raportul dintre volumele generate de triunghiul MAB, care se rotește succesiv în jurul lui MA și al lui MB, este egal cu un număr dat m.

738. Fie un trapez $OAMB$, (fig. 167 din Geometria în spațiu) în care latura OB este perpendiculară pe bazele OA, BM. Presupunem că vîrfurile O și A sînt fixe, iar vîrful B se deplasează pe dreapta fixă Oy, perpendiculară pe OA. Rotim figura în jurul lui Oy.

1° Presupunem că volumele generate de triunghiurile OAB și ABM sînt echivalente și se cere să aflăm, în planul AOy, locul geometric al punctului M, precum și locul geometric al punctului P, intersecția diagonalelor OM și AB.

2° Fie $ODMC$ semicercul tangent în O la OA și trecînd prin M; rotim figura în jurul lui Oy și presupunem că volumele generate de triunghiul OAB și de figura $ODMA$ (mărginită de dreptele OA, AM și de arcul de cerc ODM) sînt echivalente. Să se afle, în această a doua ipoteză, locul geometric descris de M în planul AOy.

3° Să se determine punctul M, știind că volumele descrise de triunghiurile OAB și ABM și de figura $ODMA$ sînt echivalente. (Se va nota cu a lungimea dată a lui OA).

COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

CAPITOLUL III

POLI ȘI POLARE ÎN RAPORT CU SFERA. INVERSIUNEA ÎN SPAȚIU. COMPLEMENTE DE GEOMETRIE SFERICĂ

923. Raportul dintre distanțele a două puncte la centrul unei sfere este egal cu raportul dintre distanțele fiecărui punct la planul polar al celuilalt.

924. Locul geometric al centrelor sferelor tăiate de fețele unui triedru dat, după trei cercuri ortogonale două cîte două, este dreapta considerată la exercițiul 482.

925. Cercurile circumscrise la două fețe ale unui tetraedru se taie sub același unghi ca cercurile circumscrise celorlalte două fețe. (De exemplu, putem transforma printr-o inversiune avînd polul într-un vîrf).

926. Se iau inversele a trei vîrfuri ale unui tetraedru, polul de inversiune fiind al patrulea vîrf. Să se arate că obținem un triunghi ale cărui unghiuri sînt întotdeauna aceleași, oricare ar fi vîrful ales ca pol de inversiune.

Să se arate că forma acestui triunghi nu se schimbă, dacă înlocuim cele patru vîrfuri prin transformatele lor respective într-o aceeași inversiune arbitrară.

927. Să se afle locul geometric al dreptelor duse printr-un punct dat și pe care două plane date determină (pornind din acest punct) două segmente de produs constant.

Scanned with OKEN Scanner

928. Locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct dat și au proprietatea, că produsul proiecțiilor a două segmente date pe una oarecare dintre ele este constant, este un con cu baza circulară.

929. Să se afle locul geometric al axei unei deplasări elicoidale, cunoscînd un punct al acestei axe și omologul unui punct dat în spațiu (se reduce la ex. 928).

930. Să se afle locul geometric al inverselor unui punct dat în raport cu sfere avînd același plan radical sau aceeași axă radicală.

931. Se dau două sfere S, S'. Să se afle locul geometric al punctului de contact a două sfere care variază, rămînînd tangente între ele și ambele tangente la S și la S' (compară cu ex. 266).

Aceeași problemă, dacă în locul celor două sfere date avem trei: S, S', S''.

932. Se dau două sfere și un punct A; să se afle o inversiune, astfel că omologul lui A să fie centrul de asemănare al transformatelor sferelor date.

933. Toate sferele care intersectează două sfere date S, S' sub unghiuri constante α, α'[1]) taie sub un unghi constant α'' orice sferă S'' avînd același plan radical cu primele două. Să se arate că unghiul α'' poate fi considerat ca determinat de condiția că sfera ale cărei plane tangente intersectează toate pe S sub unghiul α, sfera ale cărei plane tangente intersectează toate pe S' sub unghiul α' și sfera ale cărei plane tangente intersectează toate pe S'' sub unghiul α'' au un centru de asemănare comun.

Enunțul analog, cînd sînt date trei sfere în locul celor două.

934. Să se afle o sferă care intersectează cinci sfere date sub unghiuri egale, — o sferă care intersectează patru sfere date sub unghiuri date (compară cu ex. 402 bis)[2]).

935. Să se rezolve, pentru sfere, probleme analoge cu exercițiile 237, 241 (1°, 2°), 242, 245, 246, 247, 248 din Geometria plană.

935 *bis*. Exercițiul analog cu exercițiul 401, cele trei cercuri date fiind înlocuite prin patru sfere.

936. Două figuri, care sînt una transformata celeilalte printr-o inversiune S, sînt supuse la o aceeași inversiune T. Să se arate că noile figuri astfel obținute sînt de asemenea una inversa celeilalte (se va folosi nr. **671**). Să se găsească noul pol de inversiune, în cazul cînd puterea inversiunii S este pozitivă (compară cu ex. 250).

937. Supunem o figură arbitrară F la două inversiuni consecutive (compară cu ex. 251); obținem astfel o figură F''. Să se arate că

1° Există, fie o inversiune care transformă pe F și pe F'' în două figuri omotetice, fie o inversiune care transformă pe F și pe F'' în două figuri egale;

2° Există o infinitate de sisteme de două inversiuni care transformă, la fel cu primele două, pe F în F''; în particular, putem presupune că una dintre cele două inversiuni se reduce la o simetrie, cu condiția ca F și F'' să nu fie asemenea.

---

[1]) În ediția rusă, ceea ce urmează este înlocuit cu: formează două familii, astfel încît o sferă oarecare S'', care are planul radical comun cu sferele S, S' și intersectează o sferă dintr-o familie, taie toate sferele acestei familii sub un unghi constant α'' (Nota Red. E.T.).

[2]) În ediția rusă, problema mai are un punct: Să se afle sfera care are tangente comune, de lungime dată, cu patru sfere date (Nota Red. E.T.).

Dacă sferele de inversiune date sînt secante, operația care transformă pe F în F'' poate fi denumită o *rotație analagmatică* în raport cu cercul de intersecție.

938. Supunem o figură F unui număr oarecare de inversiuni succesive. Să se arate că obținem o figură, egală cu una dintre inversele lui F sau cu simetrica acestei inverse, pe care o putem deduce din F printr-o inversiune, urmată de una, două, trei sau patru simetrii (același caz de excepție ca la ex. 937).

939. Să se rezolve pentru două sfere problema 396.

940. Fie S', M' inversele unei sfere S și unui punct M în raport cu un pol de inversiune O, puterea de inversiune fiind μ; fie p puterea punctului M în raport cu sfera S, p' puterea lui M în raport cu sfera S'; avem

$$\frac{p'}{p} = \frac{\mu^2}{P \cdot OM^2},$$

P fiind puterea punctului O în raport cu S.

(Dacă dreapta OMM' taie cele două sfere, puterile se vor lua după această dreaptă. Dacă nu, se va aplica exercițiul 939 sferei S și unei sfere foarte mici de centru M.)

Se numește *putere redusă* a punctului M în raport cu sfera S cîtul puterii p prin diametrul $2R$ al sferei. Să se arate că puterea redusă a lui M' în raport cu S' este cu puterea redusă a lui M față de S într-un raport care nu depinde de sfere, ci numai de inversiunea dată (adică de punctul O și de puterea μ), precum și de poziția punctului M.

Ce se întîmplă cu puterea redusă a unui punct în raport cu o sferă, dacă sfera este înlocuită printr-un plan P? (Se va căuta limita puterii reduse, cînd facem să crească nemărginit raza sferei, fără ca aceasta să înceteze de a fi tangentă la planul P într-un punct determinat.)

941. Prin ce inversiune regiunea interioară a unei sfere determinate S se transformă în regiunea interioară a sferei S', transformata lui S?

942. Există o infinitate de cercuri care taie o sferă dată sub un unghi drept și care intersectează un cerc dat în două puncte și sub un unghi drept. Raportul anarmonic al celor patru puncte de intersecție este același pe fiecare dintre cercuri.

943. Un cerc și o sferă oarecare se pot transforma, printr-o aceeași inversiune, fie într-o dreaptă și într-un plan, fie într-un cerc și într-un plan paralel cu planul cercului.

944. Fiind date două figuri, formate fiecare dintr-o sferă și dintr-un cerc, condiția necesară și suficientă pentru ca să putem transforma prin inversiune una dintre aceste figuri într-o alta egală cu a doua este, dacă sfera și cercul sînt secante, ca unghiul lor să fie același în ambele figuri. În toate cazurile, condiția este ca raportul anarmonic menționat la exercițiul 942 să fie același în ambele figuri.

945. Să se afle locul geometric al polilor inversiunilor care transformă două sau trei sfere date în sfere egale.

946. Să se afle locul geometric al polilor inversiunilor care transformă două cercuri date de pe o aceeași sferă în două cercuri egale.

Scanned with OKEN Scanner

947. Fiind dat un cerc pe o sferă, să se găsească locul geometric al polilor inversiunilor în care transformata sferei date să aibă ca cerc mare transformatul cercului dat; sau, mai general, în care conul de rotație avînd ca bază cercul transformat și ca vîrf centrul sferei transformate să aibă o deschidere dată.

Să se afle locul geometric al vîrfurilor conurilor avînd ca bază un cerc dat de pe o sferă dată și care taie această sferă după un al doilea cerc de rază dată.

948. Să se afle locul geometric al polilor inversiunilor care schimbă două puncte ale unei sfere în două puncte diametral opuse pe sfera transformată.

949. Să se afle locul geometric al polilor inversiunilor în care un cerc dat și un punct dat pe o sferă au respectiv ca omolog un cerc și unul dintre polii săi pe sfera transformată.

950. Fiind date două cercuri situate pe o aceeași sferă, să se afle locul geometric al polilor inversiunilor prin care transformatele acestor două cercuri au planele paralele.

951. În ce caz, unul dintre conurile care trec prin două cercuri date ale unei sfere devine un cilindru? Cînd devin ambele conuri cilindri?

952. Transformăm o figură sferică prin două inversiuni (sferice) succesive. Să se găsească o proiecție stereografică, astfel încît figura inițială și cea transformată să se proiecteze după două figuri omotetice sau după două figuri egale.

953. Fiind date două figuri sferice inverse, care este locul geometric al punctului de vedere al unei proiecții stereografice, astfel ca aceste două figuri să se proiecteze după două figuri plane, simetrice în raport cu o dreaptă?

954. O sferă fiind proiectată stereografic pe un plan, care este, în spațiu, locul geometric al polilor inversiunilor în care două figuri sferice inverse în raport cu aceste puncte dau ca proiecții două figuri plane, simetrice în raport cu o dreaptă?

955. În aceleași condiții, care este locul geometric al polilor inversiunilor în care cele două figuri sferice inverse în raport cu aceste puncte dau în proiecție două figuri plane inverse în raport cu un pol dat (puterea inversiunii fiind variabilă)?

956. Să se transforme prin inversiune următoarea teoremă: *toate tangentele duse dintr-un punct la o sferă formează unghiuri egale cu diametrul care trece prin punctul considerat.*

957. O tangentă comună, arbitrară, la două sfere este împărțită în două părți egale de planul radical. Să se transforme prin inversiune.

958. Considerăm toate sferele tangente (cu contacte de aceeași speță) la două sfere secante date; prin punctele de contact ale fiecăreia dintre ele și printr-un punct fix A al cercului de intersecție, descriem un cerc. Să se arate că toate aceste cercuri sînt tangente.

959. Trei sfere se intersectează două cîte două după trei cercuri C, C', C''. Să se arate că există o infinitate de sfere S, tangente la C, C', C''[1]) și că aceste sfere sînt tangente la trei sfere fixe.

---

[1]) În ediția rusă, ceea ce urmează este înlocuit prin: Aceste sfere S pot fi împărțite, în general, în patru familii, care au următoarea proprietate: există trei sfere tangente la toate sferele aceleiași familii. Să se indice excepția pe care o admite ultima propoziție. (Nota Red. E.T.).

Dacă, prin cele trei puncte de contact ale fiecărei sfere S cu C, C', C'' și printr-un punct comun acestor trei cercuri (admițînd că există), vom duce o sferă Σ, toate aceste sfere vor fi tangente.

960. Să se transforme prin inversiune exercițiile 479—483.

Să se dea enunțului dedus din exercițiul 479 o formă astfel încît el să păstreze un sens și să rămînă exact, chiar dacă sferele în care sînt transformate fețele triedrului sînt înlocuite prin altele, nesecante două cîte două (se vor considera sferele care le intersectează pe acestea sub unghiuri egale); să se dea enunțului dedus din exercițiul 480 o formă în care el să păstreze un sens și să rămînă adevărat, chiar dacă sferele considerate sînt înlocuite prin altele, secante două cîte două după cercurile C_1, C_2, C_3 însă fără puncte comune la toate trei. (Se vor considera sferele care taie sub unghiuri egale cercurile C_1, C_2, C_3).

Să se deducă, de asemenea, aceste două enunțuri din exercițiile 945 și 946[1]).

961. O figură sferică F este proiectată stereografic pe două plane diametrale diferite. Să se arate că, dacă rabatem prima dintre proiecții F' pe planul celeilalte F'', făcînd-o să se rotească în jurul diametrului comun celor două plane (într-un sens convenabil), noua poziție a lui F' este inversa lui F''. Care este polul de inversiune?

962. Fiind date două cercuri mici pe o sferă, cercul mare care unește două puncte arbitrare ale primului și cercul mare care unește antiomoloagele lor respective pe al doilea se intersectează pe cercul mare radical.

963. Să se extindă la geometria sferică exercițiile 260, 261, 262 (fără pct. 3°).

Să se arate că locul geometric (**688**) al conjugatelor armonice ale punctului B în raport cu arcele determinate de un cerc dat pe cercurile care trec prin punctele A și B nu este altul decît cercul APQ, analog cu cel considerat la exercițiul 262 și că, tot astfel, locul geometric al conjugatelor armonice ale punctului A în raport cu aceleași arce este cercul analog BPQ.

Să se arate că aceste două cercuri se taie sub un unghi egal cu unghiul format de cercurile tangente la cercul dat, duse prin punctele A și B.

În cazul cînd A coincide cu B, cercul APQ este ortogonal la cercul dat.

964. Să se transforme, prin proiecție stereografică, teorema de la nr. **211**. Să se deducă de aici o construcție a cercurilor tangente la un cerc dat de pe sferă și duse prin două puncte date.

965. Să se transforme tot astfel (compară cu nr. **688**) următoarele teoreme:

---

[1]) În ediția rusă, problema are următorul enunț: Să se transforme prin inversiune propozițiile referitoare la triedre din exercițiile 479—483.

Să se dea propozițiilor deduse din exercițiile 479 bis și 480 o formă în care să-și păstreze sensul și să rămînă valabile și în cazul cînd sferele în care se transformă fețele triedrelor se înlocuiesc prin sfere secante două cîte două; propozițiilor deduse din exercițiile 479, 481 bis și 482, 1° să li se dea o formă în care să-și păstreze sensul și să rămînă valabile chiar în cazul cînd sferele despre care este vorba se înlocuiesc prin sfere nesecante.

Să se demonstreze cu ajutorul propoziției din exercițiul 945 una dintre propozițiile corespunzătoare propoziției din exercițiul 479 (Nota Red. E.T.).

Scanned with OKEN Scanner

Două paralele determină pe două drepte care trec printr-un acelaşi punct segmente proporţionale. Două paralele sînt împărţite în segmente proporţionale de secante duse printr-un acelaşi punct.

965 *bis*. Fiind date două puncte A şi B şi un cerc pe o aceeaşi sferă sau într-un acelaşi plan, să se ducă prin A şi B un al doilea cerc, pe care primul să determine un raport anarmonic dat; — sau încă, pe care primul să intercepteze un raport anarmonic maxim sau minim.

966. Dacă, prin două puncte fixe A, B ale unei sfere ducem un cerc variabil care taie un cerc fix C de pe această sferă în două puncte P, Q atunci cîtul $(AP \cdot AQ) : (BP \cdot BQ)$ este constant. Punctul A fiind dat, la fel ca şi cercul C, să se afle locul geometric al punctului B, pentru ca acest cît să aibă o valoare dată.

966 *bis*. Mai general, să se transforme prin inversiune (în spaţiu) următoarea teoremă: pq fiind o coardă într-un cerc, iar θ unghiul format de ea cu cercul, cantitatea $pq/\sin\theta$ este aceeaşi pentru toate coardele.

967. (Reciproca unuia dintre enunţurile de la nr. **688**): Dacă un cerc C de pe o sferă este împărţit armonic de alte două cercuri A, B, atunci prin punctele de intersecţie ale lui A şi ale lui C trece un cerc ortogonal la B şi la C.

968. Dacă şase puncte A, B, C, a, b, c de pe o sferă au proprietatea că cercurile Abc, Bca, Cab trec printr-un acelaşi punct, atunci şi cercurile aBC, bCA, cAB sînt de asemenea concurente (se reduce la ex. 344).

969. Raportul anarmonic a patru puncte în care două cercuri din plan intersectează un al treilea cerc, ortogonal la ambele, este independent de poziţia acestui al treilea cerc, precum şi de poziţia primelor două, cu condiţia ca invariantul lor (ex. 396) să rămînă constant.

(Dacă primele două cercuri sînt secante sub un unghi α, raportul anarmonic considerat este egal cu $-\operatorname{tg}^2 \alpha/2$). Să se extindă la două sfere sau la o sferă şi la un cerc.

970. Ce obţinem prin proiecţie sterebgrafică din exerciţiul 65?

970 *bis*. Se dau, pe o sferă, trei cercuri secante două cîte două în A, A'; B, B'; C, C'. Să se arate, cu ajutorul exerciţiului 970, că dacă prin B' şi prin C' ducem un cerc arbitrar Γ, care taie $ACA'C'$ în Q_1 şi $ABA'B'$ în R_1, cercurile $A'B'Q_1$ şi $A'C'R_1$ intersectează cercul $BCB'C'$ în două noi puncte $P'P''$, astfel că cercurile $A'Q_1R_1$, $A'P'P''$ au în A' o aceeaşi tangentă fixă, oricare ar fi Γ.

Să se ducă prin B', C'; C', A'; A', B' respectiv trei cercuri $B'C'QR$, $C'A'RP$, $A'B'PQ$, astfel încît punctul P, comun ultimelor două, să fie situat pe cercul $BCB'C'$, punctul Q, comun primului şi celui de-al treilea să fie situat pe $CAC'A'$, iar punctul R, comun primelor două, să fie situat pe $ABA'B'$ (revine la a determina pe Γ, astfel ca P' să coincidă cu P'').

Cercul $B'C'RQ$ formează unghiuri egale cu cercurile $B'C'BC$, $B'C'A$.

Cercurile $AA'P$, $BB'Q$, $CC'R$ se taie în aceleaşi două puncte[1]).

Cercurile $A'BP$, $A'CP$ intersectează sub unghiuri egale cercul $BCB'C'$[2]).

(De exemplu, vom putea proiecta stereografic, luînd pe A' ca punct de vedere).

[1]) În ediţia rusă, cele trei cercuri *au axa radicală comună* (Nota Red E.T.).

[2]) În ediţia rusă lipseşte această propoziţie (Nota Red. E.T.).

971. Să se rezolve pe sferă exercițiile 256, 402, 402 *bis*.

972. Dacă problema pusă la exercițiul 692 este nedeterminată, diversele poziții ale cercului căutat sînt situate pe o aceeași sferă. Să se afle locul geometric al vîrfurilor conurilor circumscrise acestei sfere după aceste cercuri. Aceeași problemă pentru exercițiul 693. Aceeași problemă pentru exercițiul 694.

973. Într-un plan P se dă un cerc c și se presupune că sfera pentru care c este un cerc mare se proiectează stereografic pe planul P (punctul de vedere fiind una dintre extremitățile diametrului perpendicular pe P). În aceste condiții, cînd va fi cercul trasat în P proiecția unui cerc mare al sferei? În ce condiții două puncte vor fi proiecțiile a două puncte diametral opuse?

973 *bis*. Datele fiind aceleași ca la exercițiul 973, să se realizeze, în proiecție stereografică[1]), următoarele construcții:

1° Să se ducă un cerc mare prin două puncte date.

2° Să se afle distanța sferică dintre două puncte date.

3° Să se descrie cercul avînd ca pol un punct dat și trecînd printr-un alt punct dat; — sau avînd polul într-un punct dat și raza sferică egală cu un arc dat al cercului c.

4° Să se descrie cercul mare care este locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date.

De asemenea, să se realizeze, în proiecție stereografică, celelalte construcții indicate la exercițiul 489.

974. Pe o sferă solidă se dau un punct V și un punct A al cercului mare C, al cărui pol este V; pe un plan, un cerc c, de aceeași rază ca și sfera și un punct a pe acest cerc, și se consideră o figură plană egală cu proiecția stereografică a sferei, efectuată din punctul de vedere V, cercul c corespunzînd cercului mare C, punctul a punctului A și un sens dat pe c sensului direct pe cercul C (văzut din V). Să se determine pe sferă (cu ajutorul unor construcții plane și sferice) punctul M, care corespunde unui punct m din planul dat și invers.

975. Să se găsească efectiv (prin construcții plane și sferice) cele două inversiuni care transformă unul în celălalt două cercuri date pe o sferă solidă. Se vor determina două perechi de puncte omoloage în fiecare inversiune, precum și cercurile de inversiune, dacă există, și punctele în care această sferă este tăiată de dreapta ce unește vîrfurile celor două conuri care pot fi duse prin cele două cercuri. Să se realizeze această din urmă construcție în proiecție stereografică.

976. Fiind date trei cercuri pe o sferă, să se construiască *efectiv* (prin construcții sferice și plane) cercul despre care este vorba la exercițiul 492.

977. Să se realizeze aceeași construcție în proiecție stereografică[1]).

978. Să se rezolve pe sferă exercițiul 112 (locul geometric al punctului de contact a două cercuri care variază, rămînînd tangente între ele și tangente fiecare la un cerc fix într-un punct fix).

---

[1]) *A duce, în proiecție stereografică, un cerc mare prin două puncte date* înseamnă: *fiind date proiecțiile stereografice a două puncte și cercul mare situat în planul tabloului, să se construiască proiecția stereografică a cercului mare care trece prin aceste două puncte*, și tot astfel pentru problemele următoare. Toate aceste probleme trebuie rezolvate *efectiv*, cu ajutorul unor construcții plane.

979. Două sfere, tangente fiecare la un plan fix, într-un punct fix, sînt tot timpul tangente între ele. Să se afle locul geometric al punctului de contact (se reduce la ex. 978, punctul căutat fiind situat pe o sferă fixă).

979 *bis*. O sferă variabilă, tangentă la o dreaptă fixă, într-un punct fix, este tangentă şi la o sferă dată. Să se afle locul geometric al punctului de contact.

980. Două cercuri, tangente fiecare la o dreaptă fixă din spaţiu într-un punct fix, variază, rămînînd mereu tangente între ele. Să se afle locul geometric al punctului de contact. (Sfera care conţine cele două cercuri este în general fixă).

981. Dacă o dreaptă întîlneşte reciproca unei alte drepte în raport cu o sferă, atunci, şi invers, aceasta din urmă intersectează reciproca celei dintîi (**669**).

Să se arate că această situaţie mutuală este aceea a dreptelor AB, AC, dacă cercurile de contact ale conurilor circumscrise sferei şi avînd vîrfurile A, B, C sînt astfel, că primul este împărţit armonic de celelalte două [1]).

982. Dacă punctul a variază pe sfera A, punctul a', considerat la nr. **684** *bis*, descrie pe aceeaşi sferă o figură inversă celei descrise de a (se vor considera omoteticele punctelor b şi c pe sfera A şi se vor aplica exerciţiul 936 şi nr. **689**) [2]).

983. Dacă două cercuri C, C' sînt astfel că putem duce prin C o sferă ortogonală la C', atunci, reciproc, putem duce prin C', o sferă ortogonală la C.

Cazul cînd prin unul dintre aceste cercuri trece o infinitate de sfere ortogonale la celălalt. Să se arate că, atunci, un patrulater strîmb avînd două vîrfuri opuse pe C şi două pe C' are proprietatea că produsul a două laturi opuse este egal cu produsul celorlalte două.

984. Singurele sfere care se păstrează printr-o transpoziţie analagmatică în raport cu un cerc dat c, adică (v. ex. 937) printr-un sistem de două inversiuni în raport cu sfere ortogonale după c, sînt: 1° sferele care trec prin c; 2° sferele ortogonale la c. (Se demonstrează, transformînd pe c într-o dreaptă.)

984 *bis*. Să se determine (prin aceeaşi metodă) cercurile care se păstrează printr-o transpoziţie analagmatică în raport cu un cerc c dat. Acestea sînt: 1° cercul c însuşi; 2° cercurile ortogonale (ex. 983) la orice sferă trecînd prin c; 3° cercurile secante la c în două puncte, sub un unghi drept.

985. Oricărui punct P din spaţiu îi corespunde un punct P', astfel că, prin punctele P şi P' trece o infinitate de cercuri ortogonale în două puncte la un cerc dat C. Punctul P' se obţine din P printr-o transpoziţie analagmatică în raport cu C.

---

[1]) În ediţia rusă, problema are următorul enunţ: dacă o dreaptă taie reciproca unei alte drepte în raport cu o sferă dată, sau este paralelă cu aceasta, atunci şi invers, aceasta din urmă intersectează reciproca celei dintîi sau este paralelă cu ea (să se demonstreze, folosind nr. **669**).

Dacă două drepte care se bucură de această proprietate sînt concurente şi nu au puncte comune cu o sferă dată, atunci aceste drepte pot fi considerate ca două drepte AB şi AC care au proprietatea că conurile circumscrise, cu vîrfurile în punctele A, B şi C, sînt tangente la sferă după trei cercuri, dintre care primul este împărţit armonic de celelalte două (Nota Red. E.T.).

[2]) În ediţia rusă, a fost scoasă indicaţia din paranteză (Nota Red. E.T.).

Scanned with OKEN Scanner

985. *bis.* Să se găsească un cerc tangent la un cerc dat și care taie ortogonal, în două puncte, un alt cerc dat.

986. Două conuri de rotație, circumscrise la aceeași sferă, se intersectează după două curbe plane (se deduce din nr. **683**, prin polare reciproce).

986 *bis.* Să se demonstreze aceeași teoremă pe baza nr. **691** (se vor considera cercurile de bază ale conurilor circumscrise sferei și având ca vîrfuri punctele curbelor de intersecție căutate).

987. *Cerc imaginar.* Vom conveni să spunem (compară cu ex. 921) că s-a definit un *cerc imaginar*, dacă s-au dat două sfere (sau un plan și o sferă) fără punct comun real[1]), cu clauza că este indiferent dacă se înlocuiesc sferele considerate prin două oarecare dintre sferele S având cu primele același plan radical P, acest plan fiind denumit *planul cercului*, iar punctul în care el este înțepat de linia centrelor sferelor S, *centrul* cercului. În particular, această clauză ne permite să definim cercul prin planul P și printr-un punct s, anume unul dintre punctele limită ale familiei de sfere S; sau încă, prin două puncte (cele două puncte limită). Vom spune că o sferă oarecare dintre sferele S *trece prin cercul imaginar*.

Puterea unui punct m din planul P în raport cu cercul va fi puterea acestui punct în raport cu o sferă S, adică ms^2. *Axa radicală* a două cercuri (reale sau imaginare) din același plan va fi locul geometric al punctelor care au aceeași putere în raport cu cele două cercuri. O sferă ortogonală la toate sferele S se numește *ortogonală* la cercul imaginar. Un cerc real din planul P se va numi *ortogonal* la cercul imaginar, dacă el este cerc mare al unei sfere ortogonale la toate sferele S. Mai general, un cerc situat pe una dintre sferele S se zice *ortogonal* la cercul imaginar, dacă putem duce prin el o sferă ortogonală la toate sferele S. *Polara* unui punct m din planul P în raport cu cercul este omotetica axei radicale a punctului m și a cercului, centrul fiind m și raportul de omotetie 2. Două puncte m, n sînt *conjugate* în raport cu un cerc imaginar, dacă polara lui m trece prin n, caz în care vom arăta că polara lui n trece prin m. Două puncte din planul P se numesc *inverse* în raport cu cercul imaginar, dacă orice cerc trecînd prin aceste puncte este ortogonal la cercul imaginar.

Inversul unui cerc imaginar în raport cu un pol dat și pentru o putere dată este cercul imaginar obținut, înlocuind sferele S prin inversele lor pentru același pol și aceeași putere.

În aceste condiții, propunem să se extindă la cercurile imaginare un număr de proprietăți ale cercurilor reale, cum ar fi următoarele:

1° Puterea unui punct din plan în raport cu un cerc din acest plan și pătratul distanței acestui punct la centrul cercului au o diferență constantă.

2° Două puncte a, b, conjugate în raport cu un cerc imaginar, sînt conjugate armonic în raport cu cele două puncte imaginare conjugate (ex. 922) în care acest cerc este intersectat de dreapta ab.

3° Două puncte inverse în raport cu un cerc imaginar se obțin unul din celălalt printr-o inversiune, având ca pol centrul cercului.

---

[1]) Trebuie adăugat totuși că există categorii de cercuri imaginare mai generale, de care nu ne ocupăm aici și față de care cel definit în text este doar un caz particular.

4° Axele radicale a trei cercuri, luate două cîte două, sînt concurente.[1])

5° Într-un plan, cercurile ortogonale la două cercuri fixe au aceleași puncte comune (*punctele limită*).

6° La două cercuri ortogonale[2]) de pe o sferă corespund prin inversiune două cercuri ortogonale.

7° Dacă două cercuri de pe o sferă sînt ortogonale[2]) planele lor sînt conjugate în raport cu sfera.

8° Orice cerc de pe o sferă, ortogonal la două cercuri fixe de pe această sferă, este ortogonal la o infinitate de alte cercuri fixe.

988. Un cerc imaginar $\mathcal{S}$ fiind definit prin planul său P și printr-un punct exterior s (considerat ca sferă de rază nulă), condiția necesară și suficientă pentru ca două puncte a, b din P să fie conjugate în raport cu $\mathcal{S}$ este ca sa și sb să fie perpendiculare[3]). Polara punctului a în raport cu $\mathcal{S}$ este urma pe P a planului dus prin s, perpendicular pe sa.

CAPITOLUL IV

ARIILE POLIGOANELOR SFERICE

989. În sistemul de unități adoptat mai sus aria oricărui poligon sferic convex are ca măsură diferența dintre 2π și perimetrul poligonului polar al primului.

990. Să se afle (în metri pătrați) aria triunghiului sferic ale cărui unghiuri sînt 1 dr, 60° și 45°, acest triunghi fiind trasat pe o sferă cu raza de 10 m.

991. Să se deducă teorema lui Lexell din exercițiul 493.

992. A, B, C fiind trei puncte de pe sferă, să se afle locul geometric al punctelor M, astfel ca triunghiurile sferice MAB, MAC *presupuse ca avînd aceeași orientare* să fie echivalente.

993. Să se împartă un triunghi în 2^p părți echivalente prin cercuri mari, duse printr-un vîrf A sau printr-un punct oarecare situat pe o latură.

În primul caz, dacă se ia punctul diametral opus vîrfului dat A ca centru al unei proiecții stereografice, proiecția laturii opuse lui A este împărțită de proiecțiile vîrfurilor triunghiurilor parțiale în părți egale.

994. Să se găsească, în interiorul unui triunghi sferic un punct, astfel încît cercurile mari care îl unesc cu cele trei vîrfuri să împartă aria triunghiului în trei părți, dintre care două echivalente, iar a treia egală cu dublul lor.

995. Să se afle, pe un cerc dat, un punct, astfel încît arcele de cerc mare care îl unesc cu două puncte date de pe acest cerc să formeze între ele un unghi dat.

---

[1]) *sau paralele*, în ediția rusă (Nota Red. E.T.).

[2]) Se va extinde propoziția enunțată la două cercuri ortogonale, dintre care unul este real, iar celălalt, imaginar. Două cercuri ortogonale nu pot fi simultan imaginare.

[3]) Sensul este: „În planul radical P a două sfere S, S_1, care nu au puncte comune, punctele conjugate în raport cu S (sau cu S_1) sînt cele care se văd dintr-un punct limită s sub un unghi drept".

996. Să se construiască un triunghi sferic, cunoscînd:

Un unghi, o înălțime și aria;

O latură, o înălțime și aria.

997. Maximul și minimul ariei unui triunghi sferic din care cunoaștem o latură sau un unghi și înălțimea corespunzătoare.

998. Să se construiască un triunghi sferic isoscel, din care se dau latura și aria. Să se construiască un triunghi sferic isoscel de latură dată, avînd aria maximă.

999. Să se arate că arcele de cerc mare duse prin vîrfurile unui triunghi sferic ABC și care împart fiecare aria triunghiului în două părți echivalente nu sînt altele decît arcele AP, BQ, CR, considerate la exercițiul 970 *bis* (cercurile date fiind laturile triunghiului).

1000. Să se calculeze aria unei porțiuni de sferă mărginită de cercuri oarecare.

(Vom începe prin a calcula partea de fus sferic cuprinsă într-o calotă oarecare avînd ca poli vîrfurile fusului. Vom deduce de aici măsura porțiunii de sferă cuprinsă între un arc de cerc mare și un arc de cerc mic avînd aceleași extremități. Apoi vom raționa ca la nr. **263**).

CAPITOLUL V

TEOREMA LUI EULER. POLIEDRE REGULATE

1001. Toate poligoanele plane convexe au aceeași conexiune (se va demonstra întîi această proprietate pentru triunghiuri, apoi, cu ajutorul rezultatului obținut, se va arăta că putem trece, fără a schimba conexiunea, de la un poligon oarecare la un poligon avînd cu o latură mai puțin (compară cu nr. **265**).

(De altfel, teorema este valabilă și pentru poligoanele concave).

1002. Ordinul de conexiune al unei porțiuni oarecare din aria unui poliedru este de aceeași paritate ca și numărul contururilor sale (exemplu: aria reprezentată în fig. 344 are două contururi și este de conexiune dublă).

De observat că orice secțiune mărește sau micșorează cu o unitate numărul contururilor.

În particular, dacă suprimăm o față oarecare a unui poliedru care satisface condițiile de la nr. **698**, obținem întotdeauna o suprafață poliedrală avînd ordinul de conexiune impar.

1003. În orice poliedru, avem

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots,$$

notînd cu A numărul de muchii, cu $F_3, F_4, F_5, \ldots$ numărul de fețe triunghiulare, patrulatere, pentagonale,..., iar cu $S_3, S_4, S_5, \ldots$, numărul de unghiuri poliedre cu trei, patru, cinci,... fețe (compară cu **715** *bis*.).

1004. În orice poliedru de gen zero, avem (în notațiile de la nr. **705**)

$$6F - 12 \geqslant 2A \geqslant 3F \geqslant A + 6,$$
$$6S - 12 \geqslant 2A \geqslant 3S \geqslant A + 6.$$

(pentru acest exercițiu și pentru cele următoare, se va folosi ex. 1003).

1005. Un poliedru de gen zero are cel puțin o față triunghiulară sau cel puțin un unghi triedru.

Numărul de fețe triunghiulare adunat cu numărul de unghiuri triedre dă un total cel puțin egal cu opt.

1006. Într-un poliedru de gen zero, este imposibil ca toate fețele să aibă mai mult de cinci laturi, și este imposibil ca toate unghiurile poliedre să aibă mai mult de cinci fețe.

1007. Nu există poliedru de gen zero care să aibă exact șapte muchii (ex. 1004).

1008. Un poliedru de gen zero are exact cinci fețe. Ce valori pot avea numărul de vîrfuri și numărul de muchii?

1009. Un poliedru de gen zero care nu are nici o față triunghiulară și nici o față patrulateră, are cel puțin 12 fețe pentagonale și 20 de unghiuri triedre. Enunțul analog pentru un poliedru neavînd nici un unghi triedru și nici un unghi tetraedru.

Un poliedru de gen zero care nu are nici o față patrulateră și nici o față pentagonală are cel puțin patru fețe triunghiulare.

1010. Suma unghiurilor tuturor fețelor unui poliedru de gen zero este dublul sumei unghiurilor unui poligon plan convex avînd același număr de vîrfuri.

1011. Dacă un punct a este situat de aceeași parte ca și centrul sferei directoare S în raport cu un plan P, atunci polul lui P se află de aceeași parte ca și centrul sferei S în raport cu planul polar al lui a.

Să se tragă de aici concluzia că un poliedru convex are ca polar reciproc, în raport cu o sferă al cărei centru este un punct interior poliedrului, un poliedru convex avînd ca vîrfuri polii fețelor primului poliedru, ca fețe planele polare ale vîrfurilor acestuia și ca muchii reciprocele muchiilor primului poliedru.

Punctele interioare noului poliedru corespund planelor în întregime exterioare ale poliedrului inițial, și invers.

1012. Să se arate că teorema lui Euler pentru poliedrele convexe se deduce din teorema care dă aria unui poligon sferic (se va efectua o perspectivă pe o sferă, avînd ca centru un punct interior poliedrului).

Ce obținem, dacă exprimăm aria triunghiului sferic ABC (fig. 362) în funcție de unghiuri?

1013. Dacă un punct variază în interiorul unui poliedru regulat, suma distanțelor sale la fețe rămîne constantă.

1014. Prelungind patru fețe, alese în mod convenabil, ale unui octaedru regulat, formăm un tetraedru regulat; putem forma astfel două tetraedre cu fețele unui octaedru dat.

1015. Există cinci cuburi avînd fiecare vîrfurile comune cu ale unui dodecaedru regulat dat. Fiecare muchie a unuia dintre aceste cuburi este

diagonala uneia dintre fețele dodecaedrului. Fiecare vîrf al dodecaedrului aparține la două dintre cuburile considerate.

1015 *bis.* Invers, fiind dat un cub, să marcăm pe fiecare muchie sensul care merge de la vîrful aparținînd primului dintre tetraedrele regulate pe care le putem înscrie în cub la un vîrf al celui de-al doilea tetraedru; apoi ducem prin această muchie un plan care formează, în exteriorul poliedrului, un unghi ascuțit α determinat cu fața cubului, situată în stînga muchiei considerate, în raport cu sensul stabilit pe această muchie.

Cele 12 plane duse în acest fel formează cele 12 fețe ale unui poliedru numit *dodecaedru pentagonal*[1]). Să se arate că, pentru o valoare anumită a lui α, dodecaedrul pentagonal este un dodecaedru regulat.

Dacă unim un vîrf al dodecaedrului regulat, care nu aparține cubului dat, cu centrul feței celei mai apropiate a cubului, și cu vîrful cel mai apropiat al acestei fețe, cele două drepte unind aceste puncte vor forma cu fața cubului, prima un unghi de 45°, iar a doua, un unghi de 30°.

Să se construiască, în baza acestei duble observații, proiecția dodecaedrului regulat pe un plan paralel cu o față a cubului înscris.

1016. Cu fețele unui icosaedru regulat, alese în mod corespunzător și prelungite, putem forma cinci octaedre regulate.

Invers, fiind dat un octaedru regulat, să fixăm pe fiecare muchie sensul în raport cu care fața aparținînd primului dintre cele două tetraedre pe care le putem forma cu fețele octaedrului (ex. 1014) să apară în stînga; apoi împărțim această muchie într-un raport determinat, segmentul cel mai mare precedîndu-l pe celălalt, dacă parcurgem muchia în sensul fixat. Să se arate că, pentru o anumită valoare a raportului de diviziune, punctele de diviziune sînt vîrfurile unui icosaedru regulat. Să se afle această valoare.

1016 *bis.* Rotațiile pe care le admite dodecaedrul pentagonal (ex. 1015 bis), dacă nu este regulat, sînt aceleași cu cele pe care le admite tetraedrul înscris în cub.

În schimb, simetriile în raport cu centrul și cu planul sînt acelea dintre simetriile cubului care *nu* aparțin tetraedrului[2]).

1017. Să se calculeze raza sferei tangente la toate muchiile pentru fiecare tip de poliedru regulat.

1017 *bis.* Să se calculeze volumele diferitelor poliedre regulate înscrise în sfera de rază R.

Volumele a două poliedre regulate conjugate, înscrise în aceeași sferă, sînt în același raport ca razele sferelor dintre care una este tangentă la toate muchiile primului poliedru, iar a doua, la toate muchiile celuilalt.

1018. Rotațiile binare ale tetraedrului (împreună cu deplasarea identică) formează ele singure un grup, care este un subgrup invariant (**712** *bis*) al grupului rotațiilor tetraedrului (v. nr. **417**, Obs.).

---

[1]) Dodecaedrul pentagonal este forma sub care se prezintă în natură unele minerale (*pirita*).

[2]) Această mulțime de rotații și de simetrii caracterizează, în cristalografie, simetria cubică hemiedrică.

Bineînțeles, se lasă de o parte cazul cînd dodecaedrul pentagonal devine un dodecaedru regulat și cînd apar simetrii în plus.

Scanned with OKEN Scanner

Acest subgrup este, totodată, un subgrup invariant al grupului de rotații al cubului.

1018 *bis*. Rotațiile binare ale tetraedrului efectuează asupra celor patru vîrfuri ale sale aceleași schimbări de ordine, care, aplicate la patru puncte coliniare, nu le modifică raportul anarmonic.

1019. Combinînd în mod convenabil rotațiile de ordinul al doilea ale cubului, putem reproduce toate deplasările pe care le admite acest poliedru.

Putem ajunge la același rezultat, luînd ca punct de plecare numai rotațiile de ordinul al patrulea, nu însă numai rotațiile de ordinul al treilea.

Grupul tetraedrului și grupul considerat la exercițiul 1018 sînt singurele subgrupuri invariante ale grupului cubului. Al doilea este singurul subgrup invariant al grupului tetraedrului.

1019 *bis*. Putem obține întregul grup al dodecaedrului, pornind numai de la rotațiile binare, sau numai de la cele ternare, sau numai de la cele de ordinul al cincilea (în ultimele două cazuri, este suficient să obținem prin combinarea unor rotații de ordinul al treilea sau a unor rotații de ordinul al cincilea, o rotație binară).

Să se deducă de aici că grupul dodecaedrului nu conține nici un subgrup invariant[1]).

1020. Paralelipipedul cel mai general care admite o axă de simetrie de ordinul al treilea este romboedrul (**390** *bis*).

Acest poliedru poate fi tăiat de un plan după un hexagon regulat.

1021. Să se deducă, din observațiile de la nr. **712**, calculul dimensiunilor poliedrelor regulate.

(Se vor lua drept puncte α, β mijloacele a două muchii vecine dintr-o aceeași față).

Să se compare rezultatele la care conduce aplicarea acestei metode la un poliedru și la reciprocul său.

Să se arate că, λ fiind numărul de laturi al poligonului regulat avînd ca vîrfuri consecutive pe α și pe β, iar ca centru centrul sferei circumscrise poliedrului, m și n fiind numerele considerate în text (**715**), avem

$$(c_\lambda/2)^2 = (c_m/2)^2 - a_n^2 = (a_n/2)^2 - a_m^2.$$

Pentru dodecaedru și pentru icosaedru, avem astfel relațiile date la exercițiile 181, 182; pentru cub și octaedru, relațiile analoge se referă la hexagon, la pătrat și la triunghiul echilateral.

Avem apoi $\dfrac{R}{(c_m/2)\,(c_n/2)} = \dfrac{r}{a_m a_n} = \dfrac{\rho}{\frac{1}{2}c_\lambda}$, iar muchiile celor două poliedre sînt respectiv $2Rc_\lambda/c_n$, $2Rc_\lambda/c_m$.

---

[1]) Pentru motive despre care nu putem da aici nici cea mai mică idee și care își au originea în lucrările lui Galois (v. nr. **793**, nota 2), această propoziție și, în general, noțiunea de subgrup invariant joacă un rol fundamental în algebră (deci și în studiul problemelor care formează obiectul Notei E). Datorită lor, raționînd despre cele cinci cuburi de la exercițiul 1015, putem demonstra imposibilitatea de a rezolva prin radicali ecuația generală de gradul al cincilea.

1021 *bis*. Diedrul V, cuprins între două fețe vecine ale unui poliedru regulat, este dat de formula

$$\sin \frac{V}{2} = \frac{a_n}{\frac{1}{2} c_m}.$$

$V/2$ este un unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic ale cărui laturi au ca măsură a_n, $\frac{1}{2} c_\lambda$ (ex. 1021), $\frac{1}{2} c_m$.

1022. Fiind dat un poliedru regulat P, considerăm una oarecare dintre muchiile sale A; construim o prismă având muchiile paralele cu A și ca bază[1]) un triunghi echilateral având centrul pe A, unul dintre planele de simetrie ale prismei trecînd prin centrul poliedrului. Procedăm la fel cu toate muchiile, astfel ca prismele obținute să fie egale și așezate la fel. Mărginim prisma construită în jurul fiecărei muchii la intersecțiile ei cu prismele analoge corespunzătoare muchiilor vecine și presupunem că prismele (astfel mărginite) construite în jurul unor muchii neconsecutive nu au puncte comune.

Fie Q poliedrul format de mulțimea tuturor prismelor de mai sus (după ce fețele poliedrului inițial P au fost înlăturate). Să se afle (P fiind, pe rînd, fiecare dintre cele cinci poliedre regulate) ordinul de conexiune al suprafeței obținute, dacă îndepărtăm o față a lui Q. Să se determine acest ordin 1° cu ajutorul teoremei generalizate a lui Euler (**706**), 2° direct[2]).

Ordinul astfel obținut ar fi oare modificat, dacă prismele ar fi fost poligonale și nu triunghiulare?

---

[1]) *secțiune dreaptă*, în ediția rusă (Nota Red. E.T.).
[2]) Acest punct și ceea ce urmează nu există în ediția rusă (Nota Red. E.T.).

SOLUȚIILE EXERCIȚIILOR ȘI ALE PROBLEMELOR

CARTEA A CINCEA

PLANUL ȘI DREAPTA

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL I

423. Să presupunem că nu se află toate dreptele în același plan. În acest caz, vom alege trei dintre ele, a, b și c, nesituate în același plan. Deoarece dreapta c taie celelalte două drepte și nu se află în planul lor, înseamnă că ea trece prin punctul lor de intersecție. Orice dreaptă următoare l intersectează toate trei dreptele a, b, și c. Dacă una dintre ele n-ar trece prin punctul lor comun, dreptele a, b și c ar fi situate în același plan (**323**). Prin urmare, dreapta l trece prin punctul comun al dreptelor a, b și c. Așadar, dacă toate dreptele date nu sînt situate în același plan, ele sînt toate concurente.

424. Dreapta care trece prin punctul dat A și intersectează dreapta dată b este situată în planul β, care trece prin punctul A și prin dreapta b; acest plan poate fi construit[1]). În mod analog, dreapta căutată este situată și în planul γ, care trece prin punctul A și prin cealaltă dreaptă dată c. Linia de intersecție a planelor β și γ (aceste plane nu pot fi paralele, deoarece au un punct comun A, și nu pot să coincidă, deoarece, prin ipoteză, dreptele date nu sînt situate în același plan) va fi tocmai dreapta căutată, dacă aceasta există; nu este însă exclusă posibilitatea ca linia de intersecție să fie paralelă cu dreapta b sau cu dreapta c[2]), și atunci nu avem soluție.

În cazul în care dreptele date b și c sînt situate în același plan, construcția indicată rămîne valabilă, dacă punctul A este exterior acestui plan (în aceste condiții, soluția este evidentă, dacă dreptele date sînt concurente; problema n-are soluție dacă dreptele sînt paralele, deoarece o dreaptă care taie două drepte paralele se află în același plan cu ele). Dacă însă punctul A se află în același plan cu dreptele date, problema este nedeterminată.

Fie acum a, b, și c cele trei drepte date, care nu sînt situate două cîte două în același plan. Repetînd construcția precedentă pentru fiecare punct A al dreptei a, vom obține o infinitate de drepte care taie dreptele a, b și c (se poate demonstra că nu există decît un singur punct al dreptei a pentru care dreapta construită va fi paralelă cu dreapta b și un singur

---

[1]) Potrivit observației de la sfîrșitul problemelor la Cartea a cincea putem duce un plan prin trei puncte date. Ducînd un plan prin punctul A și prin două puncte ale dreptei b, vom obține planul β.

[2]) Dacă linia de intersecție ar fi paralelă atît cu dreapta b cît și cu dreapta c, atunci dreptele b și c ar fi paralele și, de aceea, s-ar situa în același plan (**328**).

Scanned with OKEN Scanner

punct al dreptei a pentru care dreapta construită va fi paralelă cu dreapta c; compară cu ex. 429).

Dacă două dintre dreptele noastre, să zicem b și c, ar fi concurente, iar dreapta a nu ar fi în planul lor, atunci condiția problemei — de a intersecta cele trei drepte date — ar fi satisfăcută de dreptele care unesc punctul de intersecție al dreptelor b și c cu diversele puncte ale dreptei a, precum și de dreptele situate în planul dreptelor b și c și care trec prin punctul de intersecție al acestui plan cu dreapta a (aceste drepte din urmă există numai cu condiția ca dreapta a să intersecteze planul dreptelor b și c).

Dacă două dintre dreptele date, b și c, sînt paralele și dreapta a înțeapă planul lor, atunci dreptele căutate se situează în planul dreptelor b și c și trec prin punctul de intersecție al acestuia cu dreapta a. Dacă dreptele b și c sînt paralele, iar dreapta a este paralelă cu planul lor, atunci nu există drepte care să taie toate cele trei drepte date.

Soluția este evidentă, dacă cele trei drepte considerate sînt situate în același plan sau sînt concurente (sau și una și cealaltă concomitent).

425. 1° Deoarece dreptele BC și $B'C'$ sînt concurente prin ipoteză, punctele B, C, B' și C' se află în același plan; la fel punctele C, A, C', A' și respectiv A, B, A', B'. Dat fiind că aceste trei plane se taie două cîte două după dreptele AA', BB' și CC', reiese că ori cele trei plane trec prin același punct, anume punctul de concurență al acestor trei drepte, ori cele trei plane nu au nici un punct comun, și deci cele trei drepte sînt paralele.

2° Cele trei puncte în care laturile se taie două cîte două se situează pe dreapta de intersecție a planelor ABC și $A'B'C'$.

426. 1° Să presupunem că dreptele care unesc punctul M cu punctele A, B și C înțeapă planul P în vîrfurile triunghiului $A'B'C'$, omotetic cu un triunghi $A_0B_0C_0$ dat. Latura $B'C'$ a triunghiului căutat este paralelă cu B_0C_0 (în virtutea omotetiei celor două triunghiuri); totodată, ea este situată în același plan cu dreapta BC și, de aceea, trece prin punctul de intersecție al dreptei BC cu planul P (dacă această dreaptă înțeapă planul). Prin aceste date, dreapta $B'C'$ este perfect determinată.

Așadar, prin punctele de intersecție ale laturilor triunghiului dat ABC cu planul P ducem drepte, respectiv paralele cu laturile triunghiului $A_0B_0C_0$. Aceste drepte determină triunghiul $A'B'C'$. Deoarece laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ se intersectează două cîte două, rezultă că dreptele AA', BB' și CC' sînt, sau concurente în punctul M căutat, sau paralele (ex. 425, 1°). În acest din urmă caz, problema nu are soluții.

Dacă dreapta BC este paralelă cu planul P, problema are o infinitate de soluții (dacă BC este paralelă cu B_0C_0; compară cu nr. **329**) sau nu are de loc soluții (dacă BC nu este paralelă cu B_0C_0).

2° Să presupunem acum că dreptele care unesc punctul M cu punctele A, B și C taie planul P în vîrfurile triunghiului $A'B'C'$, egal cu un triunghi $A_0B_0C_0$ dat și avînd același sens de rotație. La fel ca mai sus, laturile $B'C'$, $C'A'$ și $A'B'$ ale triunghiului căutat trec prin punctele de intersecție D, E și F ale dreptelor BC, CA și AB cu planul P; problema se reduce astfel la următoarea problemă de geometrie plană: *prin trei puncte coliniare date D, E și F, să se ducă dreptele care formează un triunghi egal cu un triunghi dat și avînd același sens de rotație.* Vîrful B' al triunghiului căutat aparține

unui cerc, locul geometric al punctelor din care segmentul DF se vede sub un unghi egal cu unghiul B_0 al triunghiului $A_0B_0C_0$ și avînd același sens de rotație, sau sub unghiul suplementar. Tot astfel, vîrful C' aparține altui cerc, anume locul geometric al punctelor din care segmentul DE se vede sub un unghi egal cu unghiul C_0 și avînd același sens de rotație, sau sub unghiul suplementar. Ne mai rămîne acum *să ducem prin punctul comun D al celor două cercuri construite o secantă, astfel ca segmentul $B'C'$, cuprins între celelalte două puncte de intersecție ale ei cu aceste cercuri, să fie egal cu segmentul dat B_0C_0* (fig. 1). Coborînd din centrele O_1 și O_2 ale celor două cercuri perpendicularele O_1B'' și O_2C'' pe secanta căutată și ducînd segmentul O_2K, paralel cu secanta căutată, vedem că putem construi un triunghi dreptunghic O_1O_2K, avînd ca ipotenuză pe O_1O_2 și o catetă $O_2K = B''C'' = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}B_0C_0$. Secanta căutată este paralelă cu O_2K.

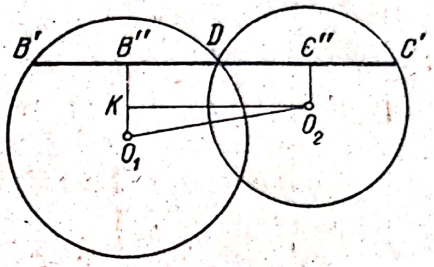


Fig. 1

Construcția se simplifică, dacă una dintre laturile triunghiului ABC, să zicem BC, este paralelă cu planul P. În acest caz, latura $B'C'$ va fi de asemenea paralelă cu BC (**329**); sîntem conduși astfel la următoarea problemă de geometrie plană: *să se construiască un triunghi $A'B'C'$, egal cu un triunghi dat, știind că dreapta $B'C'$ este paralelă cu o dreaptă dată, iar dreptele $A'C'$ și $A'B'$ trec respectiv prin punctele E și F.* Problema se rezolvă imediat, deoarece direcțiile dreptelor $A'C'$ și $A'B'$ se determină cu ușurință.

În mod analog, se determină triunghiul $A'B'C'$, egal cu triunghiul $A_0B_0C_0$, dar avînd sensul de rotație opus.

426 *bis*. Deoarece dreptele $B\beta$ și $C\gamma$ sînt concurente, dreapta $\beta\gamma$ trece prin punctul de intersecție al dreptei BC cu planul P; în mod analog, ne convingem că aceeași dreaptă trece prin punctul de intersecție al dreptei $B'C'$ cu planul P. Aceste două puncte determină poziția dreptei $\beta\gamma$; tot așa sînt determinate pozițiile dreptelor $\gamma\alpha$ și $\alpha\beta$.

Dacă dreapta BC este paralelă cu planul P, atunci dreapta $\beta\gamma$ trece prin punctul de intersecție al dreptei $B'C'$ cu planul P și este paralelă cu BC.

427. Teorema se generalizează astfel: *dacă unim un punct arbitrar din spațiu cu toate vîrfurile unui poligon arbitrar* (plan sau strîmb), *atunci suma segmentelor obținute va fi mai mare decît semiperimetrul.* Demonstrația dată în soluția exercițiului 8 *bis* se extinde ușor la cazul de față.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL II

428. Dacă două oarecare dintre dreptele date se află în același plan, atunci toate dreptele pot să fie, în primul rînd, paralele sau situate în același plan.

Dacă nu are loc nici una dintre cele două situații, atunci putem alege, printre dreptele date, două drepte concurente a și b și o a treia dreaptă c,

nesituată în același plan cu ele. Dreptele a, b și c sînt situate două cîte două în trei plane și aceste trei plane trec prin punctul de intersecție al dreptelor a și b, deci dreapta c va trece prin același punct. Așadar, cele trei drepte a, b și c nu sînt conținute în același plan, dar sînt concurente. Fiecare dreaptă următoare d se află în același plan cu fiecare dintre dreptele a, b și c. Toate aceste plane trec prin punctul de intersecție al dreptelor a, b și c, deci și dreapta lor de intersecție, adică dreapta d, trece prin același punct.

În definitiv, putem spune că, dacă un anumit număr de drepte se bucură de proprietatea că două oarecare dintre ele sînt conținute în același plan, sînt posibile următoarele trei cazuri: 1) toate dreptele sînt concurente; 2) toate dreptele sînt paralele; 3) toate dreptele se află în același plan. Bineînțeles, condițiile (1) și (3) sau (2) și (3) pot fi satisfăcute simultan.

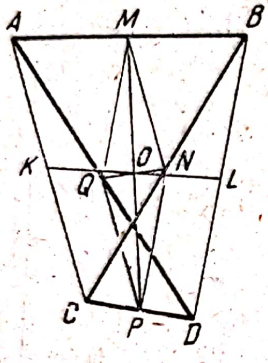


Fig. 2

429. Fie de dus o dreaptă a, paralelă cu o dreaptă dată l și intersectînd două drepte date b și c.

Dat fiind că dreapta căutată intersectează dreapta b și este paralelă cu l, ea se află în planul β, care trece prin dreapta b și este paralel cu dreapta l (sau o conține); analog, dreapta căutată este în planul γ, care trece prin dreapta c și este paralel cu dreapta l (sau o conține).

Dacă planele β și γ sînt secante, atunci intersecția lor va fi, evident, dreapta a căutată (bineînțeles, dacă această dreaptă de intersecție nu coincide cu l). Dacă însă planele β și γ sînt paralele, problema nu are soluție.

430. Fie M, N, P, Q și K, L respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA și ale diagonalelor AC, BD în patrulaterul strîmb $ABCD$ (fig. 2). Segmentul MN care unește mijloacele a două dintre laturile triunghiului ABC este paralel cu AC și egal cu $\frac{1}{2}AC$. Din aceeași cauză, segmentul PQ este paralel cu AC și egal cu $\frac{1}{2}AC$. Patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram (compară cu soluția ex. 36).

Segmentele MP și NQ se taie în două părți egale în punctul lor de intersecție O, ca diagonale ale paralelogramului $MNPQ$. Segmentul KN (nereprezentat în figură), care unește mijloacele a două laturi în triunghiul ABC, este paralel cu AB și egal cu $\frac{1}{2}AB$; analog, segmentul LQ (de asemenea nereprezentat în figură) este paralel cu AB și egal cu $\frac{1}{2}AB$. Prin urmare, $KNLQ$ este un paralelogram, iar segmentul KL trece prin mijlocul O al segmentului NQ, ca diagonală a noului paralelogram, și este împărțit în două părți egale de acest punct.

Dacă punctele A, B și C sînt fixe, iar punctul D descrie un plan dat, atunci mijlocul L al segmentului BD descrie de asemenea un plan (v. ex. 431). În consecință, mijlocul O al segmentului KL va descrie de asemenea un plan.

Scanned with OKEN Scanner

Tot-astfel, dacă punctul D descrie o dreaptă d, mijlocul L al segmentului BD descrie în planul care trece prin punctul B și prin dreapta d, o dreaptă l, omotetică cu d în raport cu centrul de asemănare B, iar mijlocul O al segmentului KL o dreaptă omotetică cu l în raport cu centrul de asemănare K.

431. Dacă dreptele ABC și $A'B'C'$ sînt situate în același plan, atunci dreptele AA', BB' și CC' sînt paralele. Dacă vom duce prin dreapta AA' un plan arbitrar α (distinct de planul ABA'), atunci planele paralele cu planul α și trecînd unul prin punctul B, iar celălalt prin punctul C, vor trece respectiv prin BB' și CC' (**330** *bis*).

Dacă dreptele ABC și $A'B'C'$ nu se află în același plan, atunci nici dreptele AA' și BB' nu sînt situate în același plan, și putem duce prin ele o pereche de plane paralele. Planul, care trece prin punctul C și este paralel cu aceste două plane, taie dreapta $A'B'$ în punctul C'', pentru care avem $AB : AC = A'B' : A'C''$ (**336**). Prin ipoteză însă, avem $AB : AC = A'B' : A'C'$. Prin urmare, punctul C'' coincide cu C', și ultimul plan trece prin CC'.

432. Fie A și M două puncte ale dreptei D; A' și M' două puncte ale dreptei D'; A'' și M'' punctele care împart (ambele interior sau ambele exterior) segmentele AA' și MM' într-un raport dat (fig. 3). Potrivit exercițiului 431, punctele A'' și M'' se află într-un plan paralel atît cu dreapta D, cît și cu dreapta D'. Dacă punctele M și M' se deplasează în mod arbitrar pe dreptele D și D', atunci punctul M'' se deplasează în planul δ, care trece prin punctul A'' și este paralel cu dreptele D și D'. Reciproc, prin orice punct M'' al planului δ, putem duce (ex. 424) o dreaptă care intersectează atît dreapta D, cît și dreapta D'. Conform cu nr. **336**, vom avea pentru punctele de intersecție M și M' relația $AA' : AA'' = MM' : MM''$

Așadar, locul geometric al punctelor M'' este planul δ.

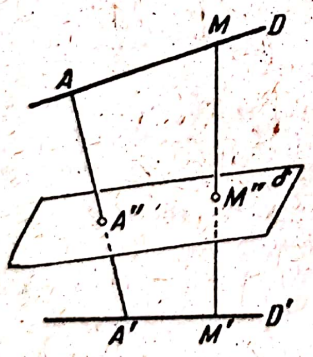


Fig. 3

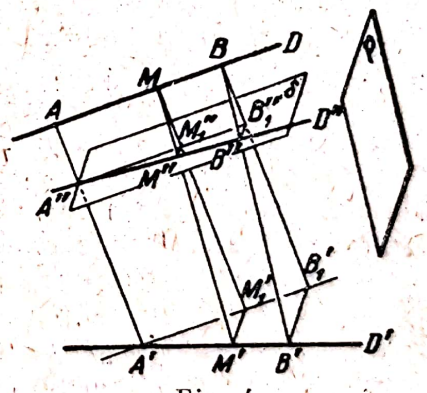


Fig. 4

432 *bis*. Fie A, B și M trei puncte ale dreptei D; A', B' și M' trei puncte ale dreptei D', astfel ca dreptele AA', BB' și MM' să fie paralele cu un plan dat P; A'', B'' și M'' punctele care împart segmentele AA', BB' și MM' într-un raport dat (toate trei interior sau toate trei exterior) (fig. 4). În baza exercițiului 432, punctele B'' și M'' se află în planul δ, care trece prin punctul A'' și este paralel cu dreptele D și D'.

Să ducem prin dreapta D' un plan paralel cu dreapta D și să notăm cu B_1' și cu M_1' punctele lui de intersecție cu dreptele care trec prin punctele B și M și sînt paralele cu dreapta AA'. Fie, mai departe, B_1'' și M_1'' punctele de intersecție ale dreptelor BB_1' și MM_1' cu planul δ. Planul $BB'B_1'$ este paralel cu planul P, deoarece dreptele BB' și BB_1' sînt paralele cu acest plan. De aici rezultă că dreptele $B'B_1'$, $M'M_1'$, $B''B_1''$ și $M''M_1''$ sînt paralele. În virtutea paralelismului acestor drepte, avem $B''B_1'' : B'B_1' = BB_1'' : BB_1'$ și $M''M_1'' : M'M_1' = MM_1'' : MM_1'$. Însă $BB_1'' = MM_1''$ și $BB_1' = MM_1'$, astfel că $B''B_1'' : B'B_1' = M''M_1'' : M'M_1'$. De aici avem $M''M_1'' : B''B_1'' = M'M_1' : B'B_1' = A'M_1' : A'B_1' = A''M_1'' : A''B_1''$. Din egalitatea $M''M_1'' : B''B_1'' = A''M_1'' : A''B_1''$ și din paralelismul dreptelor $M''M_1''$ și $B''B_1''$ rezultă că triunghiurile $A''M''M_1''$ și $A''B''B_1''$ sînt asemenea și deci punctele A'', B'' și M'' sînt coliniare. Dacă punctele M și M' se deplasează pe dreptele D și D', punctul M'' descrie dreapta $A''B''$.

Variind mărimea raportului $AA' : AA''$, vom căpăta o infinitate de drepte analoge cu $A''B''$, pe care le taie dreapta MM' în deplasarea ei.

433. Fie D, D', D'' dreptele date; A, A', A''; B, B', B'' și M, M', M'' punctele lor de intersecție cu cele trei secante AA', BB' și MM' (fig. 4). Deoarece dreptele D, D' și D'' sînt paralele cu același plan, înseamnă că, prin dreptele D' și D'', putem duce plane paralele cu dreapta D și, totodată, paralele între ele. Fie B_1', B_1'', M_1' și M_1'' punctele de intersecție ale acestor plane cu dreptele care trec prin punctele B și M și sînt paralele cu AA'. Dreapta $B''B_1''$ fiind paralelă cu $B'B_1'$, iar dreapta $M''M_1''$ paralelă cu $M'M_1'$, avem $BB' : BB'' = BB_1'' : BB_1' = AA' : AA''$ și $MM' : MM'' = MM_1' : MM_1'' = AA' : AA''$. Așadar, $AA' : AA'' = BB' : BB'' = MM' : MM'' = \ldots$.

Să ducem acum prin punctul M o dreaptă care taie dreapta D' și este paralelă cu planul $BB'B_1'$. Conform exercițiului 432 *bis*, această dreaptă va tăia planul $A''B''B_1''$ într-un punct al dreptei D'' și va coincide, de aceea, cu dreapta MM' (prin punctul M trece o singură dreaptă care taie ambele drepte D' și D''). Așadar, dreapta MM' rămîne paralelă cu planul $BB'B_1'$, cînd punctul M se deplasează.

434. Să presupunem că punctul M se îndepărtează la infinit pe dreapta D, în sensul AB (notațiile sînt aceleași ca în soluțiile exercițiilor 432 *bis* și 433; fig. 4). În acest caz, latura $MM_1' = AA'$ a triunghiului $MM_1'M'$ și unghiul $MM_1'M'$ al aceluiași triunghi își păstrează valoarea constantă, pe cînd latura $M_1'M'$ crește nemărginit [deoarece $M_1'M' = A'M_1' \cdot (B_1'B' : A'B_1') = AM \cdot (B_1'B' : A'B_1')$]. De aici rezultă că unghiul $MM'M_1'$ tinde către zero, iar dreapta MM' tinde să devină paralelă cu dreapta $B_1'B'$.

Același lucru se va întîmpla dacă punctul M se va îndepărta la infinit în sensul contrar lui AB.

435. Fie D, D' și D'' cele trei drepte date. Locul geometric al punctelor care împart într-un raport dat segmentele avînd extremitățile pe dreptele D și D' este un plan δ (ex. 432). Dreapta căutată trece, evident, prin punctul de intersecție al dreptei D'' cu planul δ și intersectează dreptele D și D'. Poziția dreptei căutate se determină cum se arată în soluția exercițiului 424.

436. Dacă segmentele determinate pe dreapta mobilă de dreptele D și D' și de planul dat α își păstrează raportul constant, atunci punctele de

intersecție ale dreptei mobile cu planul α se situează (ex. 432) într-un anumit plan δ, paralel cu dreptele D și D' și, de aceea, distinct de α. Așadar, dreapta mobilă intersectează cele trei drepte date (D, D' și dreapta de intersecție a planelor δ și α), paralele cu același plan și rămîne, din această cauză, paralelă cu celălalt plan (ex. 433).

437. Fie $ABCD$ patrulaterul strîmb dat (fig. 5), iar K, L, M și N punctele luate pe laturile sale, astfel ca

$$KA : KB = LD : LC \qquad (1)$$

și

$$MB : MC = NA : ND. \qquad (2)$$

Prin punctele A și C, ducem dreptele AD' și CD', respectiv paralele cu BC și cu BA, iar prin punctele L și N dreptele LL' și NN', paralele cu DD'. În sfîrșit, prin punctul de intersecție P' al dreptelor KL' și MN', ducem dreapta $P'P$, paralelă cu $D'D$. Această dreaptă taie într-un punct P segmentul KL, deoarece ea se află în planul KLL', și într-un punct $\overline{P}$ (nereprezentat în figură) segmentul MN, deoarece se găsește și în planul MNN'. Dacă vom demonstra că punctul $\overline{P}$ coincide cu P, vom arăta astfel că dreptele KL și MN se întîlnesc.

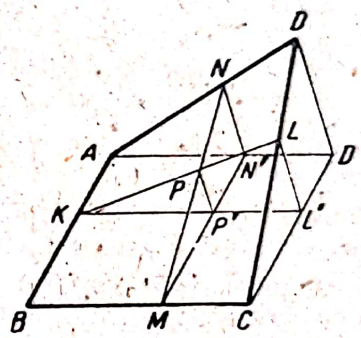


Fig. 5

Dat fiind că dreptele $N'N$ și $D'D$ sînt paralele, avem $N'A : N'D' = NA : ND$, iar conform condiției (2), $N'A : N'D' = MB : MC$. Așadar, segmentele egale AD' și BC sînt împărțite de dreapta MN' în același raport. Prin urmare, $AN' = BM$, astfel că dreapta MN' este paralelă cu laturile AB și CD' ale paralelogramului $ABCD'$. În același mod arătăm că dreapta KL' este paralelă cu celelalte două laturi ale aceluiași paralelogram.

Din asemănarea triunghiurilor $KP'P$ și $KL'L$, precum și a triunghiurilor $CL'L$ și $CD'D$, găsim că $P'P = L'L \cdot (KP' : KL')$; $L'L = D'D \cdot (CL' : CD')$, de unde $P'P = D'D \cdot (CL' : CD') \cdot (KP' : KL')$. În același mod, prin asemănarea triunghiurilor $MP'\overline{P}$ și $MN'N$, precum și a triunghiurilor $AN'N$ și $AD'D$, găsim $P'\overline{P} = D'D \cdot (AN' : AD') \cdot (MP' : MN')$. Expresiile găsite pentru segmentele $P'P$ și $P'\overline{P}$ arată că punctele P și $\overline{P}$ coincid, deoarece $CL' = MP'$, $CD' = MN'$, $KP' = AN'$ și $KL' = AD'$.

Mai departe, avem relațiile evidente $PK : PL = P'K : P'L' = MB : MC$ și $PM : PN = P'M : P'N'$, astfel că segmentele KL și MN sînt împărțite în același raport ca și laturile patrulaterului.

438. Fie D și D' dreptele date (fig. 6), AA' segmentul căutat, P planul dat, B și C punctele de intersecție ale dreptelor D și D' cu planul P.

Să ducem prin punctul căutat A' o paralelă la dreapta D și să notăm cu B' punctul ei de intersecție cu planul P. Planul care trece prin dreptele paralele AB și $A'B'$ va tăia planul P după dreapta BB', paralelă cu AA'; deci $BB' = AA'$.

Pentru a determina poziția punctului B' în planul P, este suficient să determinăm în acest plan dreapta $B'C$ și să construim punctele ei de inter-

secție cu cercul de centru B și de rază dată. Evident, dreapta $B'C$ poate fi construită, ducînd dreapta KK', paralelă la D, nu prin punctul A', ci printr-un punct oarecare K al dreptei D'.

Astfel, ajungem la următoarea construcție. Printr-un punct arbitrar K al dreptei D', ducem dreapta KK', paralelă la D. Mai departe, unim printr-o dreaptă punctul C cu punctul K', în care dreapta KK' înțeapă planul P. Punctul de intersecție al acestei drepte cu cercul, avînd ca centru punctul B și ca rază segmentul dat, va fi tocmai punctul B'. Ducînd prin acesta o paralelă la D, obținem punctul A', unul dintre capetele segmentului căutat. Ducînd prin punctul A' o paralelă la BB', aflăm punctul A.

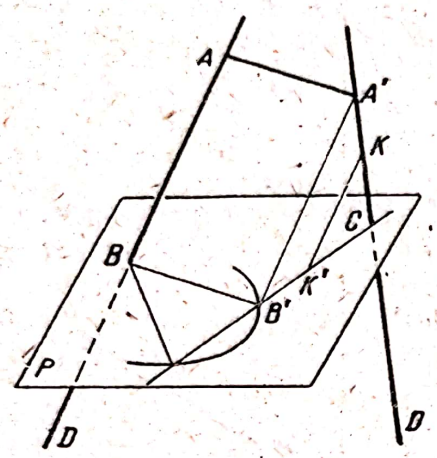


Fig. 6

Problema are două soluții, dacă cercul pe care-l folosim are două puncte de intersecție cu dreapta CK', o singură soluție, dacă este tangent la această dreaptă, și nici una, dacă cercul și dreapta nu au puncte comune.

Am presupus implicit că ambele drepte date taie planul P și nu sînt situate în același plan. În alte cazuri, problema se rezolvă mai simplu și poate deveni nedeterminată.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL III

439. Ducem, prin punctul dat, un plan P perpendicular pe dreapta dată. Intersecția acestui plan cu planul dat va fi dreapta căutată, întrucît orice dreaptă din planul P este perpendiculară pe dreapta noastră.

440. Deoarece locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele A și B este planul perpendicular pe segmentul AB prin mijlocul acestuia, iar locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele B și C este planul perpendicular pe segmentul BC prin mijlocul acestuia, rezultă că locul geometric căutat va fi dreapta de intersecție a acestor două plane.

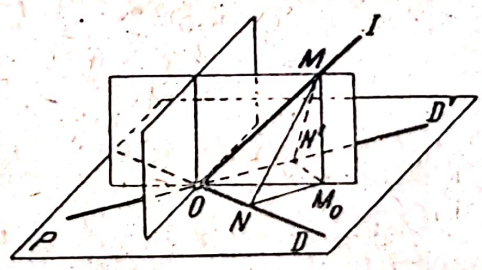


Fig. 7

441. *Prima soluție.* Să presupunem că avem de aflat locul geometric al punctelor M, egal depărtate de două drepte date D și D', care se intersectează într-un punct O și sînt situate deci, în același plan P.

Dacă distanțele MN și MN' ale unui punct M la dreptele D și D' (fig. 7) sînt egale, atunci, unind punctul M cu punctul O, obținem două triunghiuri dreptunghice egale MON și MON', din care deducem că unghiurile MON și MON' trebuie să fie egale. Reciproc, dacă $\widehat{MON} = \widehat{MON'}$,

atunci avem și $MN = MN'$. Așadar, problema se reduce la găsirea locului geometric al dreptei OM, care formează unghiuri egale cu dreptele D și D'.

Această problemă a fost studiată la nr. **346**. Din cele arătate acolo, reiese că locul geometric al punctelor M este ansamblul celor două plane care trec prin perpendiculara pe planul P în punctul O și respectiv prin cele două bisectoare ale unghiurilor formate de dreptele D și D'.

Raționamentul de mai sus este inaplicabil, dacă dreptele D și D' sînt paralele. În acest caz, ducem prin punctul M o dreaptă paralelă la dreptele D și D' (fig. 8) și intersectăm cele trei drepte în punctele M_1, N_1 și N_1' prin planul Q, perpendicular pe ele. Din dreptunghiurile MNN_1M_1 și $MN'N_1'M_1$, obținem $M_1N_1 = M_1N_1'$. De aceea, punctul M_1 se află în planul Q, pe perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului N_1N_1'. De aici rezultă că locul geometric al punctelor M este, în acest caz, planul pe care-l obținem ducînd prin toate punctele acestei perpendiculare drepte paralele cu dreptele D și D'.

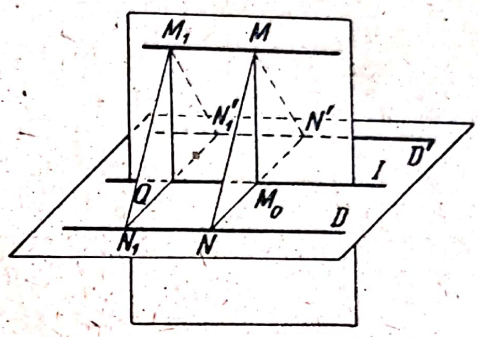


Fig. 8.

A doua soluție. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente D și D' se mai poate obține cu ajutorul teoremei celor trei perpendiculare (**363** *bis*). Dacă oblicele MN și MN' (fig. 7) sînt egale și MM_0 este perpendiculara coborîtă din punctul M pe planul P, în care sînt situate dreptele D și D', atunci și proiecțiile M_0N și M_0N' ale oblicelor sînt de asemenea egale. Întrucît dreptele MN și MN' sînt respectiv perpendiculare pe aceleași drepte D și D', proiecțiile lor M_0N și M_0N' sînt și ele perpendiculare pe aceste drepte. Prin urmare, proiecția M_0 a punctului M se află pe una dintre bisectoarele unghiurilor formate de dreptele D și D'. Ne dăm ușor seama că, și reciproc, dacă proiecția M_0 a punctului M se află pe una dintre aceste bisectoare, distanțele MN și MN' sînt egale. De aici rezultă că locul geometric al punctelor M este ansamblul celor două plane amintite la sfîrșitul primei soluții.

În cazul în care dreptele D și D' sînt paralele (fig. 8) proiecția M_0 a punctului M pe planul P, fiind egal depărtată de dreptele D și D', se găsește pe dreapta paralelă cu aceste două drepte și care împarte în două părți egale distanța dintre ele. De aici urmează că locul geometric al punctelor M este, în acest caz, planul care trece prin această din urmă dreaptă și prin perpendiculara ridicată pe planul P într-un punct arbitrar al acestei drepte.

Observație. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte date, nesituate în același plan, este tratat în exercițiul 454.

442. Pentru a găsi locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct dat O și formează unghiuri egale cu două drepte date D și D', nesituate în același plan, ducem prin O dreptele d și d', respectiv paralele la D

și la D'. Dreptele căutate formează unghiuri egale și cu dreptele d și d', conform definiției unghiului a două drepte arbitrare în spațiu.

Din teorema de la nr. **346** rezultă că locul geometric căutat este ansamblul celor două plane care trec prin perpendiculara ridicată în punctul O pe planul determinat de dreptele d și d' și respectiv prin bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte.

443. Să presupunem că, prin punctul O, trebuie dusă o dreaptă care să formeze unghiuri egale cu trei drepte date D, D' și D'', dispuse arbitrar în spațiu.

Locul geometric al dreptelor care trec prin punctul O și formează unghiuri egale cu dreptele D și D' este ansamblul a două plane P' și Q' (ex. 442). Analog, locul geometric al dreptelor care trec prin același punct și formează unghiuri egale cu dreptele D și D'' este ansamblul a două plane P'' și Q''. De aceea, dreapta căutată va fi dreapta de intersecție a unuia dintre planele P' sau Q' cu unul dintre planele P'' sau Q''. În cazul general, problema are patru soluții și devine nedeterminată, dacă unele dintre dreptele date sînt paralele.

444. Dacă o semidreaptă OX formează unghiuri egale cu semidreptele OA, OB și OC, situate într-un același plan P, atunci această semidreaptă este conținută, pe de o parte, în planul care trece prin perpendiculara pe planul P și prin bisectoarea unghiului AOB, iar pe de altă parte, în planul care trece prin aceeași perpendiculară și prin bisectoarea unghiului BOC. Deoarece dreapta este situată în două plane diferite care trec prin perpendiculara pe planul P în punctul O, ea coincide cu această perpendiculară.

446. Fie B și B_1 cele două puncte date, și trebuie să aflăm locul geometric al punctelor C pentru care $BC^2 - B_1C^2 = k = \text{const}$.

Ducem prin dreapta BB_1 un plan arbitrar. Locul geometric al punctelor C situate în acest plan este o dreaptă perpendiculară pe BB_1 și care trece prin punctul (unic) A al dreptei BB_1 pentru care $AB^2 - AB_1^2 = k$ (nr. **128** *bis*, Cor.). Prin urmare, locul geometric al punctelor C este planul care trece prin punctul A și este perpendicular pe dreapta BB_1.

447. Să demonstrăm propoziția enunțată în exercițiul 446, făcînd abstracție de proprietățile dreptei perpendiculare pe un plan.

Fie iarăși B și B_1 punctele date; se cere să aflăm locul geometric al punctelor C pentru care $BC^2 - B_1C^2 = k = \text{const}$.

La fel ca în soluția exercițiului 446, ne convingem că locul geometric căutat este format de dreptele perpendiculare pe dreapta BB_1 și care o intersectează într-un același punct A, și trebuie să arătăm că aceste drepte formează un plan. Dacă C și C' sînt două puncte arbitrare ale locului geometric căutat, iar C'' un punct oarecare al dreptei CC', avem, ținînd seama de valoarea absolută și de semn (cf. soluției ex. 218),

$$BC^2 \cdot C'C'' + BC'^2 \cdot C''C + BC''^2 \cdot CC' + CC' \cdot C'C'' \cdot C''C = 0,$$

$$B_1C^2 \cdot C'C'' + B_1C'^2 \cdot C''C + B_1C''^2 \cdot CC' + CC' \cdot C'C'' \cdot C''C = 0.$$

de unde

$$(BC^2 - B_1C^2) \cdot C'C'' + (BC'^2 - B_1C'^2) \cdot C''C + (BC''^2 - B_1C''^2) \cdot CC' = 0;$$

Deoarece, prin ipoteză, punctele C și C' aparțin locului geometric căutat, avem $BC^2 - B_1C^2 = BC'^2 - B_1C'^2 = k$; totodată, avem identitatea $C'C'' + C''C = C'C = -CC'$, astfel că egalitatea precedentă ia forma $BC''^2 - B_1C''^2 = k$. Așadar, locul geometric căutat are proprietatea că orice dreaptă care unește două dintre punctele sale aparține în întregime acestui loc geometric. De aici rezultă (**321** *bis*) că locul geometric al punctelor C este ori o dreaptă, ori un plan, ori este format din toate punctele spațiului. Însă locul geometric căutat conține trei puncte necoliniare; pe de altă parte, în spațiu există puncte care nu fac parte din el. În consecință, locul geometric căutat este un plan. Astfel, propoziția enunțată la exercițiul 446 este demonstrată.

Din însuși mersul demonstrației, reiese că locul geometric al dreptelor perpendiculare pe o dreaptă dată și care o intersectează într-un punct determinat este un plan. De aci obținem fără dificultate teorema fundamentală referitoare la o dreaptă perpendiculară pe două drepte situate în același plan și care trec prin punctul de intersecție al acestuia cu dreapta dată (compară cu nr. **341**).

448. Să presupunem că avem de aflat locul geometric al punctelor situate într-un plan dat P și care au raportul distanțelor la două puncte A și B, date în spațiu, egal cu raportul a două segmente date m și n.

Dacă un punct arbitrar M din spațiu satisface relația

$$MA : MB = m : n, \tag{1}$$

atunci planului care trece prin dreapta AB și prin punctul M i se poate aplica teorema (**116**) referitoare la locul geometric al punctelor din plan care au distanțele la două puncte date din acest plan într-un raport dat. Din această teoremă, rezultă că, dacă notăm cu C și cu D punctele care împart interior și exterior segmentul AB în raportul dat $m : n$, iar cu O mijlocul segmentului CD, punctul M va fi situat pe cercul de diametru CD. De aceea, pentru fiecare dintre punctele M care satisfac condiția (1), vom avea

$$OM = OC. \tag{2}$$

Reciproc, dacă un punct arbitrar M satisface egalitatea (2), acest punct M va îndeplini și condiția (1). Însă locul geometric al punctelor M din planul P care satisfac condiția (2) este un cerc, dacă segmentul OC este mai mare decît distanța punctului O la planul P, se reduce la un punct, dacă OC este egal cu această distanță, și nu există, dacă OC este mai mic decît această distanță.

449. Să presupunem că trebuie găsit locul geometric al punctelor M din planul P, care satisfac condiția

$$MA^2 + MB^2 = k = \text{const}, \tag{1}$$

unde A și B sînt puncte date.

Dacă M este un punct arbitrar din spațiu, iar D mijlocul segmentului AB, atunci putem aplica triunghiului MAB și medianei MD teorema referitoare la pătratul medianei (**128**). Așadar, obținem

$$MA^2 + MB^2 = 2MD^2 + \frac{1}{2}AB^2. \tag{2}$$

De aceea, orice punct din plan pentru care are loc egalitatea (1) satisface condiția

$$MD^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}AB^2. \qquad (3)$$

Reciproc, pentru orice punct din spațiu care satisface egalitatea (3), este îndeplinită și condiția (1), în virtutea relației (2).

Conform cu nr. **344**, locul geometric al punctelor M din planul P, care satisfac relația (3), este un cerc sau, în particular, un punct (dacă astfel de puncte există).

Așadar, locul geometric căutat este un cerc, dacă $k^2 > \frac{1}{2}AB^2$, iar segmentul $r = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ este mai mare decît distanța punctului D (mijlocul segmentului AB) la planul P. El se transformă într-un punct, dacă $k^2 > \frac{1}{2}AB^2$, iar segmentul r este egal cu distanța punctului D la planul P sau dacă, pentru $k^2 = \frac{1}{2}AB^2$, punctul D se află în planul P. În celelalte cazuri, locul geometric nu există.

450. Dacă segmentul AB se vede din punctul M sub un unghi drept, atunci mijlocul O al segmentului AB este egal depărtat de punctele A, B și M, astfel că $OM = \frac{1}{2}AB$. De aici rezultă, în virtutea nr. **344**, că locul geometric al punctelor M din planul P este un cerc sau, în particular, un punct (dacă în planul P există, în general, puncte avînd proprietatea căutată).

Dacă extremitatea B a segmentului AB se află în planul P, atunci diametrul cercului va fi segmentul care unește punctul B cu proiecția punctului A pe planul P.

451. Fie A un punct dat și C un cerc dat. Pentru cazul în care punctul A se află în planul cercului, punctul cel mai apropiat de A și punctul cel mai depărtat de A, dintre toate punctele situate pe cerc, sînt picioarele normalelor la cerc, care trec prin punctul A (**64**). Dacă punctul A nu se găsește în planul cercului C și dacă A_0 este proiecția lui A pe acest plan, atunci extremitățile segmentelor căutate vor fi punctul A și punctele cercului care sînt respectiv cel mai apropiat și cel mai depărtat de punctul A_0. Aceasta reiese din teorema referitoare la lungimea oblicelor duse la un plan din același punct (**344**).

452. Problema se rezolvă în mod analog cu problema plană corespunzătoare (ex. 13). Coborîm din unul dintre punctele date, să zicem din B, perpendiculara BB_0 pe planul dat și luăm pe prelungirea, dincolo de B_0, a segmentului BB_0 segmentul $B_0B' = BB_0$. Dat fiind că, pentru orice punct M din planul considerat avem $MB = MB'$ (deoarece dreptele MB_0 și BB' sînt perpendiculare și $BB_0 = B_0B'$), vom avea întotdeauna $AM + MB = AM + MB'$. Însă suma $AM + MB'$ este minimă, dacă punctul M se află chiar pe segmentul AB'. De aici rezultă că punctul căutat este punctul de intersecție al dreptei AB' cu planul dat.

Scanned with OKEN Scanner

453. Problema se rezolvă analog cu problema plană corespunzătoare (ex. 15). Coborîm din unul dintre punctele date, să zicem din B, perpendiculara BB_0 pe planul considerat și luăm pe prelungirea, dincolo de B_0 a segmentului BB_0, segmentul $B_0B' = BB_0$. La fel ca în soluția ex. 452, vom avea $MB = MB'$ și $AM - MB = AM - MB'$ pentru orice punct M din planul dat. Însă diferența $AM - MB'$ este maximă (anume, egală cu AB'), dacă punctul M se află chiar pe dreapta AB'. De aici urmează că punctul căutat este punctul de intersecție al dreptei AB' cu planul dat.

Problema n-are soluții, dacă punctele A și B sînt egal depărtate de acest plan, dar nu aparțin aceleiași perpendiculare pe plan.

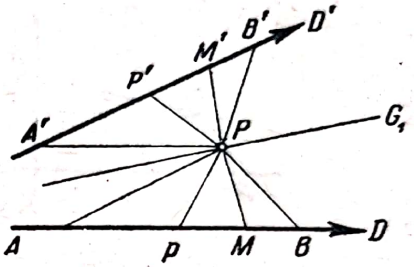


Fig. 9

454. Să presupunem că, pe fiecare dintre dreptele D și D', am ales un anumit sens, pe care-l vom numi *pozitiv*.

1° Luăm pe dreptele D și D' două segmente arbitrare, egale, $AB = A'B'$ (fig. 9), ambele în sens pozitiv sau ambele în sens negativ, și construim planele perpendiculare respectiv pe segmentele AA' și BB' și care trec prin mijloacele lor. Aceste două plane se vor intersecta după o dreaptă G_1, deoarece, altfel, segmentele AA' și BB' ar fi paralele, iar dreptele D și D' s-ar situa în același plan.

Orice punct P al dreptei G_1 satisface, în virtutea definiției acesteia, condițiile $PA = PA'$ și $PB = PB'$. Deoarece, în afară de aceasta, avem $AB = A'B'$, triunghiurile PAB și $PA'B'$ sînt egale. Dacă vom lua acum pe dreptele D și D' două segmente arbitrare egale $AM = A'M'$, ambele în sens pozitiv sau ambele în sens negativ, vom deduce ușor că triunghiurile PAM și $PA'M'$ sînt egale, de unde rezultă că și $PM = PM'$. Așadar, orice punct P al dreptei G_1 se află în planul perpendicular pe segmentul MM' prin mijlocul său. Cu alte cuvinte, toate planele obținute printr-o astfel de construcție vor trece prin dreapta G_1.

Obținem o a doua dreaptă G_2, analogă cu G_1, dacă luăm unul dintre segmentele egale AM și $A'M'$ în sens pozitiv, iar pe celălalt în sens negativ.

Orice punct P al dreptei G_1 este egal depărtat de dreptele D și D', deoarece înălțimile Pp și Pp' ale triunghiurilor egale PAB și $PA'B'$ sînt egale, același lucru fiind valabil și pentru toate punctele dreptei G_2.

2° Fie P unul dintre punctele dreptei G_1, construită la 1°; p și p' proiecțiile punctului P pe dreptele D și D'; Q un alt punct al dreptei G_1; q și q' proiecțiile lui pe dreptele D și D'. În virtutea egalității triunghiurilor PAB și $PA'B'$, avem $Ap = A'p'$ și, analog, $Aq = A'q'$, de unde $pq = p'q'$.

Lungimile segmentelor PQ și pq determină unghiul dintre dreptele G_1 și D. În adevăr, dacă prin dreapta Qq ducem un plan perpendicular pe dreapta D, iar din punctul P coborîm pe acest plan perpendiculara Pq_0, atunci $pq = Pq_0$ (fig. 10), iar unghiul dintre dreptele G_1 și D va fi determinat ca unghi ascuțit QPq_0 al triunghiului dreptunghic PQq_0. Aplicînd același raționament dreptelor G_1 și D', ajungem la concluzia că dreapta G_1 formează unghiuri egale cu sensurile pozitive ale dreptelor D și D', deoarece $pq = p'q'$.

Ducem acum printr-un punct arbitrar O din spațiu (fig. 11), razele d și d', al căror sens coincide cu sensurile pozitive ale dreptelor D și D', și dreapta g_1, paralelă cu G_1. Dreapta g_1 formează unghiuri egale cu razele d și d' și, de aceea, ea se află (**346**) în planul γ_1, care trece prin bisectoarea unghiului dOd' și este perpendicular pe planul acestui unghi. Prin urmare, orice dreaptă G_1 este paralelă cu acest plan.

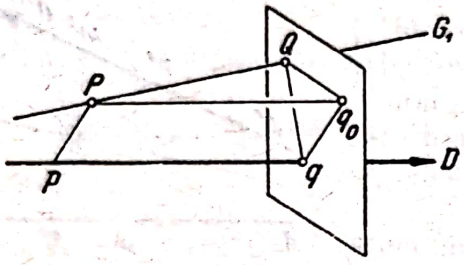


Fig. 10

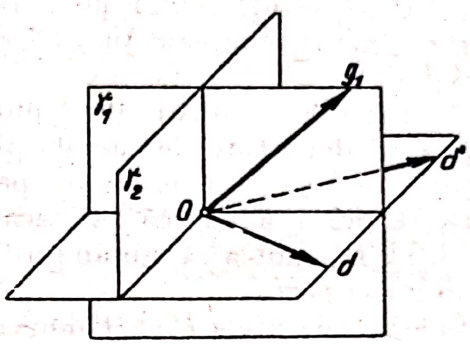


Fig. 11

În mod analog vom demonstra că orice dreaptă G_2 este paralelă cu un alt plan γ_2, perpendicular atît pe planul γ_1, cît și pe planul dOd'. În aceste condiții, una dintre razele d și d' va fi înlocuită prin prelungirea ei dincolo de punctul O.

Deoarece planele γ_1 și γ_2 sînt determinate independent de alegerea punctelor A și A', toate dreptele G_1 sînt paralele cu planul γ_1, iar toate dreptele G_2 sînt paralele cu γ_2.

Observație. În aceste condiții, dreapta G_1 (și dreapta G_2) nu poate fi perpendiculară simultan pe dreptele D și D', deoarece ea este perpendiculară pe segmentul AA', ca dreaptă situată într-un plan perpendicular pe acest segment. De aici rezultă că nici una dintre dreptele G_1 nu este paralelă cu nici una dintre dreptele G_2, deoarece, altfel, ele ar fi ambele paralele cu dreapta de intersecție a planelor γ_1 și γ_2, și deci perpendiculare în același timp pe dreptele D și D'.

Dacă nu vom considera dreapta de intersecție g_0 a planelor γ_1 și γ_2, atunci, pentru orice dreaptă g_1 din planul γ_1, se va găsi o dreaptă G_1, paralelă cu ea. Pentru a obține o astfel de dreaptă, vom intersecta dreptele D și D' cu un plan perpendicular pe dreapta g_1 și vom alege punctele de intersecție ca puncte A și A'. În adevăr, dreapta G_1, care corespunde unei astfel de alegeri a punctelor A și A', trebuie să fie perpendiculară pe AA' și paralelă cu planul γ_1, de unde rezultă că ea trebuie să fie paralelă cu dreapta g_1.

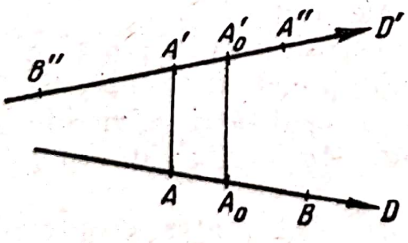


Fig. 12

3° Să presupunem că o dreaptă G_1 este determinată, în sensul indicat în enunțul problemei, de punctele A și A' (fig. 12) de pe dreptele D și D'; pornind de la aceste puncte, purtăm segmente egale, ambele în sens pozitiv sau ambele în sens negativ. Să presupunem, mai departe, că o anumită dreaptă G_2 este determinată, în același mod, prin punctele B și B'', de la care pornind

purtăm segmente egale, unul în sens pozitiv, iar celălalt în sens negativ. Evident, dreapta G_2 nu se va schimba dacă vom înlocui punctele B și B'' prin punctele A și A'', unde A este același punct ca mai sus, iar punctul A'' este determinat prin faptul că segmentul BA este egal cu segmentul $B''A''$, numai că unul dintre ele are sensul pozitiv, iar celălalt sensul negativ. Așadar, dreapta G_1 este determinată de punctele A și A', iar dreapta G_2 de punctele A și A''.

Să considerăm acum mijlocul A_0' al segmentului $A'A''$ și să luăm pe dreapta D, pornind din punctul A, segmentul AA_0, egal cu $A'A_0'$, astfel ca să fie ambele de sens pozitiv sau ambele de sens negativ. Planul perpendicular pe segmentul A_0A_0', în mijlocul său, trece prin dreapta G_1, deoarece $AA_0 = A'A_0'$ și ambele segmente sînt, sau de sens pozitiv, sau de sens negativ; același plan trece și prin dreapta G_2, deoarece segmentele AA_0 și $A''A_0'$ sînt egale ca mărime dar au sensuri opuse. Așadar, dreptele G_1 și G_2 sînt în același plan. Întrucît, potrivit celor demonstrate mai sus, ele nu sînt paralele, rezultă că sînt concurente.

4° Fie P un punct arbitrar din spațiu, egal depărtat de dreptele D și D'. Pentru a obține dreptele G_1 și G_2, concurente în acest punct, este suficient să alegem în mod corespunzător punctele A și A'. Cel mai simplu este să alegem ca puncte A și A' picioarele perpendicularelor coborîte din punctul P pe dreptele D și D'. În adevăr, repetînd raționamentele folosite la 1°, ne convingem ușor că punctul P aparține atît dreptei G_1, cît și dreptei G_2, care corespund punctelor A și A' alese.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL IV

455. *Prima soluție.* Să presupunem că un plan S (fig. 13) formează cu fețele P și Q ale unui diedru dat unghiuri diedre egale. Coborîm, într-un punct arbitrar x al muchiei diedrului, perpendiculara xH pe planul S și perpendicularele xA și xB pe dreptele de intersecție ale planului S cu planele P și Q. Dreptele HA și HB sînt, de asemenea (conform teoremei celor trei perpendiculare), perpendiculare pe aceleași drepte de intersecție. Prin urmare, unghiurile xAH și xBH sînt egale, ca unghiuri plane ale unor diedre egale prin ipoteză; deci și triunghiurile dreptunghice xAH și xBH sînt egale.

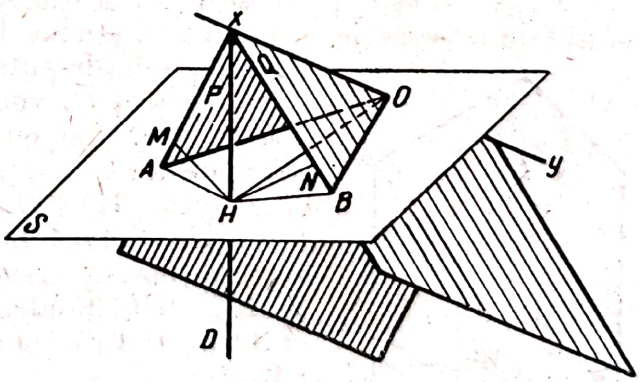


Fig. 13

Dreapta după care se taie planele P și S, fiind perpendiculară pe Ax și pe AH, este perpendiculară și pe planul xAH; deci, și planul P este perpendicular pe planul xAH. Prin urmare, dacă din punctul H, coborîm perpendiculara HM pe dreapta xA, ea este perpendiculară și pe planul P. Din aceeași

cauză, perpendiculara HN, coborîtă din punctul H pe dreapta xB, este perpendiculară pe planul Q. Segmentele HM și HN sînt însă egale, ca înălțimi ale triunghiurilor dreptunghice egale xAH și xBH. Așadar, punctul H este egal depărtat de fețele diedrului și aparține, deci, unuia dintre planele sale bisectoare (**360**). Acest plan bisector trece prin perpendiculara xH pe planul S și, de aceea, este el însuși perpendicular pe S. Planul S, perpendicular pe unul dintre cele două plane bisectoare ale unghiurilor formate de planele P și Q, este paralel cu perpendiculara pe acest plan.

Așadar, planul S, care formează cu planele P și Q unghiuri egale, este paralel cu perpendiculara pe unul dintre planele bisectoare ale unghiurilor diedre formate de planele P și Q.

A doua soluție. Problema se rezolvă mai simplu, dacă folosim una din propozițiile enunțate mai departe, la nr. **365**, anume: *unghiul dintre două plane este complementul unghiului format de unul dintre ele cu perpendiculara pe celălalt.*

Dacă planul S formează cu planele secante P și Q (fig. 13) unghiuri diedre egale, atunci și perpendiculara xH pe planul S, dusă dintr-un punct x al dreptei lor de intersecție formează cu planele P și Q, potrivit celor de mai sus, unghiurile egale HxM și HxN. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice HxM și HxN, obținem $HM = HN$, și demonstrația se încheie ca și la prima soluție.

Observație. Avînd în vedere aplicațiile ulterioare, menționăm următorul corolar al propoziției demonstrate:

Dacă un plan care taie două plane secante sub unghiuri egale intersectează și dreapta lor de intersecție, atunci el taie unul dintre planele bisectoare ale unghiurilor formate de planele considerate după o dreaptă perpendiculară pe dreapta lor de intersecție.

456. Fie A_0B_0 unul dintre segmentele paralele cu direcția dată, cuprinse între cele două plane date P și Q (fig. 14), M_0 mijlocul său, R planul care trece prin punctul M_0 și prin intersecția planelor date (cazul în care aceste plane sînt paralele va fi tratat mai jos).

Dacă AB este un alt segment arbitrar, paralel cu A_0B_0 iar M este punctul său de intersecție cu planul R, atunci $AM = MB$. În adevăr, dacă planul ABA_0B_0 taie dreapta de intersecție a planelor P și Q într-un punct C, vom obține în acest plan trei drepte care pornesc din punctul C, anume CA_0, CM_0 și CB_0, tăiate de două secante paralele A_0B_0 și AB. În acest caz, vom avea (**121**) $MA : MB = MA_0 : MB_0 = 1$. Dacă însă planul ABA_0B_0 este paralel cu muchia diedrului, vom obține în acest plan trei drepte paralele AA_0, MM_0 și BB_0, tăiate de cele două secante paralele A_0B_0 și AB, astfel că vom avea iarăși $MA : MB = M_0A_0 : M_0B_0 = 1$.

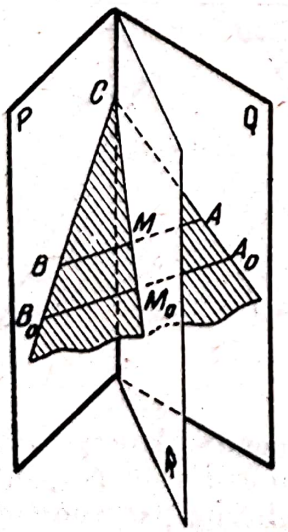


Fig. 14

De aici rezultă că locul geometric căutat va fi planul R (deoarece nici un punct exterior acestui plan nu are, cum ne convingem ușor, proprietatea cerută).

Dacă planele P și Q sînt paralele, atunci, conform teoremei referitoare la proporționalitatea segmentelor determinate de trei plane paralele pe secante arbitrare

(**336**), locul geometric al punctelor M este planul paralel cu planele P și Q date și egal depărtat de ele.

457. Să presupunem că trebuie să aflăm locul geometric al vîrfurilor C ale triunghiurilor, ale căror vîrfuri A și B se deplasează în planele date P și Q și ale căror laturi sînt respectiv paralele cu laturile unui triunghi abc dat (fig. 15).

Să notăm cu A_0, B_0 și C_0 vîrfurile unui triunghi care se bucură de proprietățile cerute (pentru construirea acestui triunghi, ducem o dreaptă arbitrară, paralelă cu ab, iar prin punctele A_0 și B_0 ale intersecției acesteia cu planele P și Q, ducem drepte respectiv paralele cu dreptele ac și bc). Prin punctul C și prin dreapta de intersecție a planelor P și Q (cazul planelor paralele va fi tratat mai jos), ducem planul R. Vom arăta că orice punct C al planului R este vîrf al unuia dintre triunghiurile considerate.

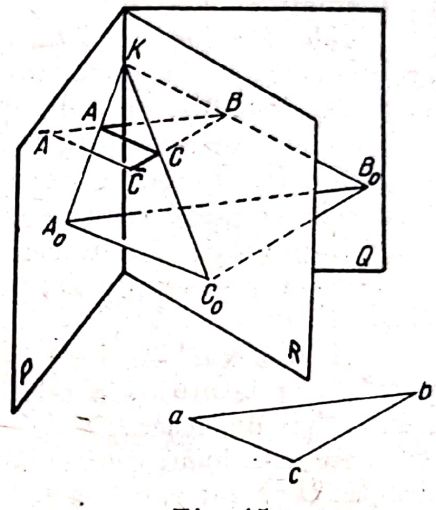


Fig. 15

În adevăr, să presupunem că punctul C nu se află în planul $A_0B_0C_0$ și că dreapta C_0C taie dreapta de intersecție a planelor P și Q într-un punct K. Ducem prin punctul C drepte paralele la C_0A_0 și la C_0B_0 și notăm cu A și B punctele lor de intersecție cu planele P și Q. Dreptele A_0A și B_0B se situează respectiv în planele KA_0C_0 și KB_0C_0 și, de aceea, ele trec prin punctul K. Din această cauză, dreptele AB și A_0B_0 sînt situate în același plan, anume în planul A_0B_0K. În afară de aceasta, planele $A_0B_0C_0$ și ABC sînt paralele, întrucît dreapta CA este paralelă cu C_0A_0, iar dreapta CB este paralelă cu C_0B_0. Prin urmare, dreptele AB și A_0B_0 sînt paralele cu dreptele de intersecție a două plane paralele cu un al treilea plan, iar triunghiul ABC se bucură de toate proprietățile cerute.

Să presupunem acum că punctul C nu se află în planul $A_0B_0C_0$, însă dreapta CC_0 este paralelă cu intersecția planelor P și Q și de aceea este paralelă cu fiecare dintre aceste plane. Ducînd prin punctul C dreptele CA și CB, paralele la C_0A_0 și la C_0B_0, obținem în planele P și Q două drepte paralele A_0A și B_0B și vom demonstra, ca mai sus, că și latura AB va fi paralelă cu A_0B_0.

In sfîrșit, dacă punctul C' din planul R este situat chiar în planul $A_0B_0C_0$, vom demonstra că și el va fi vîrf al unuia dintre triunghiurile considerate. Demonstrația se efectuează la fel ca în cazul în care punctul C nu se află în planul $A_0B_0C_0$. Numai că, pentru triunghiul $A_0B_0C_0$, luăm unul dintre triunghiurile considerate, ABC, al căror vîrf C nu se găsește în planul $A_0B_0C_0$. Așadar, orice punct al planului R este vîrful C al unuia dintre triunghiurile considerate.

Nici un punct $\overline{C}$, care nu aparține planului R, nu va fi vîrful C al vreunuia dintre triunghiurile care ne interesează. În adevăr, dacă vom duce printr-un astfel de punct C dreptele paralele cu C_0A_0 și cu C_0B_0, vom putea obține un triunghi $\overline{CAB}$ (fig. 15), ale cărui laturi sînt paralele cu dreptele

date, iar unul dintre vîrfuri, să zicem B, se află în planul Q; în schimb, vîrful A va fi, evident, exterior planului P.

Așadar, locul geometric al vîrfurilor C este un plan care trece prin dreapta de intersecție a planelor P și Q (și care este dus prin vîrful C_0 al unuia dintre triunghiurile care au proprietățile cerute).

Dacă planele P și Q sînt paralele, vom demonstra, în același mod ca mai sus, că locul geometric al punctelor C este un plan paralel cu P și cu Q (și care trece prin vîrful C_0 al unuia dintre triunghiurile care satisfac condițiile problemei).

458. *Prima soluție*. Să presupunem că trebuie rezolvată aceeași problemă ca și la exercițiul 457 (și cu aceleași notații), însă cu condiția ca vîrful A să se afle pe o dreaptă D.

Ducem prin dreapta D două plane P și P'. Dacă punctul A se deplasează în planul P, atunci, celelalte condiții ale problemei fiind respectate, punctul C descrie (conform soluției ex. 457) un plan R, iar dacă punctul A se deplasează în planul P', el descrie un alt plan R'. În consecință, cînd punctul A se deplasează pe dreapta D, punctul C descrie o dreaptă: intersecția planelor R și R'.

A doua soluție. Dacă ducem prin toate punctele dreptei D paralele la latura ab a triunghiului dat, aceste drepte se află într-un același plan S și, de aceea, ele intersectează planul dat Q în punctele unei drepte D', care este locul geometric al vîrfurilor B. Dreptele care trec prin punctele dreptei D și sînt paralele cu ac formează un plan T, iar dreptele care trec prin punctele dreptei D' și sînt paralele cu bc determină un plan U. Intersecția planelor T și U este locul geometric căutat al vîrfurilor C.

459. Fie P și Q planele date, D și D' dreptele lor de intersecție cu un plan R, perpendicular simultan pe planul P și pe planul Q (fig. 16).

Fie M un punct oarecare din spațiu, MA și MB distanțele sale la planele P și Q, m proiecția sa pe planul R, ma și mb distanțele punctului m la dreptele D și D'; atunci cele două patrulatere $MAam$ și $MBbm$ sînt dreptunghiuri. De aici, $MA = ma$, $MB = mb$ și $MA + MB = ma + mb$. Astfel, problema se reduce la problema analogă în planul R pentru punctul m și pentru dreptele D și D'.

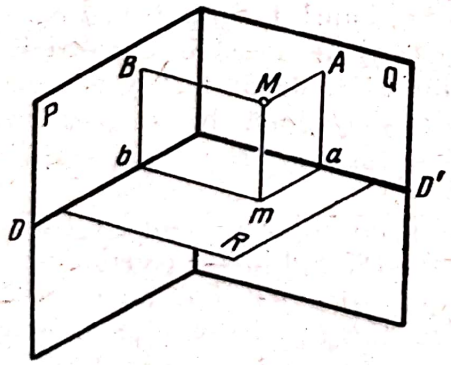


Fig. 16

Raționamentele de mai sus subsistă și pentru cazul în care planele P și Q sînt paralele.

După ce am găsit locul geometric al punctelor m (cum se arată în soluția ex. 31) vom obține locul geometric al punctelor M, ducînd prin fiecare punct al locului geometric găsit o dreaptă perpendiculară pe planul R.

Deoarece locul geometric al punctelor m este format din drepte, locul geometric al punctelor M va fi format din plane perpendiculare pe planul R.

460. Fie de aflat locul geometric al punctelor M pentru care suma proiecțiilor segmentelor OM, luate cu semnul corespunzător, unde O este un punct dat, pe două drepte orientate date D' și D'', are o valoare dată.

Deoarece proiecția unui segment pe o dreaptă nu se schimbă dacă această dreaptă se deplasează paralel cu ea însăși, putem presupune că cele două drepte D' și D'' sînt concurente în punctul O. Să notăm, în aceste condiții, cu m' și cu m'' proiecțiile punctului M pe dreptele date (fig. 17).

Coborîm dintr-un punct oarecare M al spațiului o perpendiculară MM_0 pe planul P, determinat de dreptele D' și D''. În acest caz, și proiecțiile M_0m' și M_0m'' ale oblicelor Mm' și Mm'' vor fi perpendiculare respectiv pe dreptele D' și D'' (fig. 17 și 18). Așadar, proiecțiile segmentului OM pe

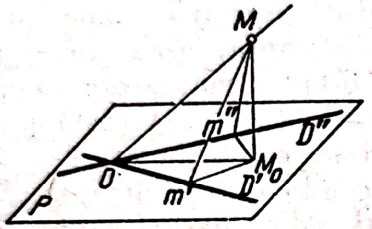


Fig. 17

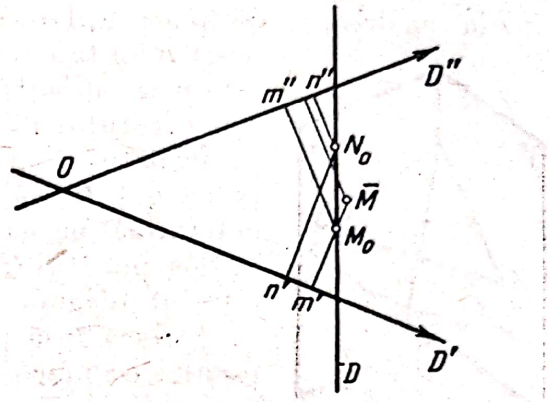


Fig. 18

dreptele D' și D'' vor coincide cu proiecțiile segmentului OM_0 pe aceleași drepte. De aici rezultă că este suficient să rezolvăm problema pentru punctele planului P.

Locul geometric al punctelor M_0 din planul P, pentru care suma $Om' + Om''$ a proiecțiilor segmentelor OM_0 pe dreptele D' și D'' își păstrează o valoare constantă h, este o dreaptă D, perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de sensurile pozitive ale dreptelor D' și D'' (fig. 18). În adevăr, cînd punctul M_0 se deplasează pe această dreaptă, să zicem din poziția M_0 în poziția N_0, una dintre proiecțiile Om' și Om'' crește, iar cealaltă se micșorează cu aceeași mărime, astfel că avem, în valoare absolută și semn, $m'n' = -m''n''$. În același timp, suma $Om' + Om''$ variază, evident, dacă înlocuim punctul M_0 cu un alt punct $\overline{M}$, nesituat pe dreapta D. (Pentru construirea dreptei D este suficient să luăm pe fiecare dintre dreptele D' și D'' o lungime dată, constantă, h, pornind din punctul O, și să unim apoi punctele obținute).

Întrucît locul geometric al punctelor M_0 — proiecțiile punctelor M pe planul P — este o dreaptă D, locul geometric al punctelor M înseși este planul care trece prin dreapta D și este perpendicular pe planul P.

461. Dacă, din punctul H (fig. 13), coborîm perpendicularele HA și HB pe dreptele OA și OB, segmentele HA și HB sînt egale, deoarece OH este, prin ipoteză, bisectoarea unghiului AOB. Din egalitatea segmentelor HA și HB rezultă egalitatea triunghiurilor dreptunghice xAH și xBH, unde x este punctul de intersecție al dreptei D cu muchia diedrului.

Raționînd acum în același mod ca în soluția exercițiului 455, demonstrăm că punctul H este egal depărtat de cele două fețe ale diedrului și se află deci în planul bisector. De aceea și dreapta D se află în planul bisector.

Observație. Se demonstrează ușor că, și reciproc, orice dreaptă situată în planul bisector al unui unghi diedru și neperpendiculară pe muchia sa are aceeași proprietate.

461 *bis*. Să ducem, în planul căutat R (fig. 19), printr-un punct arbitrar H al dreptei D, o perpendiculară pe aceasta. Dacă A și B sînt punctele de intersecție ale perpendicularei cu fețele diedrului, avem evident $HA = HB$. Așadar, pentru construirea planului căutat, trebuie să găsim un segment AB, perpendicular pe dreapta D și cuprins între fețele diedrului, iar mijlocul său să fie punctul H.

Pentru a obține acest segment, ducem prin punctul H un plan perpendicular pe dreapta D; în acest plan, trebuie să se afle segmentul căutat. Dacă acest plan taie muchia diedrului adică dacă dreapta D nu este perpendiculară pe muchia diedrului, atunci el taie fețele diedrului după două drepte concurente și ajungem la următoarea problemă din geometria plană: printr-un punct dat H, să se ducă o dreaptă, astfel ca segmentul determinat pe ea de două drepte concurente să aibă ca mijloc punctul H (compară cu ex. 165). Această problemă este întotdeauna posibilă și are o soluție unică.

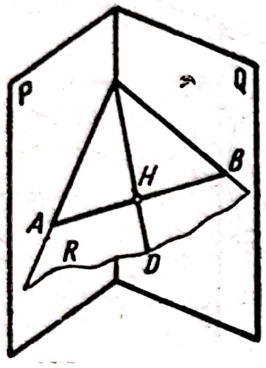


Fig. 19

Dacă însă planul perpendicular pe dreapta D va fi paralel cu muchia diedrului, adică dacă dreapta D va fi perpendiculară pe muchia diedrului, atunci vom obține ca secțiune două drepte paralele și vom ajunge la următoarea problemă din geometria plană: printr-un punct dat H, situat între două drepte paralele, să se ducă o dreaptă, astfel încît segmentul mărginit de cele două drepte paralele să fie tăiat în părți egale de punctul H.

Această problemă are o infinitate de soluții, dacă punctul H este egal depărtat de cele două drepte paralele și n-are nici o soluție, dacă punctul H n-are această proprietate. În primul caz, dreapta D va fi situată în planul bisector al diedrului.

Așadar, problema are o soluție unică, dacă dreapta D nu este perpendiculară pe muchia diedrului. Dacă însă dreapta D este perpendiculară pe muchia diedrului, problema are o infinitate de soluții, cu condiția ca dreapta D să se afle în planul bisector și n-are soluții, dacă dreapta D nu se găsește în acest plan.

462. Să presupunem că dreptele D și D' înțeapă planul dat Q perpendicular pe dreapta D, în punctele A și A', iar dreapta după care se intersectează cele două plane perpendiculare P și P', care trec prin aceste drepte, înțeapă planul Q în punctul B (fig. 20). Deoarece planele P și P' sînt perpendiculare, dreapta BX, situată în planul P și perpendiculară pe intersecția celor două plane, este perpendiculară pe planul P'; în consecință, această dreaptă BX este perpendiculară pe dreapta $A'B$. Totodată, dreapta D este perpendiculară pe $A'B$. De aici rezultă că dreapta $A'B$ este perpendiculară pe planul P, deci și pe dreapta AB. Unghiul ABA' este drept, iar locul geometric al punctelor B este cercul de diametru AA' (ne convingem ușor că orice punct al acestui cerc aparține locului geometric căutat).

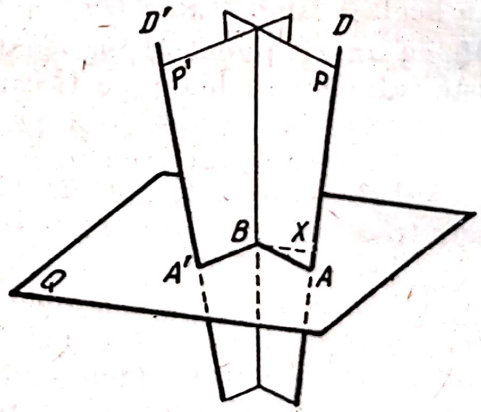


Fig. 20

EXERCIŢIILE LA CAPITOLUL V

463. Orice linie care se proiectează pe planul P după o dreaptă D este situată în planul Q, care trece prin D şi este perpendicular pe planul P. Tot astfel, orice linie care se proiectează pe un alt plan P' după o dreaptă D' este situată în planul Q', care trece prin D' şi este perpendicular pe P'.

În consecinţă linia care se proiectează pe planele P şi P' după dreptele D şi D' se află atît în planul Q, cît şi în planul Q'; deci ea coincide, în general, cu dreapta lor de intersecţie.

Această propoziţie îşi pierde valabilitatea, dacă planul Q' coincide cu Q, adică dacă dreapta proiectată se află într-un plan perpendicular simultan pe planele P şi P' şi, deci perpendicular pe dreapta lor de intersecţie.

464. Dacă două drepte din spaţiu se proiectează atît pe planul P, cît şi pe planul P' după două drepte paralele, atunci evident, putem duce prin aceste două drepte două perechi de plane paralele. În adevăr, planele proiectante ale celor două drepte pe planul P sînt paralele; aceeaşi situaţie are loc şi pentru planele proiectante ale acestor drepte pe planul P'.

Întrucît prin două drepte date, trec două perechi de plane paralele, aceste drepte sînt paralele, deoarece prin două drepte strîmbe trece (**332**) o pereche *unică* de plane paralele iar prin două drepte concurente nu putem duce plane paralele.

Face excepţie cazul în care planele proiectante ale celor două drepte pe planul P coincid cu planele lor proiectante pe planul P'. Aceasta se întîmplă cînd dreptele considerate se află în plane perpendiculare pe dreapta de intersecţie a planelor P şi P'.

465. Dacă o dreaptă dată este paralelă cu un plan dat, este suficient să ducem în acest plan, printr-un punct dat, o dreaptă paralelă cu cea dată, iar apoi să ducem, prin acelaşi punct, o dreaptă care formează cu dreapta construită unghiul α cerut.

Dacă dreapta considerată D taie planul dat într-un punct O, este suficient să putem *construi, în planul considerat, o dreaptă care formează cu dreapta D unghiul α şi care trece prin punctul de intersecţie O al dreptei D cu planul dat.* În adevăr, pentru celelalte puncte ale planului, problema va fi apoi soluţionată prin trasarea unei paralele.

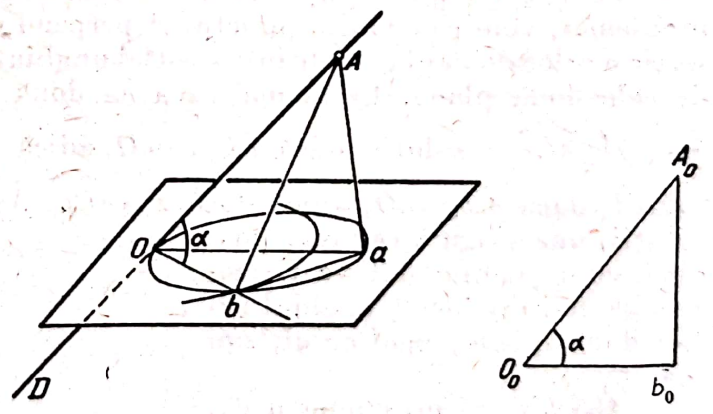


Fig. 21

Pentru a construi dreapta căutată, care trece prin punctul O, coborîm, dintr-un punct arbitrar A al dreptei D (fig. 21), perpendiculara Aa pe planul considerat. Dacă vom coborî acum, din acelaşi punct A, perpendiculara Ab pe dreapta căutată Ob, vom obţine dreapta ab, de asemenea perpendiculară pe Ob. Deci pentru a determina poziţia punctului b, putem proceda astfel.

Construim, pe segmentul Oa ca diametru, un cerc. Apoi, construim un triunghi dreptunghic arbitrar $O_0A_0B_0$, avînd ipotenuza $O_0A_0 = OA$ și un unghi ascuțit $A_0O_0b_0 = \alpha$. Descriind, în planul dat, un cerc cu centrul O și cu raza egală cu O_0b_0, vom obține la intersecția cu cercul construit înainte punctul b.

Problema va avea două soluții, dacă $O_0b_0 < Oa$, adică dacă $\alpha > \widehat{AOa}$ (compară cu nr. **35**), o singură soluție, dacă $O_0b_0 = Oa$, adică dacă $\alpha = \widehat{AOa}$, și nu va avea soluție, în cazul cînd $O_0b_0 > Oa$, adică dacă $\alpha < \widehat{AOa}$. Așadar, problema va avea două soluții, o soluție sau nici una, după cum unghiul dat va fi respectiv mai mare decît unghiul format de dreapta dată cu planul dat, egal cu acest unghi, sau mai mic.

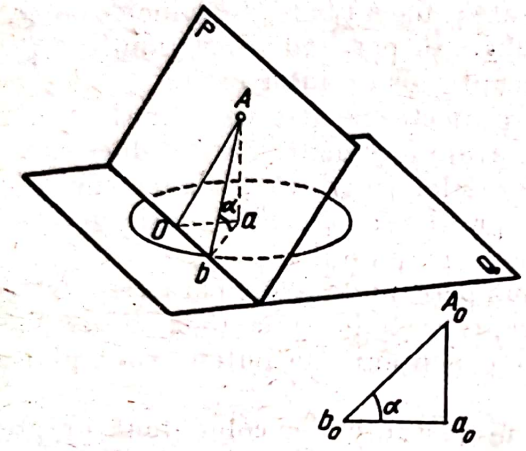


Fig. 22

Să presupunem acum că, prin punctul A al planului P (fig. 22), trebuie dusă o dreaptă Ab, care formează cu planul Q un unghi α dat. Coborîm din punctul A perpendiculara Aa pe planul Q. Conform definiției unghiului format de o dreaptă și de un plan, unghiul Aba va fi egal cu α. Deci putem determina punctul b prin următoarea construcție. Construim triunghiul dreptunghic $A_0a_0b_0$, avînd o catetă $A_0a_0 = Aa$ și un unghi ascuțit $A_0b_0a_0 = \alpha$, iar din punctul a ca centru, descriem în planul Q un cerc de rază a_0b_0. Punctul de intersecție al acestui cerc cu dreapta de intersecție a planelor P și Q va fi tocmai punctul b căutat.

Pentru a expune sub forma cea mai simplă condiția de posibilitate a problemei, vom coborî din punctul A perpendiculara AO pe dreapta de intersecție a celor două plane, obținînd astfel unghiul plan AOa al diedrului format de cele două plane. Problema va avea două soluții, dacă $a_0b_0 > aO$, adică dacă $\alpha < \widehat{AOa}$, o soluție, dacă $a_0b_0 = aO$, adică dacă $\alpha = \widehat{AOa}$, și nu va avea soluții, dacă $a_0b_0 < aO$, adică dacă $\alpha > \widehat{AOa}$. Așadar, problema va avea două soluții, una singură sau nici una, după cum unghiul dat va fi respectiv mai mic decît unghiul celor două plane, egal cu el, sau mai mare.

465 *bis*. Să presupunem că, prin dreapta dată D (fig. 23), care intersectează planul dat P într-un punct O, trebuie să ducem un plan care să-l taie pe cel dat sub un unghi α.

Din punctul arbitrar A al dreptei D, coborîm perpendicu-

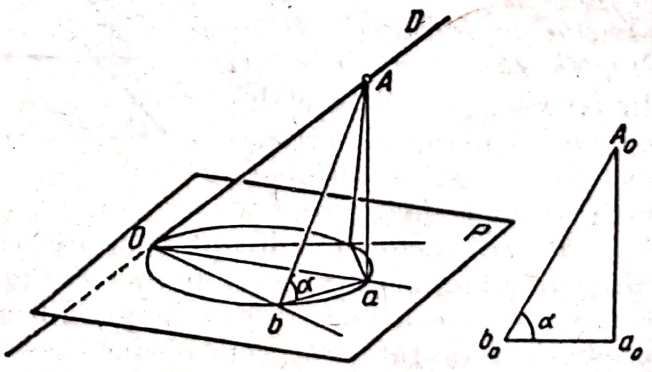


Fig. 23

larele Aa și Ab pe planul P și pe dreapta de intersecție Ob a planului P cu planul căutat. În acest caz, și dreapta ab va fi perpendiculară pe Ob, astfel că $\widehat{Aba} = \alpha$. Problema va fi rezolvată, dacă vom determina poziția punctului b.

Deoarece unghiul Oba este drept, punctul b se află pe cercul avînd ca diametru segmentul Oa și situat în planul P. Segmentul ab este egal cu cateta a_0b_0 a triunghiului dreptunghic $A_0a_0b_0$, în care $A_0a_0 = Aa$ și $\widehat{A_0b_0a_0} = \alpha$. Prin aceste date, poziția punctului b în planul P este determinată.

Problema va avea două soluții, dacă $ab < aO$, adică pentru $\alpha > \widehat{AOa}$, o soluție, dacă $ab = aO$, adică pentru $\alpha = \widehat{AOa}$, și nici una, dacă $ab > aO$, adică pentru $\alpha < \widehat{AOa}$. În consecință, problema va avea două soluții, una singură sau nici una, după cum unghiul dat va fi respectiv mai mare decît unghiul format de dreapta dată și de planul dat, egal cu el, sau mai mic.

Am presupus că dreapta D taie planul P. Dacă dreapta D este paralelă cu planul P, problema se rezolvă mai simplu. Anume, printr-un punct arbitrar A al dreptei D, ducem planul Q, perpendicular pe dreapta D. În planul Q construim o dreaptă care trece prin A și este înclinată sub unghiul α față de dreapta de intersecție a planelor P și Q. Dreapta construită și dreapta D determină planul căutat. În acest caz problema este totdeauna posibilă și are două soluții.

466. Fie A și B punctele situate respectiv pe fețele P și Q ale unui diedru (fig. 24), AC și BD perpendicularele duse din aceste puncte, respectiv pe fețele Q și P, AE și BF perpendicularele coborîte din punctele A și B pe muchia diedrului. În virtutea teoremei celor trei perpendiculare, dreptele CE și DF sînt, de asemenea, perpendiculare pe muchie. Unghiurile AEC și BFD sînt egale, ca unghiuri plane ale diedrului format de planele P și Q. Dacă dreapta AB formează unghiuri egale cu planele P și Q, atunci $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$. Prin urmare, triunghiurile dreptunghice ABC și BAD sînt egale, ca avînd ipotenuza egală și unghiuri respectiv egale. De aici urmează că $AC = BD$. Triunghiurile dreptunghice ACE și BDF sînt tot egale, deoarece au cîte o catetă egală și unghiuri egale. Deci, avem și $AE = BF$.

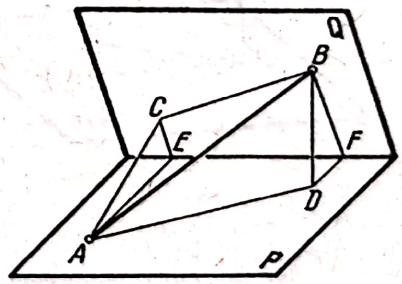


Fig. 24

Reciproc, dacă $AE = BF$, triunghiurile ACE și BDF sînt egale, de unde deducem $AC = BD$. Mai departe, triunghiurile ABC și BAD, care au ipotenuza comună și cîte o catetă egală, sînt egale, de unde $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$.

467. Fie dreapta D, care taie în punctul O muchia unui diedru și formează unghiuri egale cu fețele acestuia. Dacă, dintr-un punct arbitrar M al dreptei D, coborîm perpendicularele MA și MB pe fețe, triunghiurile dreptunghice OMA și OMB vor fi egale, în virtutea egalității unghiurilor MOA și

MOB. Prin urmare, $MA = MB$ și punctul M aparține planului bisector al diedrului. Datorită aceleași considerații, avem și reciproca: orice dreaptă D, care trece printr-un punct O și este situată în unul dintre planele bisectoare ale diedrelor formate de planele date, formează cu ele unghiuri egale. Așadar, locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct O al intersecției unor plane date și formează cu ele unghiuri egale este format de cele două plane bisectoare.

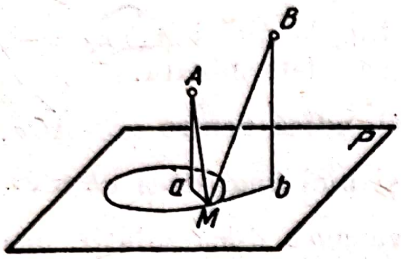


Fig. 25

De aici rezultă că locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct dat arbitrar în spațiu și formează unghiuri egale cu două plane date este o pereche de plane paralele cu planele bisectoare ale unghiurilor formate de planele date.

467 *bis*. Fie de aflat locul geometric al punctelor M din planul P (fig. 25), având proprietatea că unghiurile formate cu acest plan de dreptele MA și MB sînt egale.

Coborîm din punctele A și B perpendicularele Aa și Bb pe planul considerat. Din egalitatea unghiurilor AMa și BMb, rezultă asemănarea triunghiurilor AMa și BMb, deci și proporționalitatea laturilor $Ma : Mb = Aa : Bb$. Reciproc, din această proporție rezultă asemănarea triunghiurilor și egalitatea unghiurilor AMa și BMb. Așadar, locul geometric căutat al punctelor M este un cerc, anume locul geometric al punctelor din planul P ale căror distanțe la punctele a și b sînt într-un raport dat (**116**).

468. Fie segmentele $OA = OB$, luate pe laturile unghiului AOB, și fie C punctul de intersecție al bisectoarei unghiului AOB cu dreapta AB (fig. 26).

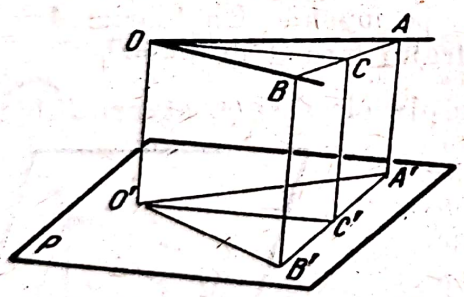


Fig. 26

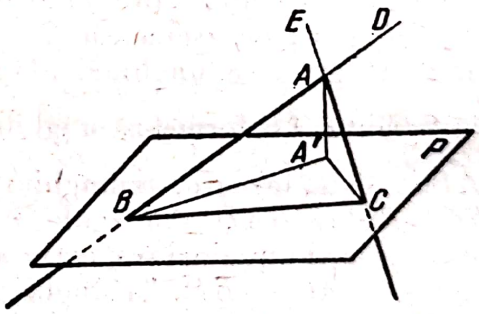


Fig. 27

Fie, mai departe, O', A', B' și C' proiecțiile punctelor O, A, B și C pe planul P, paralel cu OC. Deoarece triunghiul AOB este isoscel, unghiul OCA este drept și $AC = CB$. Unghiul drept OCA, a cărui latură OC este paralelă cu planul de proiecție, se proiectează pe planul P tot după un unghi drept $O'C'A'$ (**363**). Totodată, din egalitatea segmentelor AC și CB rezultă egalitatea segmentelor $A'C'$ și $C'B'$, deoarece dreptele AA', CC' și BB' sînt paralele. Triunghiurile dreptunghice $O'C'A'$ și $O'C'B'$ sînt egale, ca având respectiv catetele egale. Rezultă că dreapta $O'C'$ este bisectoarea unghiului $A'O'B'$.

469. Să presupunem că unghiul drept BAC, ale cărui laturi intersectează planul P în punctele B și C (fig. 27), se proiectează pe acest plan după unghiul

$BA'C$. În acest caz, $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $BA' < BA$ și $CA' < CA$. De aici deducem $BC^2 > A'B^2 + A'C^2$, astfel că unghiul $BA'C$ este obtuz (**126.** Cor). În aceleași condiții, proiecția unghiului DAE, unde AD și AE sînt prelungirile laturilor AB și AC ale unghiului dincolo de vîrful A, va fi de asemenea un unghi obtuz, iar proiecția fiecăruia dintre unghiurile BAE și CAD va fi un unghi ascuțit.

469 *bis.* Să presupunem că anumite unghiuri — unghiul ascuțit AOB, unghiul drept AOC și unghiul obtuz AOD — situate în același plan se proiec-

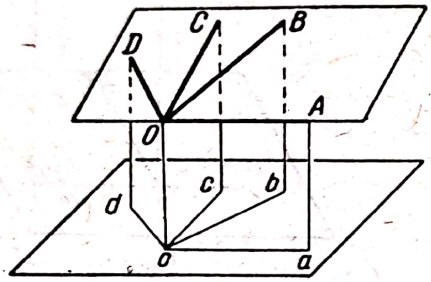


Fig. 28

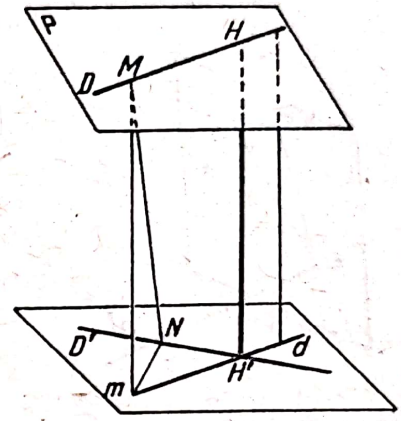


Fig. 29

tează pe un plan paralel cu latura lor comună OA, respectiv după unghiurile aob, aoc și aod (fig. 28).

Deoarece unghiul drept AOC se proiectează, în aceste condiții, tot după un unghi drept aoc, iar dreapta ob se află evident în interiorul unghiului aoc, unghiul aob — proiecția unghiului ascuțit AOB — va fi de asemenea ascuțit. Analog, unghiul aod, proiecția unghiului obtuz AOD, va fi obtuz.

470. Fie HH' perpendiculara comună pe dreptele D și D' (fig. 29), MN perpendiculara dusă din punctul arbitrar M al dreptei D pe dreapta D', d dreapta care trece prin H' și este paralelă cu D, Mm perpendiculara dusă din punctul M pe dreapta d. Trebuie să demonstrăm că unghiul HMN, format de segmentul MH, dus din punctul M și pe care se află punctul H și de perpendiculara MN, este ascuțit.

Deoarece dreapta MN este perpendiculară pe D', proiecția ei mN pe planul dreptelor D' și d este și ea perpendiculară pe D'. Unghiul HMN se proiectează pe un plan paralel cu latura sa HM după un unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic $H'mN$, deci este și el ascuțit, în baza teoremei reciproce aceleia considerate în exercițiul 469 *bis*. (Această reciprocă este adevărată, deoarece, în teorema directă, au fost considerate toate trei ipotezele posibile în privința unghiului proiectat; compară cu nr. **71**).

470 *bis.* Să păstrăm notațiile de la exercițiul 470 (fig. 29). Dacă punctul M se depărtează pe dreapta D de punctul H, în triunghiul MmN cateta Mm nu-și va schimba mărimea. Cealaltă catetă mN va crește, deoarece în triunghiul dreptunghic $H'mN$, unghiurile nu variază, iar ipotenuza $H'm$ (egală cu HM) crește.

Din faptul că o catetă Mm a triunghiului MmN nu se schimbă, iar cealaltă catetă mN crește, rezultă (conform teoremei referitoare la lungimea a două oblice, nr. **344**) că și ipotenuza MN crește.

471. Dacă o dreaptă arbitrară D, care trece printr-un punct dat M, are cu o dreaptă dată D' perpendiculara comună HH', de lungime dată (fig. 29), atunci dreapta D este conținută în planul P, paralel cu dreapta D' și situat la distanța HH' de aceasta. Reciproc, orice dreaptă situată în acest plan și care trece prin punctul M satisface condițiile problemei. Așadar, problema

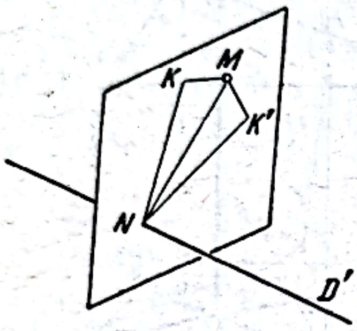


Fig. 30

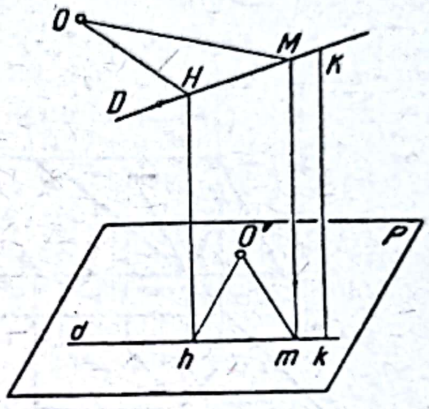


Fig. 31

noastră se reduce la următoarea: *printr-un punct M, să se ducă un plan paralel cu o dreaptă D' și situat la o distanță dată de aceasta.*

Pentru rezolvarea acestei probleme, ducem prin M un plan perpendicular pe dreapta D' (fig. 30) și în acesta, perpendiculara MN din punctul M pe dreapta D'. În acest plan construim triunghiul dreptunghic MKN, avînd ca ipotenuză segmentul MN, iar ca una dintre catete segmentul NK egal cu distanța dată. Planul care trece prin cealaltă catetă și este paralel cu dreapta D' satisface, evident, condițiile cerute. Problema are două soluții, dacă lungimea dată a perpendicularei comune este mai mică decît MN.

472. Coborîm din punctul O perpendiculara OH pe dreapta D (fig. 31); luăm pe dreapta D segmentul $HK = OH$, îl proiectăm pe planul P după segmentul hk și, în sfîrșit, luăm în acest plan pe perpendiculara pe dreapta d în punctul h, de o parte și de cealaltă, segmentele hO' și hO'', egale cu hk (segmentul hO'' nu este reprezentat în figură). Pentru orice punct M al dreptei D și pentru proiecția sa m pe planul P vom avea relația $OH : HM = HK : HM = hk : hm = O'h : hm$. Deci triunghiurile OHM și $O'hm$ sînt asemenea, de unde obținem $OM : O'm = OH : O'h$. Însă această din urmă relație nu depinde de poziția punctului M pe dreapta D. Punctul O'' are, evident, aceeași proprietate.

472 *bis.* Fie de găsit, pe dreapta D, un punct M (fig. 32), astfel ca raportul distanțelor sale la o altă dreaptă D' și la un punct dat O să fie egal cu raportul a două segmente date $p : q$.

Să proiectăm dreapta D și punctul M pe planul P, perpendicular pe dreapta D' într-un punct n al acesteia și să notăm proiecțiile lor respectiv

cu d și cu m. Mai departe, vom determina (folosind ex. 472) în planul P un punct O', astfel încît să aibă loc egalitatea

$$OM : O'm = OH : O'h, \qquad (1)$$

unde H și h sînt picioarele perpendicularelor duse din punctele O și O' respectiv pe dreptele D și d.

Dacă N este piciorul perpendicularei coborîte din punctul M pe dreapta D', avem, prin ipoteză,

$$MN : OM = p : q. \qquad (2)$$

În afară de aceasta, avem evident

$$MN = mn. \qquad (3)$$

Din egalitățile (1), (2) și (3), obținem

$$mn : mO' = (p \cdot OH) : (q \cdot O'h). \qquad (4)$$

Reciproc, din egalitatea (4), obținem egalitatea (2), cu ajutorul egalităților (1) și (3).

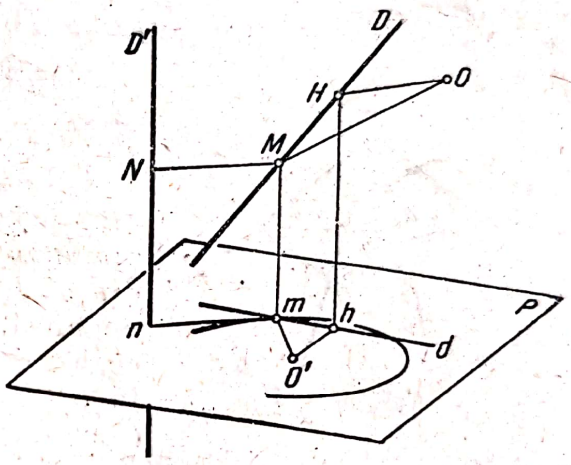


Fig. 32

Așadar, problema se reduce la a afla pe dreapta d un punct m care satisface relația (4). Însă locul geometric al punctelor m din planul P care satisfac relația (4) și unde n și O' sînt puncte cunoscute ale planului P, iar membrul al doilea are o valoare constantă, este un cerc (**116**)[1]. Intersecția acestui cerc cu dreapta d ne dă punctul căutat m. Vom obține punctul M ducînd prin punctul m în planul proiectant o dreaptă perpendiculară pe d. Numărul maxim de soluții: două.

473. Vom remarca, în primul rînd, că unghiul dintre două plane arbitrare P și Q (prin definiție, ascuțit sau drept; v. nr. **365**) este egal cu unghiul ascuțit sau drept format de dreptele p și q, respectiv perpendiculare pe planele P și Q. În adevăr, fiecare dintre aceste unghiuri este complementul unghiului dintre dreapta p și planul Q (cf. nr. **365** și **364** *bis*).

Să presupunem acum că, în planul P este așezat un poligon arbitrar a cărui arie este egală cu S unități de suprafață. Vom face să-i corespundă un segment de dreaptă p, avînd S unități de lungime. Dacă vom nota cu α unghiul (ascuțit) format de planul P și de un plan arbitrar Q, atunci aria proiecției poligonului dat pe planul Q va fi egală (**368**) cu $S \cdot \cos\alpha$, iar lungimea proiecției segmentului ales pe perpendiculara q pe planul Q va fi tot $S \cdot \cos\alpha$.

---

[1]) Pentru construirea cercului, care este locul geometric al punctelor m, trebuie să înlocuim raportul $(p \cdot OH) : (q \cdot O'h)$ prin raportul a două segmente. În acest scop, determinăm segmentul q' din condiția $OH : O'h = q : q'$; vom avea $(p \cdot OH) : (q \cdot O'h) = pq : qq' = p : q'$.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL VII

474. Fie $S{\cdot}ABC$ (fig. 33) unghiul triedru dat. Dacă suma a două unghiuri plane[1]), să zicem $\widehat{ASB} + \widehat{ASC}$, este mai mare decît două unghiuri drepte, această sumă va fi evident mai mare decît unghiul BSC, deoarece acesta din urmă este mai mic decît 2 dr.

Dacă însă suma $\widehat{ASB} + \widehat{ASC}$ este mai mică decît 2 dr, atunci construim în planul ASC unghiul $\widehat{ASB'} = \widehat{ASB}$, astfel ca unghiul $B'SC$ să fie egal cu suma $\widehat{ASB} + \widehat{ASC}$. Trebuie să demonstrăm că $\widehat{BSC} < \widehat{B'SC}$.

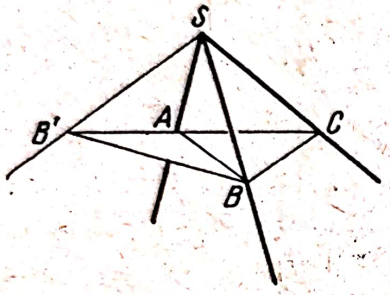


Fig. 33

Luăm segmentele egale $SB = SB'$ și ducem prin punctele B și B' un plan care taie semidreptele SA și SC (și nu prelungirile lor dincolo de punctul S) în punctele A și C. Triunghiurile SAB și SAB' astfel obținute sînt egale, deoarece au cîte un unghi egal (cu vîrful în S), cuprins între laturi respectiv egale (SA comună, $SB = SB'$), de unde avem $AB' = AB$. Prin urmare, segmentul $B'C = BA + AC$ este mai mare decît latura BC. Din considerarea triunghiurilor SBC și $SB'C$, în care două laturi ale unuia (SB și SC) sînt respectiv egale cu două laturi ale celuilalt (SB' și SC), iar latura a treia este inegală ($B'C > BC$), rezultă că $\widehat{B'SC} > \widehat{BSC}$.

475. Pentru orice semidreaptă SM dusă din vîrful S al triedrului $S{\cdot}ABC$, avem (**375**) $\widehat{MSB} + \widehat{MSC} \geqslant \widehat{BSC}$; $\widehat{MSC} + \widehat{MSA} \geqslant \widehat{CSA}$; $\widehat{MSA} + \widehat{MSB} \geqslant \widehat{ASB}$, cele trei semne de egalitate fiind imposibile simultan, deoarece semidreapta nu poate fi situată deodată în planele celor trei fețe BSC, CSA și ASB. De aici obținem

$$\widehat{MSA} + \widehat{MSB} + \widehat{MSC} > \frac{1}{2}\left(\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB}\right).$$

Pentru orice semidreaptă SM, dusă din vîrful unui triedru și situată în *interiorul* său, avem (**376**) $\widehat{MSB} + \widehat{MSC} < \widehat{ASB} + \widehat{CSA}$; $\widehat{MSC} + \widehat{MSA} < \widehat{BSC} + \widehat{ASB}$; $\widehat{MSA} + \widehat{MSB} < \widehat{CSA} + \widehat{BSC}$. Adunînd și împărțind prin doi, avem

$$\widehat{MSA} + \widehat{MSB} + \widehat{MSC} < \widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB}$$

(compară cu soluția ex. 8).

Trecem la cazul unui unghi poliedru. Pentru orice semidreaptă SM, dusă din vîrful unghiului poliedru $S{\cdot}ABC\ldots KL$ cu n fețe, avem $\widehat{MSA} + \widehat{MSB} \geqslant$

[1]) Vezi nota care însoțește enunțul problemei (Nota Red. E.T.).

$\geqslant \widehat{ASB}$; $\widehat{MSB} + \widehat{MSC} \geqslant \widehat{BSC}$; ...; $\widehat{MSK} + \widehat{MSL} \geqslant \widehat{KSL}$; $\widehat{MSL} + \widehat{MSA} \geqslant$ $\geqslant \widehat{LSA}$. Adunînd și împărțind prin doi, obținem, ca mai sus,

$$\widehat{MSA} + \widehat{MSB} + \ldots + \widehat{MSL} > \frac{1}{2}(\widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \ldots + \widehat{LSA})$$

(compară cu soluția ex. 8 *bis*).

Dacă unghiul poliedru $S \cdot ABC \ldots KL$ dat este convex[1]), atunci, pentru orice semidreaptă SM, dusă din vîrf și situată în *interiorul* său avem (**376**) $\widehat{MSA} + \widehat{MSB} < \widehat{BSC} + \widehat{CSD} + \ldots + \widehat{KLA}$; $\widehat{MSB} + \widehat{MSC} < \widehat{CSD} + \ldots +$ $+ \widehat{KLA} + \widehat{LAB}$; ...; $\widehat{MSL} + \widehat{MSA} < \widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \ldots + \widehat{KSL}$. Avem n inegalități, fiecare dintre unghiurile plane ASB, BSC, ..., LSA intervenind cîte o singură dată în membrul al doilea al uneia dintre ele. Prin urmare, adunînd și împărțind prin doi, obținem

$$\widehat{MSA} + \widehat{MSB} + \ldots + \widehat{MSL} < \frac{n-1}{2} \cdot (\widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \ldots + \widehat{LSA}).$$

Propozițiile corespunzătoare pentru sferă se enunță astfel:

Dacă unim un punct de pe sferă cu cele trei vîrfuri ale unui triunghi sferic, atunci suma arcelor obținute (mai mici decît un semicerc) *este mai mare decît semiperimetrul triunghiului; dacă punctul este interior triunghiului, această sumă este mai mică decît perimetrul său.*

Dacă unim un punct de pe sferă cu toate vîrfurile unui poligon sferic cu n laturi, suma arcelor obținute (mai mici decît un semicerc) *este mai mare decît semiperimetrul poligonului; dacă poligonul considerat este convex și punctul se află în interiorul lui, aceeași sumă este mai mică decît semiperimetrul, înmulțit cu n — 1.*

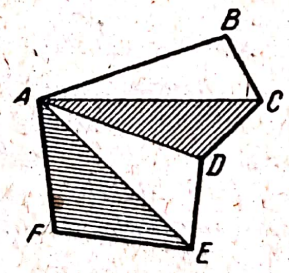


Fig. 34

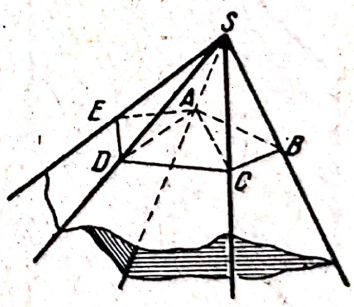


Fig. 35

475 *bis*. Fie dat un poligon strîmb, să zicem exagonul $ABCDEF$ (fig. 34). Întrucît în orice unghi, triedru sau poliedru, orice unghi plan este mai mic decît suma celorlalte, ducînd diagonalele AC, AD și AE, vom avea

$\widehat{FAB} < \widehat{FAE} + \widehat{EAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB}$; $\widehat{BCD} < \widehat{BCA} + \widehat{ACD}$; $\widehat{CDE} < \widehat{CDA} + \widehat{ADE}$; $\widehat{DEF} < \widehat{DEA} + \widehat{AEF}$ (semnele de egalitate corespund cazului în care printre triunghiurile ABC, ACD, ADE și AEF există două sau mai multe situate în același plan). Din aceste inegalități, obținem ușor, prin adunare, $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} +$

[1]) Precizare făcută de D. I. Perepiolkin (Nota Red. E. T.).

$+\widehat{BCD}+\widehat{CDE}+\widehat{DEF}+\widehat{EFA}<(\widehat{CAB}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA})+(\widehat{DAC}+\widehat{ACD}+$
$+\widehat{CDA})+(\widehat{EAD}+\widehat{ADE}+\widehat{DEA})+(\widehat{FAE}+\widehat{AEF}+\widehat{EFA})<2\text{dr}\cdot 4$, deoarece dacă poligonul dat este strîmb (și nu plan), atunci, cel puțin una dintre relațiile precedente va avea semnul de inegalitate.

Aceleași raționamente se aplică și unui poligon cu un număr de laturi n arbitrar. În acest caz, în locul celor patru triunghiuri, vom avea $n-2$.

476. Fie dat un unghi poliedru convex, să zicem unghiul $S\cdot ABCDE$ cu cinci fețe (fig. 35). Planele diagonale ASC și ASD, care trec prin muchia SA, îl taie în trei triedre $S\cdot ABC, S\cdot ACD$ și $S\cdot ADE$. Deoarece suma diedrelor unghiului poliedru cu cinci fețe se poate obține prin adunarea tuturor diedrelor acestor trei triedre și deoarece suma tuturor diedrelor unui triedru este mai mare decît 2dr, rezultă că suma diedrelor unghiului poliedru dat este mai mare decît $2\text{dr}\cdot 3$.

Același raționament se aplică și unui unghi poliedru convex cu un număr n arbitrar de fețe. În acest caz, în locul celor trei triedre, vom avea $n-2$.

În cazul unui poligon sferic convex, putem uni toate vîrfurile sale cu centrul sferei și aplica propoziția demonstrată mai sus, sau putem împărți direct poligonul respectiv în triunghiuri, cu ajutorul diagonalelor duse dintr-un vîrf.

477. Evident, este suficient să considerăm cazul în care dreapta D taie într-un punct arbitrar O dreapta de intersecție a celor două plane date (fig. 36).

Din punctul arbitrar M al dreptei D, coborîm perpendicularele MA, MB și MP pe planele date și pe intersecția lor. Triunghiurile dreptunghice OMA și PMA au cateta MA comună. În același timp, ipotenuza OM a primului triunghi este mai mare decît ipotenuza MP a celui de-al doilea, dacă dreapta D nu este perpendiculară pe dreapta de intersecție a celor două plane. De aici rezultă (conform reciprocei teoremei de la nr. **35**) că $\widehat{MOA}<\widehat{MPA}$.

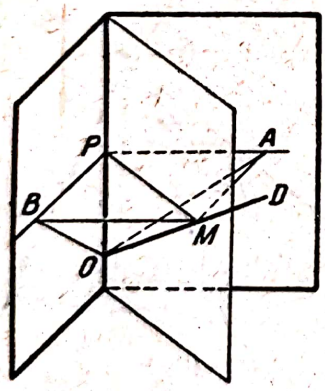


Fig. 36

Așadar, unghiul MOA, format de dreapta D cu primul dintre planele date, este mai mic decît unghiul MPA. În baza unor considerente analoge, unghiul MOB, format de dreapta D cu al doilea plan dat, este mai mic decît MPB. De aici rezultă că $\widehat{MOA}+\widehat{MOB}<AOB$, însă unghiul AOB este drept.

478. Să presupunem că dreapta mobilă D are două poziții limită diferite D_0 și D_0'. Să alegem un unghi ε, astfel încît să fie îndeplinită condiția $\varepsilon<(\widehat{D_0,D_0'})$, și să considerăm momentul de la care începînd $(\widehat{D,D_0})<\frac{\varepsilon}{2}$ și $(\widehat{D,D_0'})<\frac{\varepsilon}{2}$. În aceste condiții, vom avea $(\widehat{D,D_0})+(\widehat{D,D_0'})<\varepsilon<(\widehat{D_0,D_0'})$.

Însă dreptele D, D_0 și D_0' formează un triedru (sau sînt situate în același plan și sînt concurente), astfel că $(\widehat{D,D_0})+(\widehat{D,D_0'}\geqslant(D_0,D_0')$. Contradicția la care ajungem dovedește că dreapta nu poate avea două poziții limită.

Să presupunem, mai departe, că dreptele concurente D și E au ca poziții limită dreptele D_0 și E_0. Aceste patru drepte formează un unghi poliedru cu patru fețe, în care $(\widehat{D,E}) \leqslant (\widehat{D,D_0}) + (\widehat{D_0,E_0}) + (\widehat{E,E_0})$; $(\widehat{D_0,E_0}) \leqslant (\widehat{D,D_0}) + (\widehat{D,E}) + (\widehat{E,E_0})$. De aici reiese că $-(\widehat{D,D_0}) - (\widehat{E,E_0}) \leqslant (\widehat{D,E}) - (\widehat{D_0,E_0}) \leqslant (\widehat{D,D_0}) + (\widehat{E,E_0})$ sau, altfel, $|(\widehat{D,E}) - (\widehat{D_0,E_0})| \leqslant (\widehat{D,D_0}) + (\widehat{E,E_0})$. Însă în virtutea definiției poziției limită, vom avea, începînd cu un anumit moment, inegalitățile $(\widehat{D,D_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $(\widehat{E,E_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Totodată, conform inegalității precedente, vom avea, începînd cu un anumit moment, $|(\widehat{D,E}) - (\widehat{D_0,E_0})| < \varepsilon$. Aceasta ne arată că unghiul dintre dreptele D și E tinde către unghiul format de dreptele D_0 și E_0.

În sfîrșit, vom presupune că trei drepte variabile D, E și F, avînd respectiv pozițiile limită D_0, E_0 și F_0 rămîn, în deplasarea lor, în același plan. Atunci unul dintre unghiurile formate de două dintre aceste drepte va fi egal cu suma celorlalte două, să zicem $(\widehat{D,E}) + (\widehat{E,F}) = (\widehat{D,F})$. După cum am demonstrat mai sus, fiecare dintre unghiurile $(\widehat{D,E})$, $(\widehat{E,F})$ și $(\widehat{D,F})$ are ca limită respectiv unghiurile $(\widehat{D_0,E_0})$, $(\widehat{E_0,F_0})$ și $(\widehat{D_0,F_0})$. În acest caz, limita sumei va fi, după cum se știe, egală cu suma limitelor, astfel că $(\widehat{D_0,E_0}) + (\widehat{E_0,F_0}) = (\widehat{D_0,F_0})$. Ultima egalitate ne arată că dreptele D_0, E_0 și F_0 sînt situate în același plan, deoarece, altfel, ele ar forma un triedru și am avea $(\widehat{D_0,E_0}) + (\widehat{E_0,F_0}) > (\widehat{D_0,F_0})$.

479. Orice punct situat în planul bisector al unuia dintre diedrele triedrului $S{\cdot}ABC$ (fig. 37), să zicem în planul bisector al diedrului de muchie SA, este egal depărtat de cele două fețe SAB și SAC (**360**). Deci, orice punct al dreptei D, după care se intersectează două plane bisectoare, este egal depărtat de cele trei fețe se și află așadar în planul bisector al celui de-al treilea diedru. (Compară cu demonstrația teoremei referitoare la concurența bisectoarelor unui triunghi; nr. **54**).

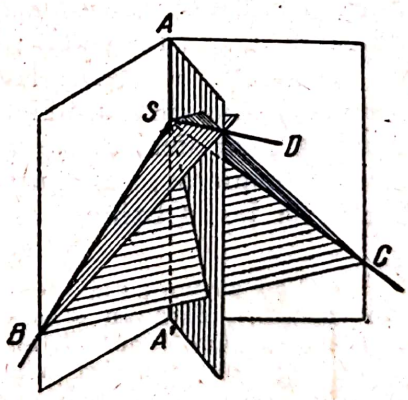


Fig. 37

Dacă înlocuim planele bisectoare a două dintre diedrele triedrului, să zicem ale celor de muchii SB și SC, prin planele bisectoare ale diedrelor suplementare, problema se reduce la considerarea celor trei plane bisectoare ale diedrelor triedrului format de muchiile SB și SC ale triedrului dat și de prelungirea SA' a muchiei sale SA dincolo de vîrful S. În felul acesta, vom obține o dreaptă D_1, analogă cu D.

În total, putem obține astfel patru drepte D, D_1, D_2 și D_3. În adevăr, putem considera intersecția fiecăruia dintre planele bisectoare care trec prin SB, cu oricare dintre cele două plane bisectoare care trec prin SC. Punctele fiecăreia dintre aceste patru drepte sînt egal depărtate de cele trei plane BSC, CSA și ASB.

Reciproc, orice punct egal depărtat de cele trei plane se află pe una dintre aceste patru drepte, deoarece el trebuie să fie situat în unul dintre planele bisectoare care trec prin SB și în unul dintre planele bisectoare care trec prin SC. În consecință, ansamblul celor patru drepte astfel găsite este locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei plane.

Considerînd intersecția muchiilor și a fețelor triedrului dat cu o sferă arbitrară avînd centrul în vîrful triedrului (sau, dacă vrem, unind vîrfurile unui triunghi sferic arbitrar cu centrul sferei), obținem următoarele propoziții:

1) Bisectoarele celor trei unghiuri ale unui triunghi sferic sînt concurente, iar prelungirile lor dincolo de vîrfurile triunghiului sînt, de asemenea, concurente (punctele de intersecție ale dreptei D cu suprafața sferei).

2) Bisectoarea unuia dintre unghiurile unui triunghi sferic și bisectoarele celor două unghiuri suplementare cu celelalte două trec prin două puncte diametral opuse (punctele de intersecție ale uneia dintre dreptele D_1, D_2 și D_3 cu suprafața sferei).

Așadar, în total, obținem pe sferă opt puncte.

Mai departe, au loc următoarele propoziții. Dacă punctele unei drepte sînt egal depărtate de planele fețelor unui triedru, această dreaptă formează unghiuri egale cu planele fețelor, și reciproc. În adevăr, coborînd dintr-un punct arbitrar al dreptei date perpendiculare pe cele trei plane, obținem triunghiuri dreptunghice egale (ele au ipotenuza comună și cîte o catetă egală sau cîte un unghi ascuțit egal). De aici rezultă că fiecare dintre cele patru drepte D, D_1, D_2 și D_3, găsite mai sus, formează unghiuri egale cu cele trei plane ale fețelor triedrului și că nu există alte drepte care să aibă această proprietate. De aceea, punctele de intersecție ale acestor patru drepte cu suprafața sferei sînt egal depărtate de cele trei cercuri mari după care planele fețelor se intersectează cu sfera (se numește distanță sferică a unui punct de pe sferă la un cerc mare arcul mai mic de cerc mare, dus din punctul respectiv și perpendicular pe cercul mare respectiv; compară cu nr. **384**). Alegînd unul dintre punctele de intersecție cu sfera al uneia dintre dreptele D, D_1, D_2 și D_3 ca pol al cercului mic, iar distanța sferică a acestui punct la fiecare dintre cele trei cercuri mari ca rază sferică, căpătăm un cerc mic, înscris sau exînscris în triunghiul sferic considerat, adică un cerc mic tangent la laturile triunghiului sau la prelungirile lor. Obținem astfel opt cercuri mici.

Observație. Se spune că un cerc mare și un cerc mic de pe aceeași sferă sînt *tangente*, dacă au o tangentă comună în punctul lor comun (compară cu nr. **69**). Această tangentă comună nu poate fi decît dreapta de intersecție a planului cercului mare cu planul cercului mic. De aceea, definiția de mai sus se reduce la următoarea: un cerc mare și un cerc mic de pe aceeași sferă sînt tangente, dacă au un singur punct comun. Din teoremele referitoare la lungimea relativă a arcelor perpendiculare și oblice (**384**), rezultă că *un cerc mare tangent la un cerc mic este perpendicular pe raza sferică a acestuia, care trece prin punctul de contact* (*compară cu nr.* **58**).

479 *bis.* Planul bisector al suplementului diedrului de muchie SA al triedrului $S \cdot ABC$ este perpendicular pe planul bisector al diedrului de muchie SA. De aceea, și dreapta situată în planul bisector al acestui supliment și perpendiculară pe muchia SA este perpendiculară pe planul bisector al diedrului de muchie SA (**354**), deci și pe dreapta D, considerată la exercițiul 479.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, cele trei drepte despre care este vorba în enunţul problemei trec prin vîrful S al triedrului şi sînt perpendiculare pe dreapta D. Prin urmare, ele se află în acelaşi plan P.

Unghiul dintre două plane este complementul unghiului format de unul dintre ele cu perpendiculara pe celălalt (**365**). În cazul de faţă, unghiul dintre planul unei feţe, să zicem BSC, şi planul P este complementul unghiului dintre planul BSC şi dreapta D. Întrucît dreapta D formează cu cele trei feţe ale triedrului unghiuri egale, planul P este egal înclinat faţă de cele trei feţe.

În general, dacă un plan formează cu planele feţelor unui triedru unghiuri egale, atunci şi o dreaptă perpendiculară pe acest plan formează unghiuri egale cu aceste feţe. De aceea, pentru a găsi celelalte plane care trec prin vîrful triedrului şi sînt egal înclinate pe cele trei feţe, este suficient să înlocuim dreapta D cu una dintre celelalte trei drepte considerate în soluţia exerciţiului 479. Aceasta ne conduce la următoarea construcţie: în planul bisector al suplementului unuia dintre diedrele triedrului şi în planele bisectoare ale celorlalte două diedre, ale triedrului, ducem prin vîrf drepte perpendiculare pe muchiile respective; aceste trei drepte vor fi situate în acelaşi plan, egal înclinat pe cele trei feţe.

În ansamblu, căpătăm patru plane P, P_1, P_2 şi P_3, care trec prin vîrf şi au această proprietate.

Propoziţiile corespunzătoare pentru sferă se enunţă astfel:

1) Cele şase puncte situate pe bisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi sferic, la distanţe egale cu un sfert de cerc mare de vîrful respectiv, se află pe acelaşi cerc mare, egal înclinat faţă de laturile triunghiului.

2) Două puncte situate pe bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi sferic şi cele patru puncte situate pe bisectoarele unghiurilor interioare ale celorlalte două unghiuri, la distanţe egale cu un sfert de cerc mare de vîrful respectiv, se situează pe acelaşi cerc mare, egal înclinat pe laturile triunghiului.

În total, căpătăm patru cercuri mari care au această proprietate. Polii acestor cercuri mari sînt cele opt puncte despre care este vorba în exerciţiul 479.

Pînă acum, am considerat plane care formează unghiuri egale cu planele feţelor unui triedru şi trec prin vîrful acestuia, precum şi cercurile mari corespunzătoare pe sferă. Să renunţăm acum la condiţia ca planul considerat să treacă prin vîrful triedrului.

Întrucît orice plan care formează cu planele feţelor unui triedru unghiuri egale este paralel cu planul care trece prin vîrful triedrului şi se bucură de aceeaşi proprietate, putem enunţa următoarea propoziţie generală:

Orice plan egal înclinat pe cele trei plane ale feţelor unui triedru taie trei plane bisectoare, care nu trec prin aceeaşi dreaptă, ale diedrelor formate de aceste plane după trei drepte perpendiculare pe muchiile respective.

480. 1° În soluţia exerciţiului 455, s-a arătat că orice plan egal înclinat pe cele două feţe ale unui diedru este paralel cu perpendiculara pe planul bisector al diedrului considerat sau pe perpendiculara pe planul bisector al suplementului său.

De aici rezultă imediat că planele egal înclinate pe cele două feţe ale unui diedru şi care taie muchia sa într-un punct dat S trec prin bisectoarea SM a

unghiului plan ASB al diedrului dat sau prin bisectoarea SN a unghiului plan suplementar (fig. 38 și 39).

Mai departe, rezultă de aici că *planele egal înclinate pe două drepte concurente SK și SL și care trec prin intersecția lor S, trec prin bisectoarea SN a unghiului KSL sau prin bisectoarea SM a suplementului său, și reciproc.* Pentru demon-

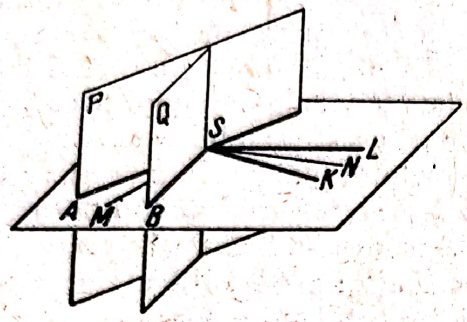


Fig. 38

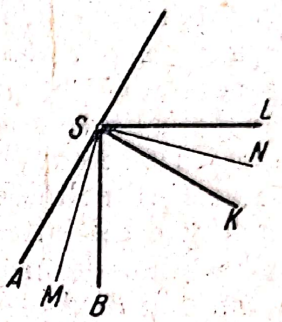


Fig. 39

strație, este suficient să ducem prin punctul S planele P și Q, respectiv perpendiculare pe SK și pe SL. În acest caz, orice plan egal înclinat pe aceste două plane este egal înclinat și față de dreptele SK și SL și reciproc. În adevăr, unghiul format de un plan arbitrar cu planul P (sau Q) este complementul unghiului (**365**) format de același plan cu dreapta SK (sau SL).

Folosind observația de mai sus, demonstrăm ușor propoziția noastră. Planul Π, care trece prin bisectoarea suplementului unghiului BSC al triedrului $S{\cdot}ABC$, este egal înclinat față de muchiile SB și SC. Dacă acest plan Π trece și prin bisectoarea suplementului unghiului CSA, el este egal înclinat și pe muchiile SC și SA. Prin urmare, planul Π formează unghiuri egale și cu muchiile SA și SB și trece deci prin bisectoarea unghiului ASB sau a suplementului acestuia. Însă planul Π intersectează, evident, numai prelungirile fețelor BSC și CSA (nu fețele înseși), din care cauză el nu poate intersecta însăși fața ASB și taie deci numai prelungirea ei. Așadar, planul Π nu trece prin bisectoarea unghiului ASB, ci prin bisectoarea suplementului său. Prin aceasta, am demonstrat că *bisectoarele suplementelor unghiurilor plane ale unui triedru se află în același plan Π, egal înclinat pe cele trei muchii.*

Pentru a obține propoziția analogă referitoare la bisectoarele celor două unghiuri plane ASB și ASC și la bisectoarea suplementului celui de-al treilea unghi BSC este suficient să aplicăm teorema demonstrată mai sus triedrului $S{\cdot}A'BC$, având ca muchii muchiile SB și SC ale triedrului dat și prelungirea SA' a muchiei SA dincolo de vîrful S.

În felul acesta, vom obține, în afară de planul Π, încă trei plane Π_1, Π_2 și Π_3 formînd fiecare unghiuri egale cu cele trei muchii. Se vede ușor că nu există alte plane care să treacă prin vîrful S și care să se bucure de aceeași proprietate.

Observație. Având în vedere aplicațiile ulterioare, vom da următoarea generalizare aproape evidentă a propoziției considerate:

Orice plan care formează unghiuri egale cu muchiile unui triedru taie planul fiecăreia dintre fețele acestuia după o dreaptă care formează unghiuri egale cu muchiile situate în acest plan.

Aceasta rezultă din faptul că orice plan care formează unghiuri egale cu muchiile este paralel cu unul dintre planele Π, Π_1, Π_2 și Π_3.

2° Orice dreaptă care trece prin vîrful S al unui triedru $S\cdot ABC$ și este situată într-un plan perpendicular pe fața BSC și care trece prin bisectoarea unghiului BSC formează unghiuri egale cu muchiile SB și SC, și reciproc (**346**). Deci deapta de intersecție, Δ, a două dintre aceste plane formează unghiuri egale cu cele trei muchii SA, SB și SC și este situată, din această cauză, într-un al treilea plan, determinat în mod analog. Așadar, *cele trei plane despre care este vorba sînt concurente după o dreaptă* Δ.

Planul care trece prin bisectoarea unghiului BSC și este perpendicular pe planul BSC este perpendicular, evident, și pe bisectoarea suplementului unghiului BSC, deci și pe planul Π care trece prin această bisectoare. Dreapta Δ, ca intersecție a planelor perpendiculare pe Π, este perpendiculară pe planul Π.

La intersecția triedrului și a dreptei Δ cu o sferă arbitrară de centru S, obținem un triunghi sferic ABC și punctele O și O'. Deoarece dreapta Δ formează unghiuri egale cu muchiile SA, SB și SC, arcele OA, OB și OC sînt egale. Aceasta ne arată că punctul O (și diametral opusul său O') este polul cercului circumscris triunghiului ABC.

Mai departe, deoarece dreapta Δ formează unghiuri egale cu dreptele SA, SB și SC, rezultă că, coborînd dintr-un punct arbitrar al acestei drepte perpendiculare pe cele trei muchii, obținem trei triunghiuri dreptunghice egale. Din examinarea acestor triunghiuri, reiese că *orice punct al dreptei* Δ *este egal depărtat de cele trei muchii ale triedrului.*

Putem obține încă trei drepte Δ_1, Δ_2 și Δ_3, care au aceeași proprietate, înlocuind în construcția care determină dreapta Δ una dintre muchii, să zicem SA, prin prelungirea ei dincolo de vîrful S. În acest caz, bisectoarele unghiurilor ASB și ASC se înlocuiesc prin bisectoarele suplementelor lor. Din soluția exercițiului 441, reiese că cele patru drepte Δ, Δ_1, Δ_2 și Δ_3 formează locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei muchii.

481. Fie ABC un triunghi sferic dat; AD, BE și CF medianele sale (fig. 40), S centrul sferei.

Deoarece dreapta SD taie arcul BC în două părți egale, ea taie în două părți egale și coarda BC, în punctul D_0, astfel că $D_0B = D_0C$. Tot astfel, dreptele SE și SF trec prin mijloacele E_0 și F_0 ale coardelor AC și AB. Dreptele AD_0, BE_0 și CF_0 sînt concurente, ca mediane ale triunghiului rectiliniu ABC. Prin urmare, planele ASD_0, BSE_0 și CSF_0 sînt secante după o dreaptă δ, iar arcele AD, BF și CF, situate în aceste plane, sînt concurente în punctul G.

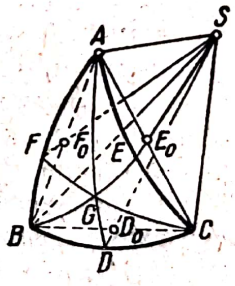


Fig. 40

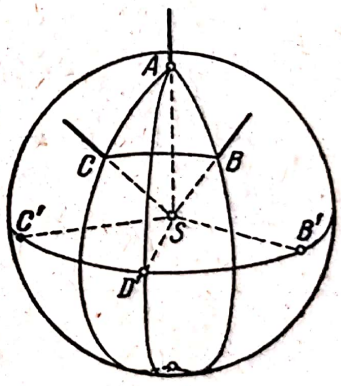


Fig. 41

Planele care trec prin fiecare muchie a triedrului $S\cdot ABC$ și prin bisectoarele unghiurilor plane opuse coincid cu planele ASD_0, BSE_0 și CSF_0 și sînt deci secante, cum rezultă din cele de mai sus, după o dreaptă δ.

481 *bis*. Fie $S\cdot ABC$ (fig. 41) un triedru dat, Sa dreapta de intersecție a planului BSC cu planul bisector al suplementului diedrului de muchie

SA (dreapta Sa nu este reprezentată în figură), iar Sb și Sc cu aceeași semnificație.

Să considerăm triedrul $S\cdot A'B'C'$, suplementul (**377**) triedrului dat (muchia SA' nu este reprezentată în figură) și bisectoarea SD' a unghiului său plan $B'SC'$. În virtutea proprietăților triedrului suplementar, dreapta SD' este situată în planul bisector al diedrului de muchie SA al triedrului dat și perpendiculară pe această muchie. În consecință, SD' este perpendiculară pe planul bisector ASa al suplementului diedrului de muchie SA. În afară de aceasta, dreapta SA' este, prin definiție, perpendiculară pe planul BSC. Deoarece dreptele SD' și SA' sînt respectiv perpendiculare pe planele ASa și BSC, planul $A'SD'$, care trece prin ele, este perpendicular pe aceste două plane, deci și pe intersecția lor Sa. Așadar, dreapta Sa este perpendiculară pe planul $A'SD'$, care trece prin muchia SA' a triedrului suplementar $S\cdot A'B'C'$ și prin bisectoarea SD' a unghiului $B'SC'$. În baza acelorași considerații, dreptele Sb și Sc sînt perpendiculare respectiv pe celelalte două plane analoge $B'SE'$ și $C'SF'$.

Deoarece planele $A'SD'$, $B'SE'$ și $C'SF'$ trec, conform exercițiului 481, prin aceeași dreaptă δ', dreptele Sa, Sb și Sc sînt situate într-un același plan Π, perpendicular pe dreapta δ'.

Observație. Proprietatea triedrului, considerată la exercițiul 481, subsistă dacă vom lua bisectoarea unuia dintre unghiurile plane și bisectoarele suplementelor celorlalte două unghiuri plane ale sale, iar proprietatea considerată în exercițiul de față, dacă vom lua planul bisector al suplementului unuia dintre diedre și planele bisectoare ale celorlalte două diedre.

Pentru demonstrație, este suficient să considerăm triedrul care se obține din cel dat, înlocuind una dintre muchii prin prelungirea ei dincolo de vîrf (compară cu soluțiile ex. 479 și ex. 480, 1°).

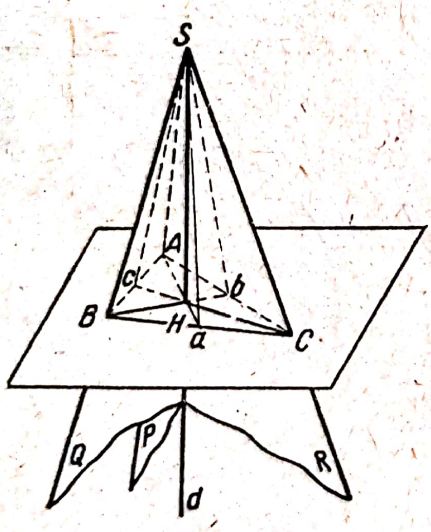


Fig. 42

482. 1°. Să presupunem că muchiile SB și SC ale unui triedru dat $S\cdot ABC$ intersectează, în punctele B și C, planul perpendicular în punctul A pe muchia SA (fig. 42).

Planul P, care trece prin muchia SA și este perpendicular pe fața BSC, este perpendicular pe planul ABC (deoarece trece prin perpendiculara SA pe acest plan). Deoarece este perpendicular, prin ipoteză, și pe planul BSC, el este perpendicular și pe dreapta BC. Deci planul P intersectează planul ABC după o dreaptă perpendiculară pe BC, adică după înălțimea Aa a triunghiului ABC.

Planul care trece prin SB și este perpendicular pe fața CSA intersectează planul ABC, de asemenea perpendicular pe ASC, după dreapta Bb, care este perpendiculară pe planul CSA, deci și pe dreapta CA. Din aceeași cauză, planul care trece prin muchia SC și este perpendicular pe fața ASB intersectează planul ABC după dreapta Cc, prependiculară pe AB.

Așadar, planele despre care este vorba taie planul triunghiului ABC după înălțimile sale. Deoarece înălțimile triunghiului sînt concurente în

punctul H, cele trei plane se intersectează după aceeași dreaptă d, care trece prin punctele S și H.

Am presupus pînă acum că muchiile SB și SC ale triedrului dat intersectează planul perpendicular pe muchia SA în punctele B și C, cu alte cuvinte, că unghiurile plane ASB și ASC nu sînt drepte. În cazul în care unul dintre aceste unghiuri este drept, iar celelalte două unghiuri plane ale triedrului considerat nu sînt drepte, putem relua raționamentele precedente, înlocuind planul perpendicular pe muchia SA printr-un plan perpendicular pe o altă muchie, anume pe latura comună a celor două unghiuri plane care nu sînt drepte. Dacă triedrul dat are două unghiuri plane drepte, teorema de față își pierde interesul (deși, formal, ea își păstrează sensul); dacă toate unghiurile plane ale triedrului considerat sînt drepte, teorema își pierde sensul. De aceea, proprietatea considerată a triedrului poate fi considerată ca demonstrată în toate cazurile.

Vom obține propoziția corespunzătoare pentru un triunghi sferic, unind vîrfurile sale cu centrul sferei și aplicînd triedrului obținut propoziția demonstrată mai sus.

2° Dreapta situată în planul BSC care trece prin punctul S și este perpendiculară pe SA va fi perpendiculară pe proiecția Sa a dreptei SA pe planul BSC. Fiind perpendiculară pe SA și pe Sa, ea va fi perpendiculară și pe planul ASa, deci și pe dreapta d. Așadar, cele trei drepte despre care este vorba sînt perpendiculare pe dreapta d și se află deci în planul p, care trece prin S și este perpendicular pe d.

Observație. Din cele de mai sus, rezultă cu ușurință următoarea teoremă, pe care o vom folosi ulterior: *dacă un plan taie două fețe ale unui triedru după drepte respectiv perpendiculare pe muchiile opuse, atunci acest plan intersectează și a treia față după o dreaptă perpendiculară pe muchia opusă.*

În adevăr, acest plan va fi paralel cu planul p.

3° Fie dat triedrul $S{\cdot}ABC$. Construim pentru el dreptele D, D_1, D_2 și D_3 (ex. 479), planele P, P_1, P_2 și P_3 (ex. 479 *bis*), planele Π, Π_1, Π_2 și Π_3 (ex. 480, 1°), dreptele Δ, Δ_1, Δ_2, și Δ_3 (ex. 480, 2°), dreapta δ (ex. 481), planul Π (ex. 481 *bis*), dreapta d (ex. 482, 1°) și planul p (ex. 482, 2°).

Să notăm cu $S{\cdot}A'B'C'$ triedrul suplementar cu cel dat (**377**) și cu D', D'_1, ..., d', p' dreptele și planele analoge cu cele enumerate mai sus, corespunzătoare acestui din urmă triedru.

Dreapta D este egal înclinată pe fețele BSC, CSA și ASB ale triedrului dat. Unghiul dintre dreapta D și semidreapta SA' (sau SB' sau SC') este complementul unghiului format de dreapta D cu planul BSC (sau cu CSA sau cu ASB). De aici rezultă că dreapta D este egal înclinată pe semidreptele SA', SB' și SC', deci ea coincide cu dreapta Δ' a unghiului $SA'B'C'$.

Dacă înlocuim triedrul $S{\cdot}ABC$ prin $S{\cdot}A_1BC$, unde SA_1 este prelungirea dincolo de vîrful S a muchiei SA, triedrul suplementar va fi înlocuit prin triedrul $S{\cdot}A'_1B'C'$, unde SA'_1 este prelungirea muchiei SA' dincolo de vîrful S. Repetînd pentru triedrele $S{\cdot}A_1BC$ și $S{\cdot}A'_1B'C'$ raționamentul de mai sus, ne convingem că dreapta D_1 coincide cu Δ'_1. Așadar, dreptele D, D_1, D_2 și D_3 coincid cu dreptele Δ', Δ'_1, Δ'_2 și Δ'_3. De aceea, și planele P, P_1, P_2 și P_3, respectiv perpendiculare pe D, D_1, D_2 și D_3, coincid cu planele Π', Π'_1, Π'_2 și Π'_3, respectiv perpendiculare pe Δ', Δ'_1, Δ'_2 și Δ'_3.

Deoarece nu numai triedrul $S{\cdot}A'B'C'$ este suplementarul lui $SABC$, ci și triedrul $S{\cdot}ABC$ este suplimentarul lui $S{\cdot}A'B'C'$ (**377**), rezultă de aici că dreptele Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 și planele Π, Π_1', Π_2', Π_3' coincid respectiv cu dreptele D', D_1', D_2', D_3' și cu planele P', P_1', P_2', P_3'.

Din cele spuse în soluția exercițiului 481 *bis*, rezultă că planul Π este perpendicular pe dreapta δ', iar planul Π', pe dreapta δ.

Să considerăm, în sfîrșit, planul ASa (v. 1°; fig. 42), care trece prin muchia SA și este perpendicular pe planul feței BSC a triedrului $S{\cdot}ABC$. Deoarece acest plan trece prin dreapta SA, el va fi perpendicular pe planul feței $B'SC'$ a triedrului suplementar $S{\cdot}A'B'C'$, și deoarece este perpendicular pe planul BSC, el trece prin muchia sa SA'. Așadar, planul ASa trece prin muchia SA' și este perpendicular pe planul feței $B'SC'$ a triedrului $S{\cdot}A'B'C'$. De aceeași proprietate se bucură și planele BSb și CSc. De aici rezultă că dreapta d corespunzătoare triedrului $S{\cdot}ABC$ (v. mai sus, 1°) coincide cu dreapta analogă d' a triedrului suplementar $S{\cdot}A'B'C'$, iar planul p al triedrului $S{\cdot}ABC$ (v. mai sus, 2°), perpendicular pe dreapta d, coincide cu planul corespunzător p' al triedrului suplementar $S{\cdot}A'B'C'$.

483. Să intersectăm, ca la soluția 482 1°, triedrul dat $S{\cdot}ABC$ cu un plan perpendicular pe muchia SA (fig. 42). Proiecția muchiei SA pe planul BSC coincide, evident, cu dreapta notată acolo cu Sa; tot astfel, proiecțiile muchiilor SB și SC pe fețele opuse vor coincide cu dreptele Sb și Sc. În acest caz, dreptele Aa, Bb și Cc vor fi iarăși înălțimile triunghiului ABC, deci și (ex. 71) bisectoarele triunghiului abc.

Să considerăm acum diedrul de muchie Sa al triedrului $S{\cdot}abc$ și să-i aplicăm rezultatele exercițiului 461. Dreapta SA taie muchia sa în punctul S. Planul ABC, perpendicular pe dreapta SA, taie fețele sale după dreptele ab și ac, astfel că dreapta aA este bisectoarea unghiului bac (sau a suplementului său). În virtutea exercițiului 461, planul ASa este unul dintre planele bisectoare ale unghiurilor formate de planele aSb și aSc, adică de fețele triedrului $S{\cdot}abc$. Evident, același lucru are loc și pentru planele BSb și CSc.

484. Din examinarea figurii 41, vedem că pentru un observator așezat în punctul A, cele două unghiuri plane BSC și $B'SC'$ vor avea același sens (în figură, ambele unghiuri au sensul mersului acelor de ceasornic). Deoarece punctul A' este situat, conform definiției triedrului suplementar, de aceeași parte a planului $B'SC'$ ca și punctul A, unghiul $B'SC'$ va avea același sens pentru observatorii aflați în punctele A și A'. Așadar, unghiul BSC va avea, pentru un observator din punctul A, același sens ca și unghiul $B'SC'$, pentru un observator din punctul A'.

Aceasta arată (compară cu nr. **374** *bis*) că triedrele suplementare $S{\cdot}ABC$ și $S{\cdot}A'B'C'$ au aceeași orientare.

485. Fie CSD (fig. 43) planul bisector al diedrului de muchie SC al triedrului isoscel $S{\cdot}ABC$, în care unghiurile plane ASC și BSC sînt egale.

Cele două triedre $S{\cdot}ACD$ și $S{\cdot}BCD$ sînt simetrice (**379**, cazul 2), deoarece unghiul plan CSD este comun, unghiurile plane ASC și BSC sînt egale, iar diedrele de muchie SC sînt de asemenea egale. De aici rezultă că și diedrele de muchie SD sînt egale, astfel încît planul CSD este perpendicular pe planul ASB și unghiurile plane ASD și BSD sînt egale; deci dreapta SD este bisectoarea unghiului ASB.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă planul bisector CSD al unui triedru $S\cdot ABC$ este perpendicular pe muchia ASB, atunci triedrele $S\cdot ACD$ și $S\cdot BCD$ sînt simetrice (**379**, cazul 1) deoarece au unghiul plan CSD comun, iar diedrele adiacente lui, de muchii SC și SD din aceste două triedre sînt egale. De aici rezultă că $\widehat{ASC} = \widehat{BSC}$, astfel că triedrul $S\cdot ABC$ este isoscel.

Mai departe, dacă planul CSD, care trece prin muchia SC a unui triedru $S\cdot ABC$ și prin bisectoarea SD a unghiului ASB, este perpendicular pe planul acestuia din urmă, triedrele $S\cdot ACD$ și $S\cdot BCD$ sînt simetrice (**379**, cazul 2), deoarece au unghiul plan CSD comun, unghiurile plane ASD și BSD egale și diedrele de muchie SD egale. De aici urmează că sînt egale și unghiurile lor plane ASC și BSC, astfel că diedrul $S\cdot ABC$ este isoscel.

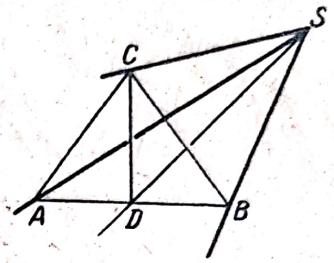


Fig. 43

În sfîrșit, fie SD bisectoarea unghiului plan ASB al unui triedru arbitrar $S\cdot ABC$, în care

$$\widehat{ASC} > \widehat{BSC}. \qquad (1)$$

Să comparăm cele două triedre $S\cdot ACD$ și $S\cdot BCD$. Aceste triedre au cîte două unghiuri plane respectiv egale, alăturate muchiei SD (unghiul CSD este comun, $\widehat{ASD} = \widehat{BSD}$). Dacă am presupune că și diedrele de muchie SD sînt egale, atunci aceste două triedre ar fi egale, iar unghiul ASC ar fi egal cu unghiul BSC, ceea ce contrazice condiția (1).

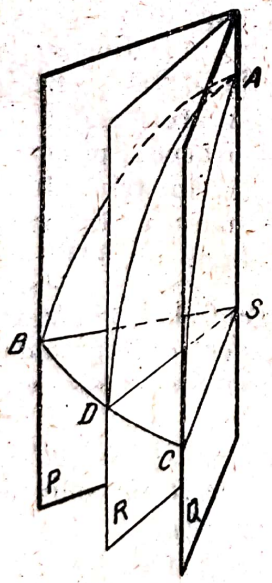


Fig. 44

Dacă vom presupune că diedrul de muchie SD din triedrul $S\cdot ACD$ este mai mic decît diedrul de aceeași muchie din $S\cdot BCD$, am avea $\widehat{ASC} < \widehat{BSC}$ (potrivit teoremei de la nr. **379** *ter*), ceea ce contrazice iarăși condiția (1). De aceea, rămîne unica ipoteză posibilă, și anume că unghiul diedru de muchie SD din triedrul $S\cdot ACD$ este mai mare decît diedrul de aceeași muchie din triedrul $S\cdot BCD$. Cu alte cuvinte, unghiul plan mai mare, ASC, se vede de pe bisectoarea SD a unghiului ASB sub un unghi diedru obtuz, iar unghiul mai mic, BSC, sub un unghi diedru ascuțit.

486. Să alegem, în planul bisector R al diedrului format din planele P și Q (fig. 44), dreapta SD, perpendiculară pe muchia SA, și să ducem prin ea un plan arbitrar. Să notăm cu SB și cu SC semidreptele după care acest plan taie fețele diedrului. În virtutea celor arătate la soluția exercițiului 461 *bis*, dreapta SD va fi bisectoarea unghiului plan BSC. Așadar, putem obține un triedru *neisoscel*, în care planul bisector ASD al diedrului de muchie SA trece prin bisectoarea SD a unghiului plan BSC.

Intersectînd triedrul $S\cdot ABC$ cu suprafața unei sfere de centru S, vom obține triunghiul sferic neisoscel ABC, în care bisectoarea SD coincide cu o

mediană. Prin aceasta, am arătat că *propoziția considerată în exercițiul* 5, 3° *din geometria plană nu are loc în geometria sferică.*

Fie acum mediana AD a triunghiului sferic ABC (fig. 45), egală cu un sfert de cerc mare. Luăm pe prelungirea arcului AD, dincolo de punctul D, arcul $DE = AD$. Triunghiurile ABD și ECD vor fi egale (**379**, cazul 2), deoarece $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$; $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ și $\widehat{AD} = \widehat{ED}$. Deci aici căpătăm

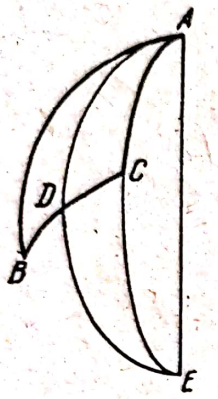


Fig. 45

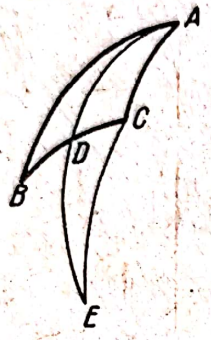


Fig. 46

$$\widehat{BAD} = \widehat{CED}, \qquad (1)$$

$$CE = AB. \qquad (2)$$

Deoarece arcul ADE este egal cu jumătatea unui cerc mare, punctul E este diametral opus punctului A, iar punctele A, C și E sînt situate pe același cerc mare, astfel că $\widehat{CED} = \widehat{CAD}$. Din compararea acestei egalități cu egalitatea (1), reiese că $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, astfel că AD este bisectoarea unghiului BAC. Mai departe, în virtutea lui (2), avem $AB + AC = EC + AC = ACE = ADE = 2AD$. Așadar, *dacă mediana unui triunghi sferic este egală cu un sfert de cerc mare, ea este totodată bisectoarea unghiului din al cărui vîrf a fost dusă și egală cu semisuma laturilor acestui unghi.*

Fie, mai departe, mediana AD a triunghiului sferic ABC (fig. 46) mai mică decît un sfert de cerc mare. Luăm iarăși pe prelungirea arcului AD dincolo de punctul D arcul $DE = AD$. La fel ca mai sus, triunghiurile ABD și ECD vor fi egale, și vom avea iarăși egalitățile (1) și (2). În acest caz, arcul $ADE = ADE = 2AD$ va fi mai mic decît jumătatea unui cerc mare, și, de aceea, punctul D se va afla pe latura AE a triunghiului sferic ACE. Dacă, în triunghiul considerat, avem $AB > AC$, atunci în triunghiul ACE vom avea (în baza egalității $CE = AB$) $CE > AC$. De aici (potrivit teoremei de la nr. **381**), rezultă că $\widehat{CAD} > \widehat{CED}$, astfel că, în virtutea egalității (1), avem $\widehat{CAD} > \widehat{BAD}$. Așadar, *dacă mediana unui triunghi este mai mică decît un sfert de cerc mare ea formează cu cea mai mare dintre laturile între care se află, un unghi mai mic decît cu cealaltă latură.*

Mai departe, în acest caz, avem $ADE = 2AD < AC + CE = AB + AC$, astfel că, *dacă mediana unui triunghi este mai mică decît un sfert de cerc mare, ea este mai mică decît semisuma laturilor care o cuprind.*

Fie, ca mai sus, mediana AD a triunghiului sferic ABC (fig. 47) mai mică de un sfert de cerc mare și să presupunem, pentru a fixa ideile, că latura AB este mai mare decît AC. În acest caz, punctul A este distinct de polii cercului mare BC și prin el trece (**383**) un singur cerc mare IAH, perpendicular pe BC. Să notăm cu I și cu H picioarele celui mai mic și celui mai mare dintre arcele perpendiculare AI și AH, coborîte din punctul A pe cercul mare BC (compară cu nr. **384**). Fie, mai departe, K și L mijloacele

arcelor în care punctele I și H împart cercul mare BC, astfel încît fiecare dintre arcele $IK = KH = HL = LI$ este egal cu un sfert de cerc mare. În aceste condiții, punctele K și L sînt, evident, polii cercului mare IAH, iar arcele $AK = AL$ sînt, de asemenea, egale cu un sfert de cerc mare.

Deoarece mediana AD este, prin ipoteză, mai mică decît un sfert de cerc mare, rezultă că, potrivit teoremei despre lungimea arcelor perpendiculare și oblice (**384**), punctul D se află (fig. 47 și 48) între punctul I și unul dintre punctele K și L, să zicem K (punctul D nu poate coincide cu I, deoarece, în acest caz, triunghiul ABC ar fi echilateral; compară cu ex. 485, 2°). Mai departe, dat fiind că latura BC este, evident, mai mică decît un semicerc mare, arcul DB este mai mic decît un sfert de cerc mare. În același timp, arcul DKH este mai mare decît un sfert de cerc mare din care cauză punctul H nu se găsește pe arcul BC. Deoarece $\widehat{BAD} < \widehat{CAD}$, după cum am demonstrat mai sus, bisectoarea AM a triunghiului ABC trece prin interiorul unghiului DAC, iar punctele H, B, D, M și C se succed pe cercul mare BC în ordinea indicată aici. Totodată, punctul C poate fi cuprins între punctele B și I ca în figurile 47 și 48, sau punctul I poate fi între B și C, ca în fig. 49. În acest din urmă caz, în virtutea inegalității $AB > AC$, vom avea și $BI > IC$, de unde $\widehat{BAI} > \widehat{CAI}$, astfel că punctul M se află între B și I. Așadar, în ambele cazuri, punctele H, B, D, M și I se succed pe cercul mare BC în ordinea în care le enumărăm aici. Prin urmare, avem (în virtutea teoremei despre lungimea arcelor oblice, **384**) $AD > AM$. În consecință, *dacă mediana AD este mai mică decît un sfert de cerc mare, atunci ea este mai mare decît bisectoarea AM a unghiului BAC.*

Fie, în aceeași ipoteză, mediana AD mai mică decît un sfert de cerc mare, B_0 punctul diametral opus lui B. Deoarece punctul D este situat între

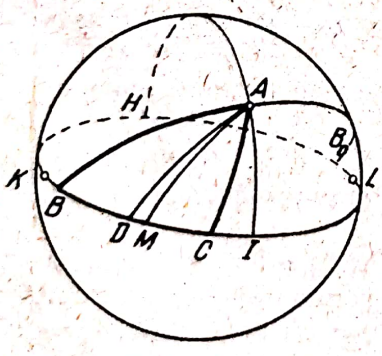


Fig. 47

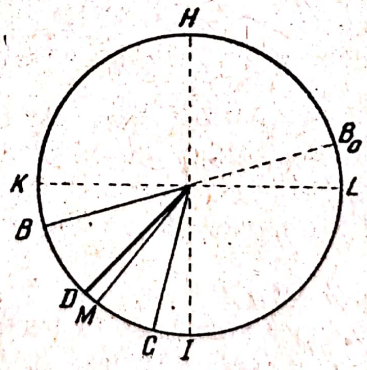


Fig. 48

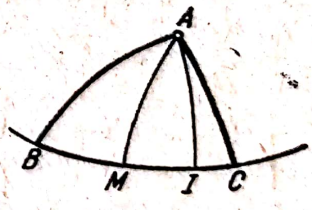


Fig. 49

I și K, iar arcul DB este mai mic decît un sfert de cerc mare, reiese că punctul B se află pe arcul IKH, iar punctul B_0 pe arcul ILH.

Să presupunem că punctul I este situat între punctele C și B_0 (fig. 47 și 48). Deoarece punctul D se află între punctele I și K și avem, totodată, $BD = DC$, arcul CI este mai mic decît arcul BH, și deci mai mic decît arcul $B_0I = BH$. Punctele C și B_0 pot fi situate de aceeași parte a punctului I.

Deoarece arcul BC este mai mic decît un semicerc, punctul C va fi situat, în acest caz, între I și B_0, și vom avea iarăși $CI < B_0I$.

Deoarece $CI < B_0I$, avem și $AC < AB_0$, deci $AB + AC < AB + AB_0$. Deoarece suma arcelor $AB + AB_0$ este egală cu un semicerc mare, rezultă de aici că, *dacă mediana unui triunghi este mai mică decît un sfert de cerc mare semisuma laturilor care o cuprind este, de asemenea, mai mică decît un sfert de cerc mare.*

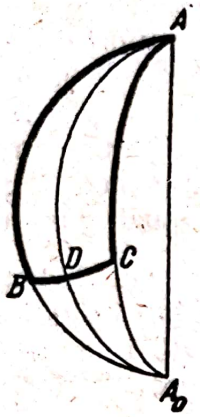


Fig. 50

Să considerăm acum cazul în care mediana AD este mai mare decît un sfert de cerc mare (fig. 50). Să prelungim laturile AB, AC și mediana AD pînă la intersecția lor în punctele A_0, diametral opus lui A. Mediana A_0D din triunghiul A_0BC este mai mică decît un sfert de cerc mare. Dacă acum $AB > AC$, avem și $A_0C > A_0B$, și, conform celor demonstrate, $\overset{\frown}{CA_0D} < \overset{\frown}{BA_0D}$, adică $\overset{\frown}{CAD} < \overset{\frown}{BAD}$. Așadar, dacă *mediana este mai mare decît un sfert de cerc mare, ea formează cu cea mai mare dintre laturile care o cuprind un unghi mai mare decît cu cealaltă.*

Mai departe, vom avea, în acest caz, potrivit celor demonstrate, $2A_0D < A_0B + A_0C$, iar în virtutea unei egalități evidente, $2AD + 2A_0D = (A_0B + A_0C) + (AB + AC)$; de aici urmează că $2AD > AB + AC$. Dacă AM este bisectoarea unghiului BAC, atunci A_0M va fi bisectoarea unghiului BA_0C, iar din inegalitatea demonstrată $A_0D > A_0M$, rezultă că $AD < AM$. În sfîrșit, deoarece arcul $\frac{1}{2}(A_0B + A_0C)$ este mai mic decît un sfert de cerc mare, $\frac{1}{2}(AB + AC)$ este mai mare decît un sfert de cerc mare. Prin urmare, *dacă mediana este mai mare decît un sfert de cerc mare au loc inegalitățile opuse celor date mai sus pentru cazul medianei mai mici decît un sfert de cerc mare.*

Așadar, mediana unui triunghi sferic poate forma cu cea mai mare dintre laturile între care este cuprinsă atît un unghi mai mic decît unghiul format cu cealaltă latură, cît și un unghi egal sau mai mare decît el. Prin urmare, *propoziția studiată la exercițiul 7 din geometria plană nu este adevărată în geometria sferică.*

Întrucît mediana unui triunghi sferic poate fi mai mică decît semisuma laturilor care o cuprind, precum și egală cu această semisumă sau mai mare, rezultă că *prima afirmație din propoziția tratată la exercițiul 11 din geometria plană nu este valabilă în geometria sferică.* Menționăm că a doua afirmație din aceeași teoremă, împreună cu demonstrația ei, subsistă și în geometria sferică.

Dat fiind că putem construi fără dificultate un triunghi sferic în care fiecare mediană să fie mai mare decît un sfert de cerc mare, urmează că *a doua afirmație din propoziția considerată la exercițiul 12 din geometria plană nu este valabilă în geometria sferică.* În adevăr, într-un astfel de triunghi, fiecare mediană este mai mare decît semisuma laturilor între care este cuprinsă, astfel că suma medianelor este mai mare decît perimetrul. Prima afirmație a aceleiași teoreme, împreună cu demonstrația ei, rămîne în vigoare și în geometria sferică.

Scanned with OKEN Scanner

Mai observăm că *mediana unui triunghi sferic este întotdeauna mai mare decît semidiferența laturilor care o cuprind*. În adevăr, să presupunem că mediana AD din triunghiul sferic ABC este mai mică decît un sfert de cerc mare și că $AB > AC$. Luînd pe prelungirea medianei arcul $DE = AD$ (fig. 46), vom avea $AE > EC - AC$, adică $AE > AB - AC$, de unde $AD > \frac{1}{2}(AB - AC)$. Dacă mediana este egală cu un sfert de cerc mare sau mai mare, atunci propoziția este evidentă. Vom avea ocazia să folosim această observație mai jos.

Deoarece, în fiecare dintre cele trei cazuri considerate, avem cîte o singură ipoteză — mediana este respectiv a) egală cu un sfert de cerc mare, b) mai mică decît un sfert de cerc mare și c) mai mare decît un sfert de cerc mare — și mai multe concluzii (prima concluzie se referă la relația dintre mediană și bisectoare; a doua, la unghiurile formate de mediană cu laturile care o cuprind; a treia, la relația dintre mediană și semisuma laturilor; și, în sfîrșit, a patra, la relația dintre semisuma laturilor și sfertul de cerc mare), vom avea un șir întreg de reciproce, în funcție de cazurile (a), (b) sau (c) pe care le avem în vedere și de concluzia teoremei directe pe care o vom adopta ca ipoteză a reciprocei (compară, de exemplu, cu nr. **363** *bis*, sau cu nr. **46**).

Trecînd la enunțarea reciprocelor teoremelor demonstrate mai sus, vom reuni reciprocele cu conținut analog. În felul acesta, obținem următoarea listă de reciproce:

1) *Dacă bisectoarea unui triunghi sferic este egală cu un sfert de cerc mare ea este, totodată, și mediană în acest triunghi.*

În adevăr fie bisectoarea AD a triunghiului sferic ABC (v. fig. 45) egală cu un sfert de cerc mare. Luăm iarăși pe prelungirea arcului AD, dincolo de punctul D, arcul $DE = AD$. Deoarece arcul ADE este egal cu un semicerc mare, punctele A, C și E sînt situate pe același cerc mare, și deci $\overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{BAD}$. Triunghiurile sferice ABD și CED sînt egale (primul caz de egalitate, nr. **379**) deoarece $AD = ED$, $\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{EDC}$, $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CED}$. De aici rezultă $BD = CD$, astfel că AD este mediană în triunghiul ABC.

2) *Dacă mediana unui triunghi sferic este, totodată, și bisectoarea unghiului din al cărui vîrf este dusă, atunci ori mediana este egală cu un sfert de cerc mare ori triunghiul este isoscel.*

3) *Dacă mediana unui triunghi sferic formează cu cea mai mare dintre laturile care o cuprind un unghi mai mic (mai mare) decît cu cealaltă latură, atunci mediana este mai mică (mai mare) decît un sfert de cerc mare.*

4) *Dacă mediana unui triunghi sferic este mai mare (mai mică) decît bisectoarea dusă din același vîrf cu ea, atunci mediana este mai mică (mai mare) decît un sfert de cerc mare.*

5) *Dacă mediana unui triunghi sferic este egală cu semisuma laturilor (mai mică, mai mare decît semisuma laturilor) care o cuprind, atunci mediana este egală cu un sfert de cerc mare (mai mică, mai mare decît un sfert de cerc mare).*

6) *Dacă semisuma a două laturi într-un triunghi sferic este egală cu un sfert de cerc mare (mai mică, mai mare decît un sfert de cerc mare), atunci mediana dusă din vîrful lor comun este de asemenea egală cu un sfert de cerc mare (mai mică, mai mare decît un sfert de cerc mare).*

Întrucît, în cele trei teoreme directe, concluziile cuprind toate posibilitățile existente aici, reciprocele (2)—(6) se demonstrează ușor prin reducere la absurd (compară cu nr. 71).

Vom da demonstrația uneia dintre teoremele de la pct. 3. Să presupunem că, într-un triunghi arbitrar, mediana este mai mare decît bisectoarea. Dacă mediana ar fi egală cu un sfert de cerc mare sau mai mare, atunci, în virtutea teoremelor directe, mediana ar fi egală cu bisectoarea sau mai mică, ceea ce contrazice ipoteza. În consecință, mediana este mai mică decît un sfert de cerc mare.

Celelalte reciproce se demonstrează în mod analog.

În cazul unui triedru, propozițiile corespunzătoare teoremelor directe demonstrate mai sus se enunță astfel:

Dacă bisectoarea unuia dintre unghiurile plane ale unui triedru este perpendiculară pe muchia opusă, ea este situată în planul bisector al diedrului cu această muchie (indiferent dacă triedrul este sau nu isoscel); *suma celorlalte două unghiuri plane ale triedrului va fi egală cu 2 dr.*

Dacă bisectoarea unuia dintre unghiurile plane ale unui triedru formează cu muchia opusă SA un unghi ascuțit (obtuz), atunci planul care trece prin această bisectoare și prin muchia SA formează cu planul celui mai mare dintre celelalte două unghiuri plane un diedru mai mic (mai mare) decît cu planul celui mai mic dintre ele; unghiul dintre această bisectoare și muchia SA va fi mai mare (mai mic) decît unghiul plan format la intersecția triedrului dat cu planul bisector al diedrului de muchie SA (cu excepție pentru cazul triedrului isoscel) *și mai mic (mai mare) decît semisuma celorlalte două unghiuri plane; suma acestor două din urmă unghiuri plane va fi mai mică (mai mare) decît 2 dr.*

Mai departe, *unghiul format de bisectoarea unuia dintre unghiurile plane ale unui triedru cu muchia opusă va fi întotdeauna mai mare decît semidiferența celorlalte două unghiuri plane.*

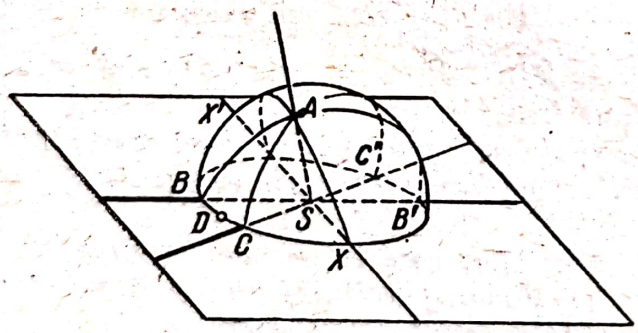


Fig. 51

Dintre teoremele referitoare la triedru și corespunzătoare reciprocelor de mai sus, vom enunța ca exemplu pe cea analogă teoremei (5).

Dacă suma a două unghiuri plane într-un triedru este egală cu 2 dr (mai mică, mai mare decît 2 dr), atunci bisectoarea celui de-al treilea unghi plan formează cu muchia opusă un unghi drept (ascuțit, obtuz).

Să presupunem acum că, în triedrul $S \cdot ABC$ (fig. 51) unghiul plan ASB este mai mare decît ASC. Ducem bisectoarea SX a unghiului $B'SC$, unde SB' este prelungirea muchiei SB. În acest caz, în triedrul $S \cdot AB'C$, vom avea $\widehat{ASC} + \widehat{ASB'} < \widehat{ASB} + \widehat{ASB'} = 180°$. Prin urmare, în virtutea teoremei enunțate mai sus, unghiul ASX este ascuțit. În acest caz, potrivit celor demonstrate mai înainte, avem $\widehat{ASX} < \frac{1}{2}(\widehat{ASB'} + \widehat{ASC}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{ASB} +$

$+\widehat{ASC})$ și $\widehat{ASX} > \frac{1}{2}(\widehat{ASB'} - \widehat{ASC}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{ASB} - \widehat{ASC})$. De aici avem $\frac{1}{2}(\widehat{ASB} - \widehat{ASC}) < 90° - \widehat{ASX} < \frac{1}{2}(\widehat{ASB} + \widehat{ASC})$. Dacă, în locul bisectoarei SX a unghiului $B'SC$, am fi luat prelungirea ei SX', am avea $\widehat{ASX'} - 90° = 90° - \widehat{ASX}$, adică unghiurile $\widehat{ASX}$ și $\widehat{ASX'}$ satisfac condiția din enunț.

Presupunînd că $\widehat{ASB} > \widehat{ASC}$, am eliminat cazul egalității celor două unghiuri plane ASB și ASC. Dacă însă $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$, atunci $\widehat{ASB'} + \widehat{ASC} = 180°$, și, conform celor demonstrate mai sus, $\widehat{ASX} = 90°$. Reciproc, dacă $\widehat{ASX} = 90°$, atunci $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$. Acest caz nu prezintă interes aici.

Prin urmare, am demonstrat următoarea propoziție: *dacă unghiul dintre o muchie a unui triedru și bisectoarea unghiului suplementar cu unghiul plan opus este ascuțit sau obtuz, atunci el diferă de unghiul drept cu o mărime cuprinsă între semisuma și semidiferența celorlalte două unghiuri plane.*

În sfîrșit, să intersectăm triedrul $S \cdot ABC$ cu suprafața unei sfere de centru S. Bisectoarea SX a unghiului plan $B'SC$ determină, pe prelungirea laturii BC a triunghiului, punctul X, a cărui distanță DX la mijlocul D al laturii BC este egală cu un sfert de cerc mare (deoarece bisectoarele SD și SX ale unghiurilor BSC și $B'SC$ sînt perpendiculare). Vom numi acum, pentru a scurta exprimarea, *mediană exterioară* a unui triunghi sferic (în analogie cu bisectoarea exterioară) arcul care unește un vîrf al acestuia cu unul dintre punctele de pe prelungirea laturii opuse și a căror distanță la mijlocul acestei laturi este egală cu un sfert de cerc mare (medianele exterioare AX și AX' ale triunghiului sferic ABC vor fi, evident, mediane în sensul obișnuit ale triunghiurilor $AB'C$ și ABC', unde B' și C' sînt respectiv punctele diametral opuse punctelor B și C). În acest caz, fiecare dintre arcele AX și AX' va fi mediană exterioară a triunghiului ABC. În aceste condiții, propoziția demonstrată mai sus poate fi enunțată astfel:

Dacă mediana exterioară a unui triunghi sferic nu este egală cu un sfert de cerc mare, ea diferă de un sfert de cerc mare cu o mărime cuprinsă între semisuma și semidiferența laturilor din al căror capăt comun este dusă această mediană exterioară.

Observație. Propoziția considerată la exercițiul 17 din geometria plană subsistă și în geometria sferică [contrar afirmației autorului; compară cu prima ediție (în limba rusă) a acestei cărți, p. 79 enunțul ex. 486].

În adevăr, dacă mediana AD a triunghiului sferic ABC este egală cu un sfert de cerc mare, atunci suma unghiurilor cu vîrfurile în B și în C este egală cu 2dr (deoarece, din fig. 45 avem $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{ECB} + \widehat{ACB} = 2\text{dr}$); dacă mediana AD a triunghiului sferic ABC este mai mică decît un sfert de cerc mare, atunci suma unghiurilor cu vîrfurile în B și în C este mai mică decît 2dr (deoarece din fig. 46, avem $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{ECB} + \widehat{ACB} < 2\text{dr}$); în sfîrșit, dacă mediana AD a triunghiului sferic ABC este mai mare decît un sfert de cerc mare, atunci suma unghiurilor cu

vîrfurile în B și în C este mai mare decît 2dr (deoarece, din fig. 50 avem $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 4\text{dr} - (\widehat{A_0BC} + \widehat{A_0CB}) > 2\text{dr}$).

De aici rezultă că, dacă cele două unghiuri cu vîrfurile în B și în C sînt ascuțite, mediana triunghiului sferic este mai mică decît un sfert de cerc mare. Prin urmare, ea formează cu latura mai mare a triunghiului un unghi mai mic decît cu cealaltă etc.

486 *bis*. Fie unghiul ACB al triunghiului sferic ABC (fig. 52) drept, iar fiecare dintre catetele AC și BC mai mică decît un sfert de cerc mare. Luăm pe cercul mare CB, în sensul de la C spre B, arcul CK, egal cu un sfert de cerc mare. Punctul K va fi unul dintre polii cercului mare AC, deci arcul AK va fi, de asemenea, egal cu un sfert de cerc mare.

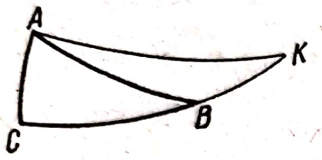


Fig. 52

În acest caz, AC va fi arcul perpendicular mai mic, coborît din punctul A pe cercul mare CB, și deoarece punctul B este mai aproape de C decît K, vom avea $AB < AK$. Așadar, ipotenuza triunghiului este mai mică decît un sfert de cerc mare.

În cazul în care cateta AC ar fi mai mică, iar cateta BC mai mare decît un sfert de cerc mare în aceleași condiții, punctul K ar fi situat mai aproape de C decît B și am avea $AB > AK$. Așadar, ipotenuza ar fi mai mare decît un sfert de cerc mare.

În sfîrșit, dacă ambele catete AC și BC sînt mai mari decît un sfert de cerc mare, prelungim arcele CA și CB dincolo de punctele A și B pînă la a doua lor intersecție în punctul C', diametral opus lui C. Ipotenuza AB a triunghiului ABC va fi și ipotenuza triunghiului ABC', unde fiecare catetă este mai mică decît un sfert de cerc mare. Prin urmare, în acest caz, ipotenuza AB este mai mică decît un sfert de cerc mare.

În felul acesta, am demonstrat *că propoziția considerată la exercițiul 16 din geometria plană nu este adevărată în geometria sferică*: triunghiurile ABC și ABC' au ipotenuzele egale, deși fiecare catetă a primului triunghi este mai mare decît cateta corespunzătoare a celui de al doilea.

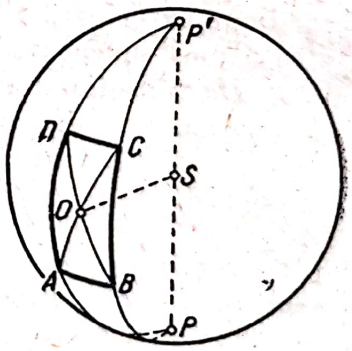


Fig. 53

487. Fie, în patrulaterul sferic convex $ABCD$ (fig. 53), laturile opuse egale două cîte două: $AB = CD$, $BC = AD$. Triunghiurile sferice ABC și CDA sînt egale (avînd cele trei laturi respectiv egale) și același lucru este valabil pentru triunghiurile ABD și CDB. Prin urmare, unghiurile opuse ale acestui patrulater sînt două cîte două egale; totodată, sînt egale și unghiurile ACB și CAD, precum și CBD și ADB. Dacă O este punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului, atunci triunghiurile sferice OBC și ODA sînt egale (ele au perechea de laturi BC și AD egale și unghiurile alăturate respectiv egale). Din egalitatea acestor triunghiuri, avem $OB = OD$ și $OC = OA$, astfel că diagonalele patrulaterului se *taie în părți egale în punctul lor de intersecție*.

Să notăm acum cu S centrul sferei pe care se află patrulaterul dat și fie P și P' punctele de intersecție ale cercurilor mari BC și AD. Dacă rotim sfera cu 180° în jurul dreptei SO (compară cu nr. **412**), punctul A vine în C, B în D, C în A și D în B. De aici urmează că cercul mare BC se suprapune peste cercul mare AD, iar cercul mare AD peste cercul mare BC, astfel că punctul P coincide cu P', iar P' cu P. Deoarece dreapta PP' nu-și schimbă poziția în spațiu în cazul unei rotații cu 180° în jurul dreptei SO, ea taie dreapta SO sub un unghi drept, iar fiecare dintre arcele OP și OP' este egal cu un sfert de cerc mare. Punctele de intersecție Q și Q' ale cercurilor mari AB și CD se bucură de aceleași proprietăți. Prin urmare, *punctul O este polul cercului mare $PQP'Q'$, pe care se află punctele de intersecție ale laturilor opuse.*

Observație. Același rezultat se poate obține și fără a recurge la noțiunea de rotație, folosind rezultatele ex. 486.

Triunghiurile sferice PAB și $P'CD$ sînt egale (avînd perechea de laturi AB și CD egale și unghiurile alăturate respectiv egale), de unde $AP = CP'$. Prin urmare, $AP + CP = CP' + CP = 180°$. Mediana OP a triunghiului sferic PAC, în care suma a două laturi este egală cu 180°, este egală cu un sfert de cerc mare în baza uneia dintre teoremele date în soluția exercițiului 486.

Fie acum C' și D' punctele de pe sferă, diametral opuse vîrfurilor C și D ale patrulaterului considerat. Mijlocul K al arcului de cerc mare AC' are distanța pînă la mijlocul O al arcului AC de pe același cerc mare egală cu un sfert de cerc mare, din care cauză punctul K este situat pe cercul mare $PQP'Q'$. Deoarece acest din urmă cerc mare este, totodată, perpendicular pe cercul mare AC (cercul mare AC trece prin polul O al cercului mare $PQP'Q'$; compară cu nr. **383**), orice punct de pe cercul mare $PQP'Q'$ este egal depărtat de punctele A și C' (**372**). În virtutea unor considerații analoge, orice punct de pe același cerc mare $PQP'Q'$ va fi egal depărtat și de punctele B și D'. De aici rezultă că un punct de pe cercul mare $PQP'Q'$, egal depărtat de punctele A și B (un astfel de punct se poate găsi folosind nr. **372**), este egal depărtat de toate cele patru puncte A, B, C' și D'. În consecință (**370** *bis*), *două vîrfuri vecine A și B ale patrulaterului considerat și punctele C' și D', diametral opuse celorlalte două vîrfuri C și D, sînt situate pe același cerc.* Evident, aceasta va fi valabil și pentru orice alte două vîrfuri vecine.

Dacă, în patrulaterul $ABCD$, toate patru laturile sînt egale ($AB = BC = CD = DA$), atunci triunghiurile ABO și CBO sînt egale (avînd cele trei laturi respectiv egale), de unde $\widehat{AOB} = \widehat{COB}$, astfel încît *diagonalele AC și BD sînt perpendiculare.*

Să presupunem acum că, în patrulaterul $ABCD$ (fig. 54), laturile opuse sînt egale ($AB = CD$, $BC = DA$), de asemenea și diagonalele ($AC = BD$). Triunghiurile ABC și BAD sînt simetrice (după egalitatea celor trei laturi), și deci unghiurile ABC și BAD sînt egale. După cum am demonstrat mai sus, unghiurile opuse ale patrulaterului sînt egale două cîte două; prin urmare, în cazul de față, *toate cele patru unghiuri ale patrulaterului sînt egale.* În virtutea egalității unghiurilor ABC și BAD, sînt egale și unghiurile PBA și PAB. Triunghiul PAB este isoscel și anume $PA = PB$. În virtutea egalității diagonalelor, sînt egale și jumătățile lor OA și OB. Triunghiurile AOP

și BOP sînt simetrice (avînd cele trei laturi respectiv egale), și deci $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$. Așadar, arcul OP împarte în două părți egale unghiul AOB; analog, arcul OQ împarte în două părți egale unghiul BOC. Prin urmare, unghiul POQ este drept. Dat fiind că fiecare dintre arcele OP și OQ este egal cu un sfert de cerc mare, *toate trei unghiurile triunghiului OPQ sînt drepte.*

Observație. Reciproc, fie într-un patrulater sferic convex $ABCD$ (fig. 54) toate unghiurile egale. Păstrînd notațiile precedente, să considerăm triunghiurile sferice PAB și $P'CD$. Fiecare dintre ele este isoscel (datorită egalității a două unghiuri) și

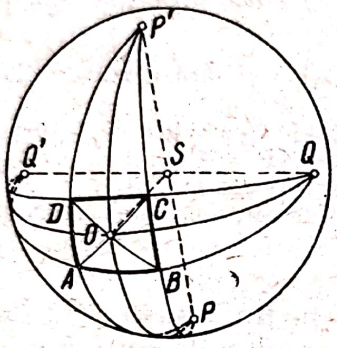


Fig. 54

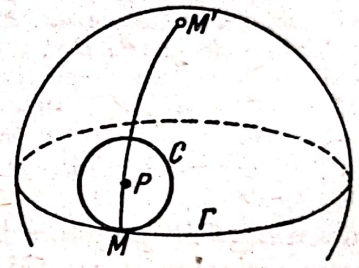


Fig. 55

ambele sînt egale (datorită egalității celor trei unghiuri), de unde $PA = PB = P'C = P'D$, deci și $BC = AD$. În același mod demonstrăm că $AB = CD$. În sfîrșit, diagonalele AC și BD sînt egale, deoarece triunghiurile sferice PAC și PBD sînt simetrice (avînd două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv egale). În aceste condiții, diagonalele se taie în părți egale, în virtutea celor arătate mai sus.

Așadar, *dacă într-un patrulater sferic convex toate patru unghiurile sînt egale, laturile opuse sînt egale două cîte două, iar diagonalele sînt egale și se taie în părți egale.*

488. Fie C un cerc mic dat al sferei (fig. 55) și P, unul dintre polii săi, situat în regiunea interioară (**370** *bis*). Cercul mare Γ al sferei, tangent la cercul C într-un punct M, este perpendicular pe raza sferică PM a cercului C, dusă din punctul P (compară cu observația la soluția exercițiului 479). De aceea, polul M' al cercului mare, tangent la cercul mic dat în punctul M, care se află în aceeași emisferă cu cercul C, este situat pe cercul mare MP, de aceeași parte a punctului M ca și punctul P, la distanța MM', egală cu un sfert de cerc mare de punctul M. Altfel spus, punctele M și M' se află pe același cerc mare cu punctul P, de o parte și de cealaltă a lui P și la distanță egală cu un sfert de cerc mare unul de celălalt.

Dacă punctul M descrie cercul dat C, punctul M' descrie de asemenea un cerc mic C', avînd ca pol punctul P, deoarece, în acest caz, arcul PM' nu-și schimbă mărimea.

Cercul polar în raport cu C' va coincide cu cercul C, deoarece ambele cercuri au polul comun P, iar raza cercului polar în raport cu C' coincide cu raza cercului C.

489. Trecînd la rezolvarea problemelor de construcție pe suprafața sferei, vom presupune că raza sferei date a fost dinainte determinată prin construcții pe sferă și în plan, cum se arată la nr. **372.** În aceste condiții, există, în

particular, posibilitatea de a construi pe sferă un cerc mare cu polul într-un punct dat. Pentru aceasta, distanţa dintre vîrfurile picioarelor compasului sferic trebuie să fie egală cu diagonala pătratului a cărui latură este egală cu raza sferei.

Construcţia a). Pentru a construi punctul diametral opus unui punct dat, ducem cercul mare cu polul în punctul dat. Mai departe, construim încă două cercuri mari cu polii în puncte arbitrare ale cercului mare descris înainte. Aceste două noi cercuri mari se vor intersecta în punctul dat şi într-un al doilea punct, care va fi diametral opus celui dintîi.

Construcţia b). Construim cercurile mari ai căror poli sînt două puncte date. Punctele de intersecţie ale cercurilor mari construite vor fi polii cercului mare căutat.

Construcţia c). Construim două cercuri secante egale, avînd polii în două dintre punctele date, A şi B. Prin punctele lor de intersecţie, ducem un cerc mare (construcţia *b*). Acesta va fi locul geometric al punctelor de pe sferă, egal depărtate de punctele A şi B (**372**). În acelaşi mod, construim locul geometric al punctelor egal depărtate de punctul B şi de al treilea punct dat, C. Punctele de intersecţie ale celor două cercuri mari construite vor fi polii cercului ABC.

Pentru a construi polii cercului dat, aplicăm această construcţie la trei puncte arbitrare ale acestuia A, B şi C.

Construcţia d). Să presupunem că punctul dat A nu este situat pe cercul mare dat. Construim un cerc arbitrar, cu polul în punctul dat A, care intersectează cercul mare dat în punctele M şi N. Al doilea punct de intersecţie A' al celor două cercuri care trec prin punctul A şi au ca poli respectiv punctele M şi N se află pe cercul mare căutat. Cercul mare care trece prin punctele A şi A' va fi tocmai cel căutat. Dacă punctul A este situat pe cercul mare dat, construcţia necesită anumite modificări (le lăsăm cititorului).

Construcţia e). Descriem un cerc arbitrar cu polul în vîrful A al unghiului dat; să presupunem că acest cerc taie laturile unghiului în punctele M şi N. Al doilea punct de intersecţie A' al celor două cercuri care trec prin punctul A şi au ca poli respectiv punctele M şi N se află pe cercul mare căutat. Nu ne mai rămîne decît să ducem un cerc mare prin punctele A şi A'.

Pentru a împărţi în două părţi egale arcul dat AB, construim două cercuri secante arbitrare, avînd ca poli unul punctul A, iar celălalt punctul B. Cercul mare care trece prin punctele de intersecţie ale cercurilor construite va tăia arcul AB în două părţi egale.

Construcţia f). Să rezolvăm, în prealabil, următoarea problemă[1]). *Să se construiască un triunghi sferic dreptunghic, dacă se dau un unghi ascuţit şi cateta opusă. Cateta opusă unghiului ascuţit trebuie să fie mai mică decît un sfert de cerc mare* (**384**).

---

[1]) Construcţia (k) pct. 2 (Nota Red. E.T.).

Fie XAY unghiul ascuțit dat (fig. 56). Problema construirii triunghiului căutat se reduce, evident, la construirea unui punct B pe semicercul AXA' (unde A' este diametral opus punctului A), astfel ca perpendiculara BC, coborîtă din B pe cercul mare AY, să fie egală cu arcul dat. Locul geometric al punctelor de pe sferă a căror distanță la cercul mare AY este egală cu un arc dat este format din două cercuri mici avînd polii comuni cu cercul mare AY; din aceste două cercuri mici este suficient, în cazul de față, să considerăm numai pe unul. Polul acestui cerc mic coincide cu polul P al cercului mare AY; raza sa sferică este complementara catetei date. Acest cerc mic poate fi construit (în figură, cercul mic KBL). Vîrful căutat al triunghiului va fi unul dintre cele două puncte de intersecție B și B_1 ale cercului mic pe care l-am construit cu cercul mare AX. Problema poate avea două soluții (triunghiurile ABC și AB_1C_1 din figură).

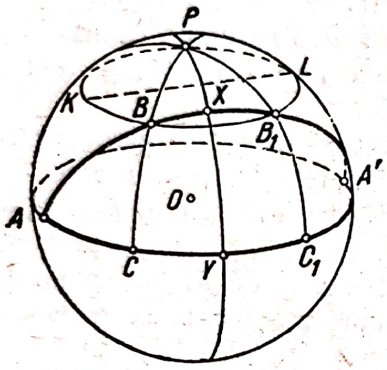


Fig. 56

Pentru ca problema să aibă soluții, cele două cercuri menționate mai sus, cercul mare AX și cercul mic KBL, trebuie să aibă un punct comun. La rîndul său, pentru aceasta este nevoie ca distanța maximă XY a unui punct de pe semicercul AXA' pînă la cercul mare AY să fie mai mare decît cateta dată sau cel puțin egală cu ea. Această distanță maximă XY se va obține dacă vom construi cercul mare de pol A. Însă arcul XY al cercului mare măsoară unghiul ascuțit dat XAY.

Așadar, problema pe care am pus-o, anume de a construi un triunghi dreptunghic, cunoscînd un unghi ascuțit și cateta opusă, are două soluții, dacă această catetă este mai mică decît unghiul; o soluție, atunci cînd cateta este egală cu unghiul; și nu are soluții, atunci cînd cateta este mai mare decît unghiul[1]). În cazul cînd avem o singură soluție, obținem triunghiul AXY, cu două unghiuri drepte. Fiecare dintre laturile AX și AY este egală cu un sfert de cerc mare.

Observație. Din soluția problemei puse, rezultă următoarea teoremă: dacă o catetă a unui triunghi sferic dreptunghic este egală cu cateta altuia și dacă unghiul primului triunghi, opus acestei catete, este egal cu unghiul omolog din cel de-al doilea triunghi, celelalte catete ale acestor triunghiuri sînt ori egale (atunci triunghiurile sînt egale sau simetrice), *ori suplementare.*

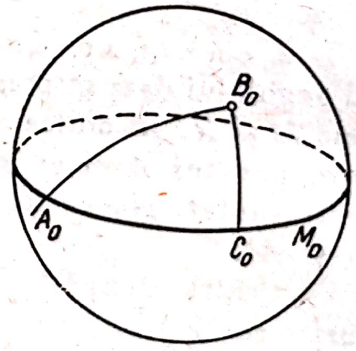


Fig. 57

Să trecem acum la soluția problemei noastre, și anume de a duce, printr-un punct dat B_0, un arc de cerc mare A_0B_0 care să formeze cu un cerc mare dat C_0M_0 un unghi egal cu un unghi dat (fig. 57). Este suficient să considerăm cazul în care unghiul dat este ascuțit.

[1]) Sensul acestor expresii este clar, deoarece catetele se exprimă în unități unghiulare.

Fie B_0C_0 arcul perpendicular mai mic, coborît din punctul B_0 pe cercul mare C_0M_0. Problema se reduce la construirea unui triunghi dreptunghic, avînd drept catetă arcul B_0C_0 și unghiul ascuțit cu vîrful în A_0 egal cu unghiul dat. Pentru rezolvarea acestei probleme, construim, după procedeul de mai sus, undeva pe sferă, un triunghi ABC (egal sau simetric) cu cel căutat și luăm pe cercul mare C_0M_0 arcul C_0A_0, egal cu cateta AC.

Numărul maxim de soluții este patru, deoarece cateta AC poate avea două valori (AC și AC_1, fig. 56), iar punctul A_0 poate fi situat de o parte sau de cealaltă a punctului C_0.

Din cele arătate mai sus, rezultă că valoarea minimă a unghiului A pentru care problema este posibilă va fi cea egală cu arcul B_0C_0. În acest caz, problema are două soluții, iar fiecare dintre arcele A_0C_0 este egal cu un sfert de cerc mare.

Trecînd la rezolvarea problemelor de construcție a unor triunghiuri sferice, menționăm că problema fundamentală de acest tip — de a construi un triunghi sferic cunoscînd cele trei laturi — se rezolvă în totul analog cu problema corespunzătoare din plan; condițiile de posibilitate ale problemei sînt ca: 1) fiecare latură să fie mai mică decît suma celorlalte două și 2) suma celor trei laturi să fie mai mică decît un cerc. (**376** *bis*).

La indicarea numărului de soluții în problemele de construcție a triunghiurilor sferice (construcțiile g—k), vom considera întotdeauna două triunghiuri simetrice drept o singură soluție.

Construcția g). Construim un unghi egal cu unghiul dat (această construcție se efectuează ca în plan), iar pe laturile sale purtăm laturile date.

Condițiile de posibilitate sînt ca fiecare dintre laturile date să fie mai mică decît un semicerc, iar unghiul dat să fie mai mic de 180°.

Construcția h). Fie date, din triunghiul sferic căutat ABC, unghiul A și laturile a și b, respectiv opuse unghiurilor A și B.

Construim unghiul XAY, egal cu unghiul A (fig. 58), luăm pe latura sa AY arcul $AC = b$. Punctul C este astfel determinat. Punctul B trebuie să fie situat pe cercul mic sau, într-un caz particular, pe cercul mare avînd ca pol punctul C și ca rază sferică arcul a. Intersecția acestui cerc cu latura a doua AX a unghiului A ne dă vîrful B căutat, a cărui poziție determină total triunghiul.

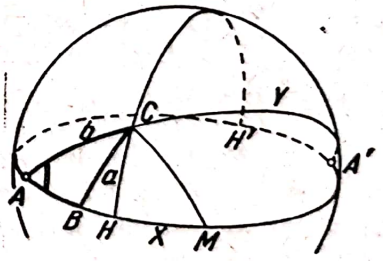


Fig. 58

La discuția problemei, vom elimina cazul în care unghiul A este drept. Acest caz mai simplu va fi cercetat în mod special (compară cu construcția k).

Să notăm cu h și cu h' lungimile perpendicularelor CH și CH', coborîte din punctul C pe cercul mare AX, care este a doua latură a unghiului A. Vom alege notațiile astfel ca $h < h'$ (cazul $h = h' = 90°$ duce la $\hat{A} = 90°$); în acest caz, conform teoremei referitoare la lungimea arcelor perpendiculare și oblice (**384**), vom avea, în mod necesar, $h < b < h'$ și $h < 180° - b < h'$. În funcție de mărimea celeilalte laturi date a, va trebui să considerăm succesiv urmă-

toarele cazuri posibile (compară cu schema din fig. 59): 1) $a < h$ sau $a > h'$; 2) $a = h$ sau $a = h'$; 3) $h < a < b$ și $a < 180° - b$ sau $b < a < h'$ și $180° - b < a$; 4) $a = b$ sau $a = 180° - b$; 5) $b < a < 180° - b$ sau $180° - b < a < b$.

1) *Dacă $a < h$ sau $a > h'$, atunci problema nu are soluții*, deoarece, în acest caz, cercul mic de pol C și de rază sferică a nu intersectează cercul mare AX. Aceasta rezultă din proprietățile arcelor perpendiculare și oblice (**384**).

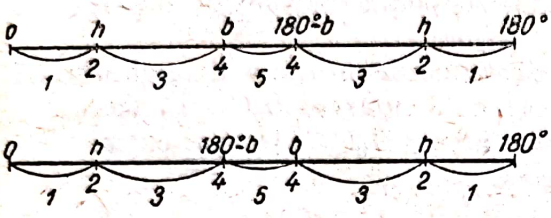


Fig. 59

2) *Dacă $a = h$, problema are o singură soluție pentru $A < 90°$ și nu are soluții pentru $A > 90°$; analog, dacă $a = h'$, problema are o singură soluție pentru $A > 90°$ și nu are soluții pentru $A < 90°$.*

În adevăr, pentru $a = h$ sau $a = h'$, cercul mic de pol C și de rază sferică a, despre care vorbeam mai sus, este tangent la cercul mare AX. Punctul de tangență va fi situat pe semicercul AXA', cu condiția ca arcul $a = h$ să fie mai mic de un sfert de cerc mare și, în același timp, unghiul A să fie ascuțit, precum și cu condiția ca arcul $a = h'$ să fie mai mare de un sfert de cerc mare și, totodată, unghiul A să fie obtuz. Aceasta rezultă din faptul că, în unghiul dreptunghic ABC, cateta BC și unghiul A trebuie să fie simultan ascuțite sau obtuze (**384**).

3) *Dacă $h < a < b$ și $a < 180° - b$, problema are două soluții, pentru $A < 90°$, și nu are soluții, pentru $A > 90°$; dimpotrivă, dacă $b < a < h'$ și $180° - b < a$, problema are două soluții, pentru $A > 90°$, și nu are soluții, pentru $A < 90°$.*

Fie $h < a < b$ și $a < 180° - b$. Dacă unghiul A este ascuțit, atunci, la deplasarea unui punct M pe semicercul AXA', de la punctul A spre punctul A', arcul CM, având ca extremități punctul C și punctul variabil M, descrește întîi de la valoarea b la h, iar apoi crește de la h la $180° - b$. De aceea, cele două puncte în care cercul mic de pol C și de rază sferică a taie cercul mare AX vor fi situate pe arcul AXA', și problema are două soluții. Dacă însă unghiul A este obtuz, atunci arcul CM crește de la b la h', iar apoi descrește de la h' la $180° - b$; nici un punct de intersecție nu se află pe arcul AXA', și problema nu are soluții.

Evident, obținem rezultate opuse pentru $b < a < h'$ și $180° - b < a$.

4) *Dacă $a = b$ sau $a = 180° - b$, problema are o soluție, dacă avem simultan $A < 90°$ și $a < 90°$ sau simultan $A > 90°$ și $a > 90°$, și nu are soluții în toate celelalte cazuri.*

Fie $a = b < 90°$ și $A < 90°$. Dat fiind că, la deplasarea punctului M pe semicercul AXA', arcul CM descrește de la valoarea $b = a$ la valoarea h, crescînd apoi de la valoarea h la valoarea $180° - b > b$, înseamnă că unul dintre punctele de intersecție despre care este vorba coincide cu A, iar celălalt este situat pe semicercul AXA', astfel că problema are o singură soluție. Celelalte ipoteze se discută în mod analog.

5) *Dacă $b < a < 180° - b$ sau $180° - b < a < b$, problema are întotdeauna o singură soluție.*

Deoarece, la deplasarea punctului M de la punctul A la punctul A' pe semicercul AXA', arcul CM întîi descreşte de la valoarea b la h, iar apoi creşte de la h la $180° - b$, dacă unghiul A este ascuţit, iar în cazul cînd unghiul A este obtuz, întîi creşte de la valoarea b la h', iar apoi descreşte de la h' la $180° - b$, reiese că, dintre cele două puncte de intersecţie despre care este vorba, numai unul se află pe arcul AXA'.

Construcţia i). La rezolvarea acestei probleme, trebuie să deosebim două cazuri net distincte.

Dacă *sînt date o latură şi cele două unghiuri alăturate*, construim un arc egal cu latura dată, iar la extremităţile lui, de aceeaşi parte, construim unghiuri respectiv egale cu unghiurile date. Punctul de intersecţie al celorlalte laturi ale acestor unghiuri determină al treilea vîrf. Condiţia de posibilitate este ca latura dată şi fiecare dintre unghiurile date să fie mai mici de 180°.

Să presupunem acum că, din triunghiul sferic ABC căutat, ni se dau latura $BC = a$, unghiul opus A şi unul dintre unghiurile alăturate B. În triunghiul $A'B'C'$, polarul celui căutat, vom cunoaşte unghiul $A' = 180° - a$ şi două laturi $a' = 180° - A$ şi $b' = 180° - B$. Triunghiul $A'B'C'$ poate fi construit după aceste date (construcţia h). După ce am construit polii laturilor triunghiului $A'B'C'$, obţinem triunghiul căutat. Deoarece problema construirii triunghiului $A'B'C'$ poate avea, în diferite cazuri, două soluţii, una singură sau nici una, vom avea aceeaşi situaţie şi pentru problema noastră.

Construcţia j). Fie date unghiurile A, B şi C ale triunghiului sferic căutat ABC. În triunghiul $A'B'C'$, polarul celui căutat, vom cunoaşte laturile $a' = 180° - A$ etc. Triunghiul $A'B'C'$ poate fi construit cunoscînd cele trei laturi. Construind polii laturilor triunghiului $A'B'C'$, obţinem triunghiul căutat.

Condiţiile de posibilitate sînt: fiecare dintre unghiurile date, adunat cu 180°, să fie mai mare decît suma celorlalte două unghiuri, iar suma celor trei unghiuri să fie mai mare de 180° (**378**).

Construcţia k). 1° Să presupunem că, în triunghiul sferic căutat ABC, avînd un unghi drept în vîrful A, *sînt date ipotenuza* $BC = a$ *şi unul dintre unghiurile alăturate*, anume unghiul B. Vom presupune că unghiul B nu este drept.

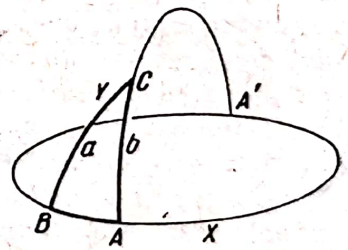


Fig. 60

După ce construim unghiul XBY, egal cu unghiul B (fig. 60), luăm pe latura sa BY arcul $BC = a$. Prin extremitatea C a acestui arc ducem cercul mare ACA', perpendicular pe cealaltă latură BX a unghiului construit. Fie A şi A' punctele de intersecţie ale acestui cerc mare cu cercul mare BX. Vom alege astfel notaţiile, încît să avem $AC < A'C$ (pentru $AC = A'C$, unghiul B va fi drept). Dacă unghiul B este ascuţit, triunghiul căutat va fi triunghiul ABC, iar dacă unghiul B este obtuz, triunghiul căutat va fi triunghiul $A'BC$, deoarece cateta şi unghiul care i se opune vor fi simultan ascuţite sau simultan obtuze (**384**). Aşadar, dacă unghiul B nu este drept, problema are o singură soluţie. Dacă însă unghiul B este drept, ca şi unghiul A, problema nu are soluţii, dacă arcul a este diferit de un sfert de cerc mare, şi devine nedeterminată, dacă arcul a este egal cu un sfert de cerc mare.

Observație. Din soluția problemei noastre, rezultă următoarea teoremă: *dacă ipotenuza unui triunghi sferic dreptunghic este egală cu ipotenuza altuia și dacă unul dintre unghiurile primului triunghi, care nu este drept, este egal cu unul dintre unghiurile celui de al doilea, atunci triunghiurile sînt egale sau simetrice.*

Să presupunem acum că, în triunghiul sferic căutat ABC, avînd un unghi drept în vîrful A, *sînt date ipotenuza* $BC = a$, și *cateta* $AC = b$.

După ce construim unghiul drept cu vîrful în A, luăm pe una dintre laturi arcul AC, egal cu b (fig. 60). Punctul B trebuie să se afle pe cercul mic sau, în particular, pe cercul mare avînd ca pol punctul C și ca rază sferică arcul a. Intersecția acestui cerc cu a doua latură a unghiului drept ne va da vîrful căutat B, a cărui poziție determină complet triunghiul. Problema va avea soluție în toate cazurile în care cercul de pol C și de rază sferică a va intersecta a doua latură a unghiului drept și soluția va fi unică. În adevăr, cele două puncte de intersecție dau două triunghiuri simetrice. În consecință, problema are o singură soluție, dacă $b < a < 180° - b$ sau dacă $180° - b < a < b$, și nu are soluții, în toate celelalte cazuri.

Observație. Din soluția acestei probleme, rezultă următoarea teoremă: *dacă ipotenuza și o catetă a unui triunghi sferic dreptunghic sînt respectiv egale cu ipotenuza și cu o catetă a altuia, atunci triunghiurile sînt egale sau simetrice.*

Înainte de a trece la efectuarea celorlalte construcții, vom face cîteva observații.

Se spune că un cerc mare este *tangent* la un cerc mic, dacă cele două cercuri au o tangentă comună în punctul lor comun, adică dacă ele au un singur punct comun; un cerc mare tangent la un cerc mic este perpendicular pe raza sferică a acestuia din urmă, dusă la punctul de contact (v. observația la soluția ex. 479).

În mod analog, se spune că două cercuri mici sînt *tangente*, dacă au o tangentă comună, deci și un cerc mare tangent comun în punctul lor comun. *Dacă două cercuri mici sînt tangente, ele au un singur punct comun, și reciproc; acest punct comun unic se află pe cercul mare pe care se găsesc și polii cercurilor mici.* Demonstrațiile acestor afirmații sînt analoge cu cele corespunzătoare din plan (compară cu nr. **68—69**).

Construcția l). *Să presupunem că trebuie dus un cerc (adică un cerc mare sau mic) tangent la un cerc dat, într-un punct dat A, și care trece printr-un alt punct dat B, nesituat pe cercul dat.*

În virtutea observațiilor de mai sus, polii cercului căutat sînt situați pe cercul mare care trece prin punctul A și prin polul cercului dat. Totodată, polii cercului căutat se află pe cercul mare care trece prin mijlocul arcului AB și este perpendicular pe acesta (**372**). Aceste două cercuri mari pot fi construite.

Cele două cercuri mari construite se vor intersecta în două puncte diametral opuse, care vor fi polii cercului unic ce trece prin punctul A. Acesta din urmă va fi cercul căutat.

Construcția m). Ducem prin punctul dat un cerc mare, perpendicular pe cercul mare care trece prin punctul dat și prin polii cercului dat (v. observațiile care preced construcția l).

Construcția n). Să pesupunem că trebuie *să ducem, prin punctul A, un cerc mare tangent la un cerc mic dat C.*

Unul dintre polii cercului mare căutat este situat pe cercul mic C', polarul lui C (ex. 488). Totdată, polii cercului mare căutat se află la o distanță egală cu un sfert de cerc mare de punctul A, deoarece cercul mare căutat trece prin punctul A. Cu alte cuvinte unul dintre polii cercului mare căutat este pe cercul mare A', de pol A. Așadar, unul dintre polii cercului căutat se determină ca punct de intersecție al cercurilor A' și C'.

Problema are două soluții, în cazurile în care cercurile A' și C' se intersectează în două puncte; o singură soluție, cînd aceste cercuri sînt tangente; și nici una, cînd nu au puncte comune. Pentru ca cercurile A' și C' să fie secante în punctele M și M', trebuie să existe un triunghi sferic MPA, unde P este polul cercului mic C, situat în interiorul acestuia; laturile acestui triunghi trebuie să fie egale cu arcul dat PA, cu arcul $AM = 90°$ și cu arcul $PM = 90° - r$, r fiind raza sferică a cercului C (mai mică de un sfert de cerc mare). Pentru existența unui astfel de triunghi, trebuie satisfăcute condițiile (compară cu nr. **376** *bis*): $90 - (90° - r) < PA < 90° + (90° - r)$ și $PA + 90° + (90° - r) < 360°$. Deoarece ultima dintre aceste inegalități este satisfăcută de la sine, mai rămîne condiția

$$r < PA < 180° - r.$$

Această din urmă condiție are un sens geometric simplu: ea arată că punctul dat A trebuie să fie în zona sferică mărginită de cercul mic C și de cercul mic care îi este diametral opus. Cercurile A' și C' sînt tangente, dacă $PA = 90° - (90° - r) = r$ sau dacă $PA = 90° + (90° - r) = 180° - r$.

Așadar, *prin punctul A, putem duce două cercuri mari tangente la un cerc mic dat, dacă punctul A aparține zonei sferice mărginite de acest cerc mic și de diametral opusul său; putem duce un singur cerc mare tangent, dacă punctul A este situat pe cercul mic dat sau pe diametral opusul său; și nu putem duce nici un cerc mare tangent, dacă punctul A este situat în exteriorul zonei sferice determinată de cercul mic dat și de diametral opusul său.*

Observație. Dacă P este, ca mai sus, polul cercului mic dat, iar AM și AN sînt arcele de cerc mare tangente la el și duse din punctul A, atunci triunghiurile sferice dreptunghice APM și APN sînt simetrice, deoarece au ipotenuza AP comună și catetele $PM = PN$ (v. construcția k, a două observație). De aici urmează că arcele AM și AN, tangente la cercul mic dat, sînt egale.

Construcția o). Să presupunem că *avem de construit cercurile mari tangente la două cercuri mici date* C_1 și C_2 *de poli* P_1 *și* P_2 *și de raze* r_1 *și* r_2 $(r_1 \geqslant r_2)$; vom presupune că polii P_1 și P_2 sînt situați în interiorul cercurilor mici respective și că ambele raze r_1 și r_2 sînt mai mici decît un sfert de cerc mare.

Cercul mare tangent la cele două cercuri mici date poate fi *exterior* (*interior*), adică astfel ca ambele cercuri mici să se afle față de el în aceeași emisferă (respectiv, în emisfere diferite).

Locul geometric al polilor cercurilor mari tangente la cercul mic C_1 dat este format din cercul mic C_1', polarul lui C_1 (ex. 488), și din cercul mic C_1'', diametral opus cercului C_1'. În același mod, locul geometric al polilor

cercurilor mari tangente la cercul mic C_2 este format din cercul mic C_2', polarul lui C_2, și din cercul mic C_2'', diametral opus lui C_2'. Pentru ca un cerc mare să fie tangent atît la cercul mic C_1, cît și la cercul mic C_2, este necesar și suficient ca acela dintre polii săi care se află pe cercul C_1' să se găsească pe unul dintre cercurile C_2' sau C_2'' (totodată, al doilea pol al aceluiași cerc mare se va afla pe cercul C_1'' și, în același timp, respectiv pe cercul C_2'' sau C_2'). Prin urmare, *unul dintre polii cercului mare căutat va fi punct de intersecție (sau de tangență) al cercului mic C_1' cu unul dintre cele două cercuri mici C_2' și C_2''.*

În aceste condiții, punctul de intersecție M al cercurilor C_1' și C_2' se află, față de fiecare dintre punctele P_1 și P_2, la o distanță mai mică de un sfert de cerc mare (și anume la $90° - r_1$ de la punctul P_1 și la $90° - r_2$ de la punctul P_2; compară cu ex. 488). De aceea, punctele P_1 și P_2, deci și cercurile mici considerate, vor fi situate de aceeași parte a cercului mare de pol M (compară cu nr. **377**). În mod analog, vom arăta că cercurile mici considerate sînt situate de părți diferite ale cercului mare avînd polul în punctul de intersecție N al cercurilor C_1' și C_2''. Cu alte cuvinte, *punctul de intersecție al cercurilor C_1' și C_2' (C_1' și C_2'') va fi polul cercului mare tangent comun exterior (interior).*

Raționînd ca la discuția construcției n, vom arăta că cercurile mici C_1' și C_2' vor avea puncte comune, cu condiția ca $(90° - r_2) - (90° - r_1) \leqslant P_1P_2 \leqslant (90° - r_1) + (90° - r_2)$, adică cu condiția ca

$$r_1 - r_2 \leqslant P_1P_2 \leqslant 180° - (r_1 + r_2). \qquad (1)$$

Analog, cercurile mici C_1' și C_2'' vor avea puncte comune, cu condiția ca $(90° - r_2) - (90° - r_1) \leqslant 180° - P_1P_2 \leqslant (90° - r_1) + (90° - r_2)$, adică

$$r_1 + r_2 \leqslant P_1P_2 \leqslant 180° - (r_1 - r_2). \qquad (2)$$

Așadar, *două cercuri mici au cercuri tangente exterioare comune, dacă este satisfăcută condiția (1); totodată, vom avea două asemenea cercuri, dacă în condiția (1) avem, în ambele cazuri, semnul de inegalitate, și un singur cerc, dacă în condiția (1) unul dintre semnele de inegalitate se înlocuiește cu semnul de egalitate; pentru cercurile tangente interioare comune, condiția (2) joacă același rol.*

Construcția p). Să presupunem că se cere *să construim un cerc având ca pol un punct dat A și intersectînd sub un unghi drept un cerc mic dat.*

În acest caz, ambele cercuri — cel dat și cel căutat — trebuie să aibă tangente perpendiculare în punctul de intersecție M și, de aceea, raza sferică AM a cercului căutat trebuie să fie tangentă în punctul M la cercul mic dat. De aici reiese următoarea construcție. Prin punctul dat A, ducem unul dintre cercurile mari tangente la cercul mic dat. Arcul AM al acestui cerc mare, de la punctul A pînă la punctul de contact M, va fi raza sferică a cercului căutat. Problema are o soluție, și anume unică, dacă punctul A aparține zonei sferice mărginite de cercul mic dat și de cercul mic care este diametral opus acestuia (compară construcția *n*).

Am presupus că este dat un cerc mic. Dacă ar fi dat un cerc mare, problema ar fi, evident, nedeterminată, dacă punctul dat A ar fi situat pe acest

Scanned with OKEN Scanner

cerc mare, şi nu ar avea soluţii, dacă punctul dar nu ar fi situat pe acest cerc mare.

Construcţia q). Soluţia rezultă imediat din cele arătate în soluţia exerciţiului 479. Polii cercurilor căutate sînt punctele de intersecţie ale cercurilor mari care împart în două parţi egale unghiurile formate de cercurile mari date. Aceste cercuri mari pot fi construite (construcţia e). După ce am găsit polul unuia dintre cercurile căutate, coborîm din el o perpendiculară pe unul dintre cercurile date (construcţia d) pentru a determina raza sferică a cercului căutat.

Problema are opt soluţii, dacă cele trei cercuri mari date nu trec prin acelaşi punct, şi nu are soluţii, dacă trec prin acelaşi punct.

Construcţia r). Fie *de construit un cerc tangent, într-un punct dat A, la un cerc dat, de pol* P_1 *şi, totodată, tangent la un alt cerc dat, de pol* P_2.

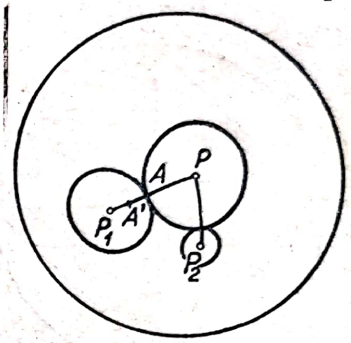


Fig. 61

Polul P al cercului căutat trebuie să se afle pe cercul mare P_1A (fig. 61). Dacă luăm pe acest cerc mare, pornind din punctul A în sensul cuvenit, arcul AA', egal cu raza sferică a cercului P_2, vom avea $PA' = PP_2$. De aici rezultă următoarea construcţie.

Pe cercul mare P_1A, luăm din punctul A, în ambele sensuri arcele, $AA' = AA''$, egale cu raza sferică a cercului P_2. Punctele de intersecţie cu cercul mare P_1A ale celor două cercuri mari care trec respectiv prin mijloacele arcelor $A'P_2$ şi $A''P_2$ şi sînt perpendiculare pe ele, vor fi polii cercurilor căutate.

În general, problema are două soluţii. Dacă însă cercul P_1 este tangent la cercul P_2, soluţia va fi unică (a doua soluţie se transformă în însuşi cercul P_1); dacă însă punctul A este punctul comun al celor două cercuri, problema nu are de loc soluţii sau devine nedeterminată.

489 *bis*. Se rezolvă analog cu problema 114. Cercurile mari pe care un cerc mic dat determină coarde egale sînt egal depărtate de polul său. Această afirmaţie se demonstrează la fel cu teorema corespunzătoare din Geometria plană (**66**). De aici rezultă că cercurile mari pe care primul dintre cercurile mici date determină arce egale cu primul dintre arcele date sînt tangente la un acelaşi cerc mic, avînd polul comun cu cel dat. Aceasta este valabil şi pentru al doilea cerc mic dat. Problema se reduce la construirea cercurilor mari tangente la aceste două cercuri mici noi (ex. 489, construcţia o).

491. Fie P şi P' polii daţi, iar A punctul dat de pe ecuator, ales ca origine a longitudinilor (fig. 76 din Geometria în spaţiu). Ducînd pe sferă, cu ajutorul compasului sferic, un cerc de pol P şi de rază sferică PA, obţinem ecuatorul. Mai departe, ducînd cercurile mari (adică cercurile de rază sferică PA) cu polii în punctele P şi A, determinăm polii meridianului PMP' care trece prin punctul M. Cunoscînd aceşti poli, putem construi, evident, însuşi meridianul şi punctul m, în care el intersectează ecuatorul.

Trecem acum la construcţiile pe un plan auxiliar. Distanţa cea mai mică în spaţiu între punctele A şi P (care poate fi „luată în compas“, aşezînd vîrfurile sale în aceste puncte) este egală cu latura pătratului înscris în cercul egal cu un cerc mare. Transportînd această distanţă cu ajutorul compasului

pe planul auxiliar, o putem lua ca latură a pătratului și, după ce construim acest pătrat și cercul său circumscris cu centrul O_0, obținem un cerc egal cu cercul mare al sferei (fig. 62). Din punctul arbitrar A_0 al acestui cerc ca centru, descriem un arc de rază egală cu cea mai mică distanță dintre punctele A și m; fie m_0 punctul său de intersecție cu cercul construit. Unghiul la centru $A_0O_0m_0$ din plan determină longitudinea punctului M. Analog, descriind din punctul m_0 ca centru un arc de rază egală cu distanța cea mai mică dintre punctele m și M, construim unghiul la centru $m_0O_0M_0$, care determină latitudinea punctului M.

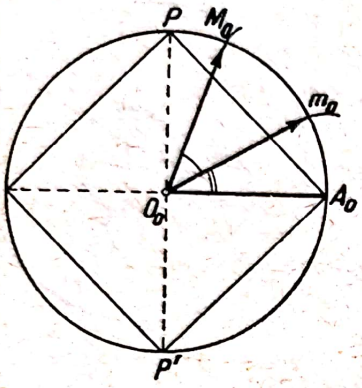


Fig. 62

În mod analog se rezolvă și problema inversă. Construim, în planul auxiliar, un cerc egal cu un cerc mare al sferei date și, în acesta, unghiurile $A_0O_0M_0$ și $m_0O_0M_0$, respectiv egale cu longitudinea și cu latitudinea date. Mai departe, construim pe sferă ecuatorul, iar pe acesta punctul m („transportînd pe sferă" distanța A_0m_0), apoi meridianul PmP' și, în sfîrșit, punctul M(„transportînd pe sferă" distanța m_0M_0).

492. Fie dat un cerc C(fig. 63). Dacă un cerc arbitrar C' împarte acest cerc, în punctele de intersecție A și B, în două părți egale, atunci planul cercului C' trece prin centrul cercului C, deoarece trece prin diametrul AB.

De aici rezultă că planul cercului căutat trebuie să treacă prin centrele celor trei cercuri date. În cazul general, aceste centre nu vor fi coliniare și, de aceea, ele determină complet planul cercului căutat, deci și cercul însuși.

Se vede ușor că cercul astfel determinat împarte efectiv în părți egale pe fiecare dintre cele trei cercuri date (dacă nu coincide cu unul dintre ele). Dacă centrele cercurilor date sînt coliniare, problema admite o infinitate de soluții.

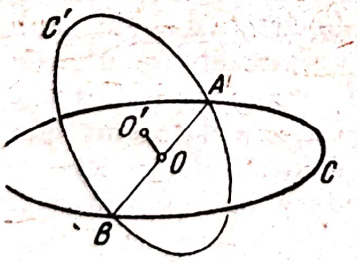


Fig. 63

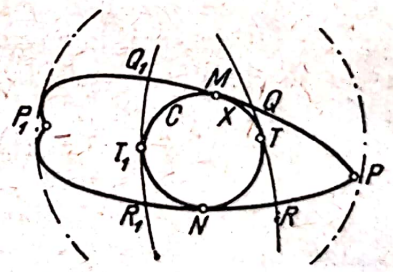


Fig. 64

493. Să presupunem că cele două cercuri mari care se intersectează în punctele P și P_1 sînt tangente în punctele M și N la cercul mic C (fig. 64) și că un al treilea cerc mare le intersectează pe primele două în punctele Q și R și este tangent la cercul mic C în punctul T, situat pe arcul MXN (cel mai apropiat de punctul P).

Deoarece arcele PM și PN sînt egale, cum este cazul și pentru arcele QM și QT, precum și pentru arcele RN și RT (compară soluția ex. 489, construcția n, Obs), perimetrul triunghiului sferic PQR va fi $PQ + PR + QR =$

$= PQ + PR + (QT + TR) = (PQ + QM) + (PR + RN) = PM + PN = 2PM$, indiferent de poziţia punctului de contact T pe arcul MXN.

Dacă punctul de contact T_1 al unui cerc mare mobil este situat pe un arc distinct de MXN al cercului mic C, vom găsi, în mod analog, $P_1Q_1 + P_1R_1 + Q_1R_1 = 2P_1M$. În general însă, arcul P_1M nu este egal cu arcul PM.

494. Se rezolvă analog cu exerciţiul 83 din Geometria plană. Fie ABC triunghiul sferic căutat, în care sînt date latura BC, unghiul B şi suma celorlalte două laturi $AB + AC$.

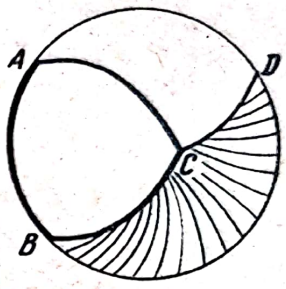


Fig. 65

Luăm, pe prelungirea laturii AB dincolo de vîrful A, arcul $AD = AC$ (fig. 65). Figura $CBAD$, formată de arcele BC, BAD şi CD o putem construi, deoarece cunoaştem arcele BC şi BAD, precum şi unghiul B, cuprins între ele. (Atragem atenţia că această figură nu va fi neapărat un triunghi; dacă $AB + AC > 180°$, această figură „va completa" triunghiul sferic BCD, haşurat în fig. 65 pînă la o emisferă; dacă $AB + AC = 180°$, arcele BC şi CD formează un semicerc; numai dacă $AB + AC < 180°$, figura $CBAD$ va fi un triunghi.)

Pentru construirea punctului A, ducem, prin mijlocul arcului CD, cercul mare perpendicular pe el, deoarece $AC = AD$ (ex. 489, construcţia e).

495. Fie PQR triunghiul sferic căutat, din care cunoaştem unghiul P, o înălţime şi perimetrul.

Notăm cu P_1 punctul diametral opus punctului P (fig. 64), iar cu T, M şi N punctele de contact ale cercului exînscris C cu latura QR şi cu prelungirile laturilor PQ şi RP. În virtutea celor arătate în soluţia exerciţiului 493, fiecare dintre arcele $PM = PN$ este egal cu semiperimetrul triunghiului. Unghiul P fiind dat, putem construi semicercurile PMP_1 şi PNP_1 care formează acest unghi, apoi punctul M, luînd arcul PM egal cu semiperimetrul. În sfîrşit, putem construi cercul MNT; pentru a găsi polul său, este suficient să împărţim în două părţi egale unghiul P şi să ducem prin punctul M cercul mare perpendicular pe PM.

La continuarea construcţiei laturii QR, va trebui să distingem două cazuri: 1) este dată înălţimea h_p, dusă din vîrful P; 2) este dată una dintre înălţimile duse din vîrfurile Q sau R, să zicem înălţimea h_q, dusă din vîrful Q.

1) Fie dată înălţimea h_p, dusă din vîrful P. Cercul mare QR este tangent la cercul de pol P şi de rază sferică h_p, precum şi la cercul mic MNT construit anterior. Totodată, aceste două cercuri se află în emisfere diferite în raport cu cercul mare QR. Aşadar, cercul mare QR va fi tangent comun interior la aceste două cercuri. Problema se reduce la exerciţiul 489, construcţia o.

2) Fie dată înălţimea h_q, dusă din vîrful Q. Pentru a determina poziţia vîrfului Q pe semicercul PMP_1, construim, pe aceeaşi sferă, triunghiul sferic dreptunghic $P'Q'H'$, cunoscînd unghiul P', egal cu unghiul dat P şi cateta opusă $Q'H' = h_q$ (soluţia ex. 489, construcţia f). Mai departe, pe arcul PMP_1, luăm, din punctul P, arcul $PQ = P'Q'$. Punctul Q astfel obţinut va fi vîrful căutat al triunghiului (bineînţeles, dacă se găseşte pe arcul PM). Descriind, din punctul Q ca pol, un cerc mic de rază sferică QM, putem deter-

mina punctul T. Punctele Q și T determină poziția laturii QR. Cu aceasta, construcția este încheiată.

496. Să presupunem că patrulaterul sferic convex $ABCD$ (fig. 66) poate fi circumscris unui cerc mic, dispus în interiorul său. Să notăm cu M, N, P și Q punctele de contact ale acestui cerc mic, respectiv cu laturile AB, BC, CD și DA ale patrulaterului. Vom avea $AQ=AM$, $BM=BN$, $CN=CP$ și $DP = DQ$, deoarece arcele a două cercuri mari tangente la același cerc mic, măsurate de la punctele de contact pînă la unul dintre punctele lor de intersecție, sînt egale (compară soluția ex. 489, construcția n, Obs.). De aici avem $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + NB + CN + QD = BC + AD$ (compară soluția ex. 87). Așadar, *dacă un patrulater sferic convex poate fi circumscris unui cerc mic situat în interiorul său, atunci suma a două laturi opuse ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două laturi opuse.*

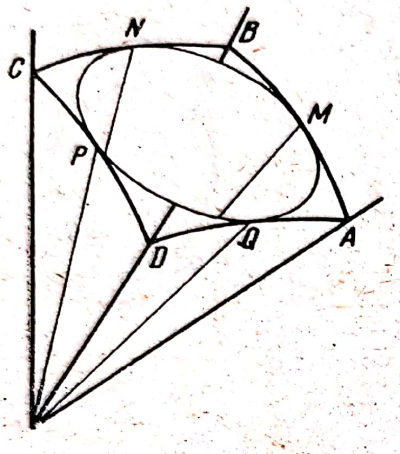


Fig. 66

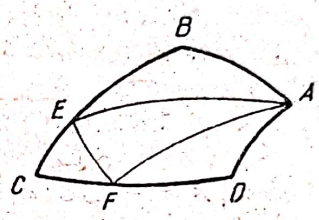


Fig. 67

Reciproc, fie, în patrulaterul sferic convex $ABCD$ (fig. 67), sumele laturilor opuse egale, adică $AB + CD = BC + AD$. Vom presupune că notațiile au fost astfel alese, încît $AB < BC$, și deci, în virtutea acestei din urmă egalități, $CD > AD$; această alegere a notațiilor este imposibilă numai pentru $AB = BC = CD = DA$, astfel că, deocamdată, vom elimina acest caz din analiza noastră. Luăm, pe latura BC, pornind din punctul B, arcul $BE =$ $=$ arc AB (aceasta se poate, deoarece $AB < BC$), iar pe latura CD, pornind din punctul D, arcul $DF = DA$ (aceasta se poate, deoarece $CD > DA$). În virtutea egalităților $AB + CD = BC + AD$; $BE = AB$; $DF = AD$, vom avea $CE = BC - BE = BC - AB = CD - AD = CD - DF = CF$. Bisectoarele unghiurilor din vîrfurile B, C și D ale patrulaterului dat (nereprezentate în figură) vor fi, totodată, bisectoarele unghiurilor de la vîrf, respectiv în triunghiurile isoscele ABE, ECF și FDA. De aceea, aceste bisectoare (ex. 485) vor fi respectiv perpendiculare pe laturile AE, EF și FA, ale triunghiului AEF și vor trece prin mijloacele lor. Prin urmare, aceste bisectoare trec (ex. 480, 2°) prin același punct. Acest punct va fi egal depărtat, cum ne dăm ușor seama, de toate laturile patrulaterului și va fi, deci, centrul cercului mic înscris.

Am eliminat, mai sus, cazul în care patrulaterul dat $ABCD$ are toate laturile egale. În acest caz însă, diagonalele AC și BD vor coincide cu bisectoarele unghiurilor patrulaterului (deoarece triunghiurile ABC și CDA, precum

și BCD și DAB vor fi egale). Prin urmare, punctul lor de intersecție va fi centrul cercului mic înscris.

Așadar, *condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic convex să poată fi circumscris unui cerc mic, situat în interiorul său, este ca suma a două laturi opuse ale patrulaterului să fie egală cu suma celorlalte două laturi opuse*[1]).

Am putea examina acum consecutiv diferite tipuri de patrulatere sferice neconvexe circumscrise și, în conformitate cu aceasta, cercurile mici înscrise, tangente atît la laturile patrulaterului, cît și la prelungirile acestora (compară cu soluția ex. **87**). Vom cuprinde *concomitent* toate cazurile posibile aici, cu ajutorul următorului raționament.

Fie cele patru cercuri mari date — laturile patrulaterului sferic (împreună cu prelungirile lor) — tangente la același cerc mic, respectiv în punctele M, N, P și Q. Să considerăm arcul AB al primului cerc mare (fig. 66), care conține punctul de contact M și are extremitățile în punctele de intersecție A și B ale acestui cerc mare cu două dintre celelalte cercuri mari date, *cele mai apropiate de punctul de contact* M. Acest arc AB, împreună cu arcele analoge ale celorlalte cercuri mari date, formează, evident, un patrulater convex circumscris, căruia i se aplică raționamentele de mai sus. De aici rezultă următoarea propoziție.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic (convex sau nu) *să poată fi circumscris unui cerc mic este ca cel puțin în unul dintre patrulaterele sferice convexe, formate de arcele acelorași cercuri mari ca și laturile patrulaterului dat, suma a două laturi opuse să fie egală cu suma celorlalte două laturi opuse.*

Observații. 1° Ultima propoziție demonstrată nu are analogă în Geometria plană.

De exemplu, dacă un patrulater plan concav dat $ABCD$ este circumscris unui cerc exterior patrulaterului (fig. 68), atunci patrulaterul convex $A'BC'D$, format de

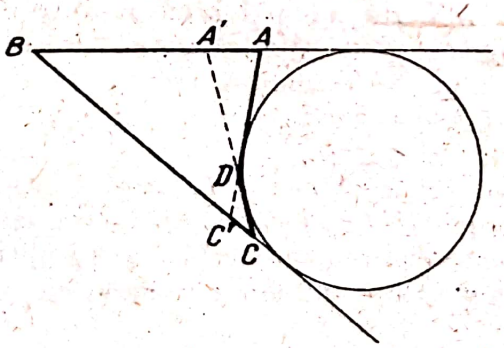


Fig. 68

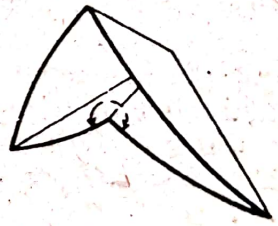


Fig. 69

aceleași patru drepte ca și cel dat, nu satisface în general condiția $A'B + C'D = BC' + A'D$.

Avem aici *o deosebire esențială între proprietățile patrulaterelor circumscrise în plan și pe sferă.*

2° Există trei tipuri de patrulatere sferice neconvexe, și anume

a) concav, cu un singur unghi intrat, adică cu un unghi mai mare de 180° (fig. 69);

[1]) Demonstrația dată aici subzistă în întregime și pentru cazul unui patrulater plan.

b) concav, cu două unghiuri opuse intrate (fig. 70);
c) impropriu, cu două laturi care se întretaie (fig. 71).

Primul și al treilea din aceste trei tipuri sînt în totul analoge celor două tipuri corespunzătoare de patrulatere neconvexe în plan. Patrulaterele sferice de tipul al doilea nu au analoge în plan; un astfel de patrulater se poate obține, de exemplu, considerînd cele două triunghiuri ABD și CBD (fig. 70), dispuse de o parte și de cealaltă a laturii lor comune BD și avînd fiecare cîte un unghi obtuz în vîrfurile B și D.

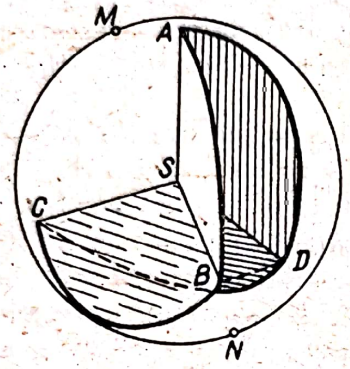


Fig. 70

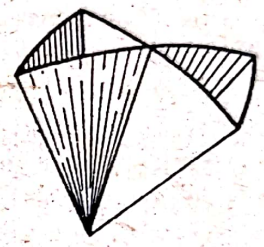


Fig. 71

Analizînd succesiv toate cazurile posibile aici (după cum am procedat la soluția ex. 87), putem demonstra următoarea propoziție:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic (convex sau nu) *să poată fi circumscris unui cerc mic este ca suma a două oarecare dintre laturile sale* (opuse sau vecine) *să fie egală cu suma celorlalte două laturi.*

Menționăm că, în patrulaterul sferic impropriu (fig. 71), pot fi egale între ele numai sumele a două laturi vecine, pe cînd în patrulaterele de celelalte tipuri, atît sumele laturilor opuse, cît și sumele laturilor consecutive.

3° În privința altor proprietăți ale patrulaterelor sferice circumscrise, v. soluția exercițiului 652.

497. Arcele tangente AM și AN ale cercurilor mari, duse din punctul dat A la cercul mic de pol O, formează două triunghiuri sferice dreptunghice simetrice, AOM și AON, cu ipotenuza AO comună (compară cu soluția ex. 489, construcția n, Obs.). Unghiul MAN va fi minim, dacă unghiul OAM al unuia dintre aceste triunghiuri va fi minim.

Însă din soluția exercițiului 489, construcția f, rezultă că unghiul cel mai mic al unui triunghi dreptunghic AOM cu o catetă OM dată (egală cu raza sferică a cercului mic dat), este egal cu această catetă [1]) și se obține în cazul cînd laturile AM și AO ale triunghiului sînt ambele egale cu un sfert de cerc mare.

Așadar, *unghiul minim dintre două cercuri mari tangente la un cerc mic dat și care trec printr-un punct dat se obține în cazul cînd distanța acestui punct la polul cercului mic este egală cu un sfert de cerc mare.*

498. Fie L și L' punctele de intersecție ale cercurilor mari BC și MN (fig. 72); AA_1, BB_1, și CC_1 arcele de cerc mare (mai mici), perpendiculare pe cercul mare MN. Triunghiurile sferice dreptunghice AMA_1 și BMB_1 sînt egale, deoarece au ipotenuzele egale și cîte un unghi egal, alăturat ipotenuzei

[1]) V. nota la acest exercițiu.

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ IAȘI

(v. soluția ex. 489, construcția k, Obs.). De aici reiese că $AA_1 = BB_1$. Analog, din egalitatea triunghiurilor ANA_1 și CNC_1, rezultă egalitatea arcelor AA_1 și CC_1. Așadar, avem $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Triunghiurile sferice dreptunghice BLB_1 și $CL'C_1$ sînt simetrice, deoarece au cîte o catetă egală ($BB_1 = CC_1$) și cîte un unghi opus acestor catete egale, de asemenea egal, iar celelalte două catete nu pot fi suplementare, din cauza

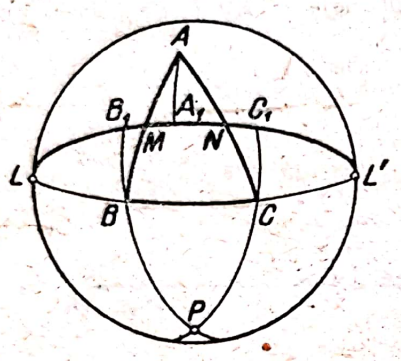


Fig. 72

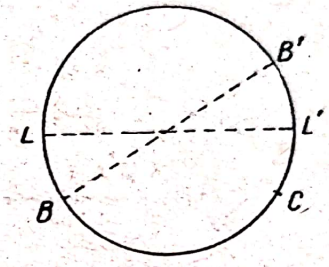


Fig. 73

inegalității $B_1L + C_1L' < 180°$ (compară cu soluția ex. 489, construcția f, Obs.). De aici urmează că $BL = CL'$.

Deoarece arcele BL și CL' sînt egale, *punctele de intersecție L și L' ale cercului mare MN cu cercul mare BC vor fi mijloacele respective ale celor două arce avînd extremitățile în punctul C și în punctul B', diametral opus lui B, anume mijloacele arcelor CLB' și $CL'B'$ (fig. 73).*

Polul P al cercului mare MN este punctul de intersecție al cercurilor mari BB_1 și CC_1, perpendiculare pe MN. Deoarece arcele BB_1 și CC_1 sînt egale, vor fi egale și arcele PB și PC, complementele arcelor BB_1 și CC_1. Cu alte cuvinte, polul P al cercului mare MN este egal depărtat de punctele B și C.

Arcele PB și PC formează unghiul BPC, avînd ca măsură arcul B_1C_1 al cercului mare MN. Dat fiind că $MA_1 = MB_1$ (cf. egalității triunghiurilor AMA_1 și BMB_1) și analog $NA_1 = NC_1$, arcul B_1C_1 va fi dublul arcului MN. De aceea, și *unghiul BPC va fi dublul unghiului MPN format de arcele de cercuri mari MP și NP.*

PROBLEMELE LA CARTEA A CINCEA

499. Fie de construit o dreaptă D (fig. 74), care taie două drepte date D' și D'', respectiv sub unghiurile α și β date; fără a restrînge generalitatea, putem considera că unghiurile α și β sînt *ascuțite*.

Să ducem, printr-un punct arbitrar S din spațiu, dreptele SA și SB, respectiv paralele la D'' și la D', și dreapta SC, paralelă cu dreapta căutată. Dacă vom putea, după dreptele date SA și SB, să construim dreapta SC, care formează cu ele unghiuri ascuțite respectiv egale cu β și cu α, problema se va reduce la aceea considerată în exercițiul 429: să se ducă o dreaptă D, paralelă cu o dreaptă construită SC și care să intersecteze dreptele D' și D''. Așadar,

totul se reduce la construcția dreptei SC, care formează cu cele două drepte date SA și SB unghiurile date, altfel spus, problema se reduce la următoarele: *să se construiască un triedru cunoscînd cele trei unghiuri plane, dintre care două sînt unghiurile ascuțite* α *și* β, *iar al treilea poate fi egal cu oricare dintre unghiurile formate de dreptele* SA *și* SB.

Pentru rezolvarea acestei din urmă probleme, este suficient, evident, să construim unul dintre diedrele triedrului căutat $S \cdot ABC$. În acest scop, ducem

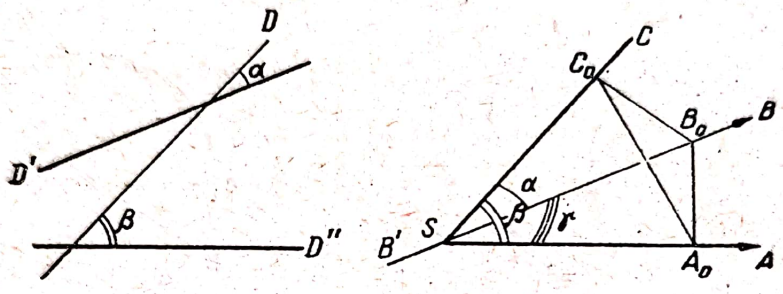


Fig. 74

prin punctul arbitrar C_0 al muchiei SC, în fețele SAC și SBC, dreptele A_0C_0 și B_0C_0, perpendiculare pe SC. Construim acum, într-un plan arbitrar, unghiurile $bsc = \alpha$, $csa = \beta$; $asb' = \gamma$ (fig. 75). Mai departe, printr-un punct c_0 al semidreptei sc, satisfăcînd condiția $SC_0 = sc_0$ (adică, în fapt, printr-un punct *arbitrar* al semidreptei sc, deoarece segmentul SC_0 este arbitrar), ducem o dreaptă perpendiculară pe sc; fie a_0 și b_c punctele ei de intersecție cu sa și sb. În sfîrșit, pe semidreapta sb' luăm segmentul $sb'_0 = sb_0$. În acest caz, vom avea, evident, $b_0c_0 = B_0C_0$, $c_0a_0 = C_0A_0$, $a_0b'_0 = A_0B_0$. Construind acum triunghiul $a_1b_1c_1$, deoarece i se cunosc cele trei laturi $b_1c_1 = b_0c_0$, $c_1a_1 = c_0a_0$ și $a_1b_1 = a_0b'_0$, obținem un triunghi egal cu $A_0B_0C_0$, de unde se vede că unghiul $b_1c_1a_1$ este egal cu unghiul plan corespunzător diedrului cu muchia SC. Cunoscînd două unghiuri plane $\alpha = \widehat{BSC}$ și $\beta = \widehat{CSA}$ ale triedrului $S \cdot ABC$ și diedrul de muchie SC, este ușor să construim un triedru oarecare, egal cu $S \cdot ABC$, iar apoi chiar triedrul $S \cdot ABC$, avînd ca muchii dreptele *date* SA și SB. După ce triedrul $S \cdot ABC$ a fost construit, ducem dreapta D, după cum s-a indicat mai sus.

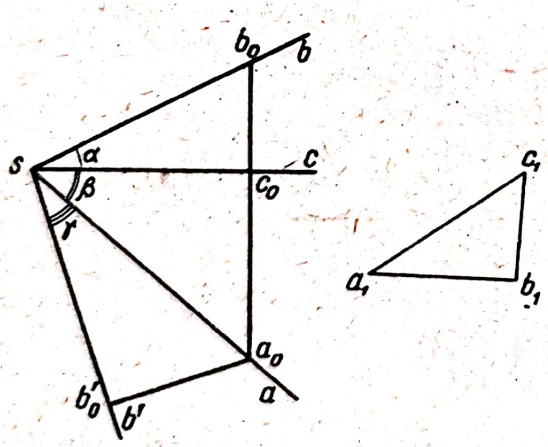


Fig. 75

Numărul de soluții ale problemei depinde de existența triedrelor avînd două unghiuri plane egale cu α și cu β, iar al treilea cu unul sau cu celălalt dintre cele două unghiuri formate de dreptele SA și SB. Numărul maxim de soluții este patru. În adevăr, fiind date direcțiile muchiilor SA și SB ale triedrului căutat $S \cdot ABC$ (fig. 74), muchia SC poate ocupa, evident, două poziții în spațiu, deoarece diedrul de muchie SA poate fi construit de o parte sau de

cealaltă a planului ASB. Mai departe, putem obține încă două poziții ale muchiei SC, luînd ca muchii ale triedrului semidreapta SA și prelungirea SB' a muchiei SB dincolo de vîrful S.

Observație. Problema construirii unui *triedru cunoscînd cele trei unghiuri plane ale sale* a fost rezolvată mai sus numai în ipoteza că două dintre unghiurile plane date sînt ascuțite.

Dacă printre unghiurile plane date avem două obtuze, să zicem BSC și CSA, putem construi triedrul $S{\cdot}ABC'$, unde SC' este prelungirea dincolo de vîrful S a

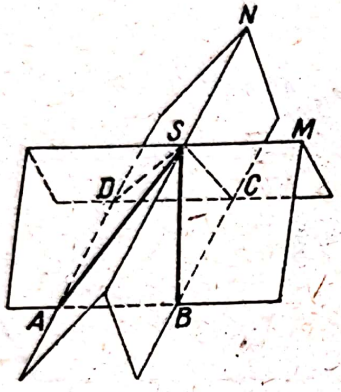


Fig. 76

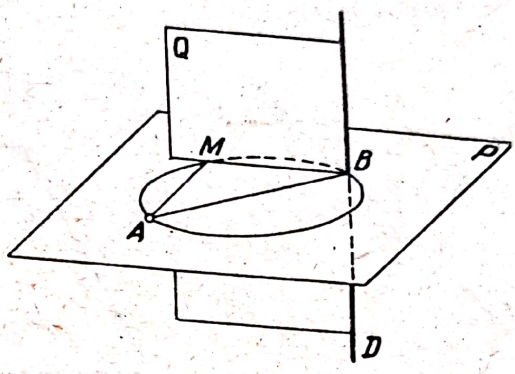


Fig. 77

muchiei SC, deoarece unghiurile BSC' și $C'SA$ sînt ambele ascuțite. Dacă printre unghiurile plane date, nu avem nici două ascuțite, nici două obtuze, ci avem un singur unghi ascuțit, de exemplu BSC, și un unghi obtuz, de exemplu CSA (pe cînd al treilea unghi este drept), putem construi triedrul $S{\cdot}A'BC$, unde SA' este prelungirea muchiei SA dincolo de vîrful S, deoarece unghiurile BSC și SCA', sînt ambele ascuțite. În sfîrșit, dacă printre unghiurile plane date două sînt drepte, de exemplu BSC și CSA, problema se reduce la construirea unei perpendiculare pe planul ASB.

Așadar, problema construirii unui triedru cunoscînd cele trei unghiuri plane poate fi rezolvată în toate cazurile.

500. Fie $S{\cdot}ABCD$ un unghi poliedru cu patru fețe, $ABCD$ secțiunea lui printr-un plan, avînd forma unui paralelogram (fig. 76).

Deoarece dreptele AB și CD sînt paralele, dreapta de intersecție SM a planelor SAB și SCD este paralelă cu dreptele AB și CD (**327**, Obs.). Din același motiv, intersecția SN a planelor SAD și SBC va fi paralelă cu dreptele BC și DA. Așadar, planul secant $ABCD$ trebuie să fie paralel cu planul SMN, determinat de dreptele de intersecție ale celor două perechi de fețe opuse ale unghiului nostru poliedru. Această condiție va fi, evident, și suficientă pentru ca secțiunea să fie un paralelogram.

Paralelogramul va fi romb, dacă planele diagonale SAC și SBD vor intersecta planul secant, deci și planul SMN, după drepte perpendiculare.

Paralelogramul $ABCD$ va fi dreptunghi, dacă dreptele de intersecție SM și SN ale fețelor opuse vor fi perpendiculare.

501. Să presupunem că se cere să aflăm locul geometric al picioarelor M ale perpendicularelor coborîte din punctul dat A pe un plan care trece printr-o dreaptă dată D (fig. 77).

Deoarece dreapta AM este perpendiculară pe planul Q, care trece prin dreapta D, ea va fi perpendiculară și pe dreapta D. Deci, locul geometric al

dreptelor AM este planul P, care trece prin punctul A și este perpendicular pe dreapta D (**341** *bis*). Dacă AB este perpendiculara coborîtă din punctul A pe dreapta D, unghiul AMB este drept, deci punctul M este situat pe cercul de diametru AB și conținut în planul P.

Evident, acest cerc este locul geometric al punctelor M.

502. Fie D și D' dreptele date (fig. 78), HH' perpendiculara lor comună, AA' unul dintre segmentele considerate, iar M mijlocul lui.

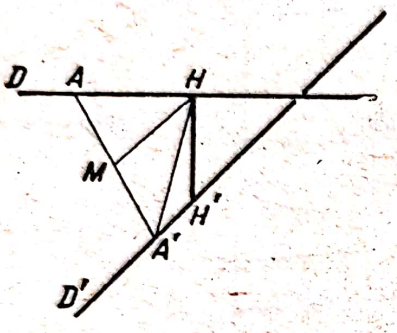


Fig. 78

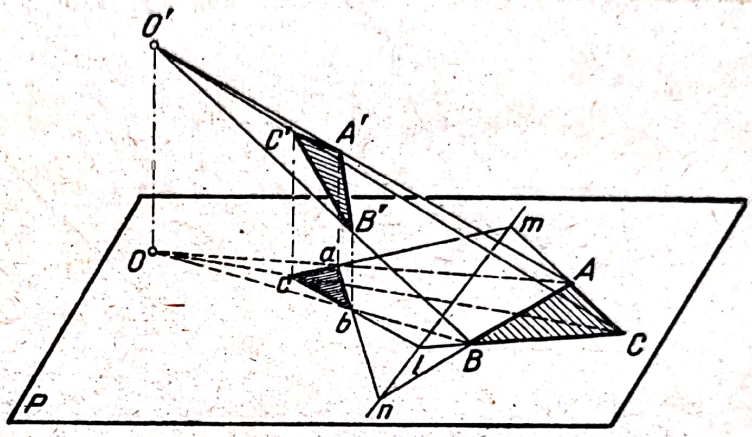


Fig. 79

Deoarece, prin ipoteză, dreapta D este perpendiculară pe HH' și pe D', ea este perpendiculară și pe HA'. De aceea, segmentul HM, ca mediană a triunghiului dreptunghic $AA'H$, este egal cu jumătatea ipotenuzei AA'.

Totodată, punctul M este situat în planul paralel cu dreptele D și D' și se află la distanță egală de acestea (cf. soluției ex. 432). Prin urmare, este vorba despre locul geometric al punctelor situate într-un plan dat și egal depărtate de un punct dat, exterior acestui plan. Acest loc geometric este un cerc (**344**).

Locul geometric există, dacă lungimea segmentului AM este mai mare decît jumătatea segmentului HH', adică dacă lungimea dată a segmentului AA' este mai mare decît HH'; se transformă într-un punct, dacă $AA' = HH'$; și nu există, dacă AA' este mai mic decît HH'.

503. Fie date două triunghiuri ABC și abc (fig. 79), situate în același plan P și avînd proprietatea că dreptele Aa, Bb și Cc sînt concurente într-un punct O. Să alegem în spațiu un punct arbitrar O', a cărui proiecție este punctul O. Fie, mai departe, A', B' și C' punctele situate respectiv pe dreptele $O'A$, $O'B$ și $O'C$ și avînd ca proiecții pe planul dat punctele a, b și c (cu alte cuvinte, A' este punctul de intersecție al dreptei $O'A$ cu perpendiculara ridicată în punctul a pe planul P etc.).

Laturile omoloage ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$, anume BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$, sînt situate două cîte două în același plan; ne vom mărgini la cazul general, cînd nu avem nici o pereche de laturi omoloage paralele. În virtutea exercițiului 425, 2°, punctul de intersecție l al laturilor BC și $B'C'$, punctul de intersecție m al laturilor CA și $C'A'$ și punctul de intersecție n al laturilor AB și $A'B'$ sînt coliniare. Deoarece dreptele $B'C'$,

$C'A'$ și $A'B'$ trec respectiv prin punctele l, m, și n din planul P, rezultă că proiecțiile lor bc, ca și ab pe planul P trec prin aceleași puncte. Prin urmare, punctele de intersecție l, m și n ale laturilor omoloage ale triunghiurilor ABC și abc sînt coliniare.

Nu vom insista asupra cazurilor particulare, cînd două oarecare dintre laturile omoloage ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sînt paralele. În acest caz, se constată că una dintre laturile triunghiului ABC va fi paralelă cu omoloaga ei din triunghiul abc, iar punctele de intersecție ale celorlalte două perechi de laturi omoloage vor fi situate pe o dreaptă paralelă cu primele două laturi, sau că fiecare latură a triunghiului ABC va fi respectiv paralelă cu omoloaga ei din triunghiul abc.

504. La rezolvarea acestei probleme, vom exclude din analiză, în conformitate cu ipoteza, cazul în care unul dintre planele BCD, CDA, DAB și ABC este paralel cu acela dintre planele $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$ și $A'B'C'$ care îi corespunde și vom considera întîi cazul general, cînd nici o pereche de plane corespunzătoare nu coincid. Alături de acest caz general, vom mai considera și ipoteza că unul dintre primele patru plane, de exemplu ABC, coincide cu planul corespunzător $A'B'C'$. Rezervele și modificările pe care le-ar putea cere enunțurile generale, în acest caz excepțional, vor fi indicate de fiecare dată între paranteze.

Să notăm cu a, b și c intersecțiile planelor BCD și $B'C'D'$, CDA și $C'D'A'$, DAB și $D'A'B'$, cu d intersecția planelor ABC și $A'B'C'$ (în cazul cînd aceste plane sînt secante).

Vom presupune inițial că nici una dintre dreptele AB, AC, AD, BC, BD și CD nu este paralelă cu omoloaga ei respectivă, $A'B'$, $A'C'$, ... și $C'D'$. Deoarece dreptele AB și $A'B'$ se află prin ipoteză, în același plan însă nu sînt paralele, ele se intersectează într-un punct pe care-l vom nota cu P_{12}. Analog, vom nota cu P_{13} punctul de intersecție al dreptelor AC și $A'C'$, ..., cu P_{34} punctul de intersecție al dreptelor CD și $C'D'$. Punctele P_{23}, P_{24} și P_{34} se află pe dreapta de intersecție a a planelor BCD și $B'C'D'$, deoarece în aceste puncte se taie respectiv dreptele BC și $B'C'$, BD și $B'D'$, CD și $C'D'$. Tot astfel, punctele P_{13}, P_{14} și P_{34} se găsesc pe dreapta b, iar punctele P_{12}, P_{14} și P_{24} pe dreapta c. Așadar, cele trei drepte a, b și c se află în planul $P_{14}P_{24}P_{34}$. În același plan vor fi situate și punctele P_{12}, P_{13} și P_{23}, deci și dreapta de intersecție d a planelor ABC și $A'B'C'$, care trece prin ele (în cazul cînd aceste plane sînt distincte; dacă însă planul ABC coincide cu $A'B'C'$, punctele P_{12}, P_{13} și P_{23} vor fi coliniare în planul ABC).

Acest raționament nu va necesita modificări esențiale dacă nici una dintre dreptele AD, BD și CD nu este respectiv paralelă cu $A'D'$, $B'D'$ și $C'D'$, iar printre cele trei perechi de drepte BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ există perechi paralele. În acest caz, unele dintre punctele P_{12}, P_{13} și P_{23} nu există.

Fie acum una dintre cele trei drepte AD, BD și CD, de exemplu CD, paralelă cu dreapta $C'D'$. În acest caz, punctul P_{34} nu există, însă punctele P_{13} și P_{14} de pe dreapta b există, deoarece, altfel, planele ACD și $A'C'D'$ ar fi paralele; din aceeași cauză, există și punctele P_{23} și P_{24} de pe dreapta a. Intersecția a a planelor BCD și $B'C'D'$, precum și intersecția b a planelor ACD și $A'C'D'$ vor fi ambele paralele cu dreptele CD și $C'D'$, deci vor fi paralele între ele. Cele două drepte paralele a și b și dreapta c, care le taie

Scanned with OKEN Scanner

respectiv în punctele P_{24} și P_{14}, sînt situate iarăși în același plan. Vor fi situate, de asemenea, în același plan punctele P_{23} și P_{13}, deci și dreapta d, care trece prin ele (dacă planele ABC și $A'B'C'$ sînt distincte).

Așadar, *cele patru drepte despre care este vorba în ipoteza teoremei se află în același plan.*

Să presupunem acum că două triunghiuri ABC și $A'B'C'$, situate în același plan, au proprietatea că dreptele AA', BB' și CC' sînt concurente într-un punct O.

Să alegem un punct arbitrar D, exterior planului ABC, iar pe dreapta OD un punct D', astfel ca nici unul dintre planele BCD, CDA și DAB să nu fie paralel cu cel care îi corespunde dintre planele $B'C'D'$, $C'D'A'$ și $D'A'B'$. În acest caz, vom aplica celor opt puncte A, B, C, D, A', B', C' și D' raționamentele de mai sus, în ipoteza că planele ABC și $A'B'C'$ coincid. După cum s-a demonstrat mai sus, în această ipoteză, punctele de intersecție P_{23}, P_{13} și P_{12} ale laturilor BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ (în ipoteza că toate trei punctele există) sînt coliniare în planul ABC. Prin aceasta, am demonstrat teorema (**195**) despre care este vorba în textul problemei 503.

505. Să presupunem că un plan oarecare taie laturile (sau prelungirile laturilor) unui poligon strîmb dat, pentru a fixa ideile, laturile AB, BC, CD, DE, EF și FA ale exagonului $ABCDEF$, respectiv în punctele K, L, M, N, P și Q. Să notăm cu U, V și W punctele de intersecție ale aceluiași plan cu diagonalele AC, AD și AE ale poligonului nostru (dacă aceste trei puncte există).

Punctele K, L și U, situate respectiv pe laturile AB, BC și CA ale triunghiului ABC, sînt coliniare, și anume ele se află pe dreapta de intersecție a planului triunghiului cu planul P. Prin urmare (**192**), are loc relația $\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{UC}{UA} = 1$; această egalitate, ca și toate cele următoare, este valabilă ca mărime și ca semn, dacă vom considera rapoartele unor segmente orientate. Aplicînd aceeași teoremă fiecăruia dintre triunghiurile ACD, ADE și AEF, mai căpătăm trei egalități analoge:

$$\frac{UA}{UC} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{VD}{VA} = 1; \quad \frac{VA}{VD} \cdot \frac{ND}{NE} \cdot \frac{WE}{WA} = 1 \text{ și } \frac{WA}{WE} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{QF}{QA} = 1.$$

Din aceste patru egalități, obținem, prin înmulțire membru cu membru și după simplificări evidente, relația căutată

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{ND}{NE} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{QF}{QA} = 1. \qquad (1)$$

Demonstrația se extinde în mod evident la cazul unui număr arbitrar de laturi.

Dacă diagonala AC ar fi paralelă cu planul P, dreptele KL și MV ar fi paralele cu AC și primele două dintre cele patru egalități de mai sus ar trebui înlocuite prin următoarele: $\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} = 1$; $\frac{MC}{MD} \cdot \frac{VD}{VA} = 1$. Relația (1) subzistă. Ar trebui să introducem modificări analoge dacă diagonala AD ar fi paralelă cu planul P etc.

Scanned with OKEN Scanner

Să demonstrăm teorema reciprocă, pentru cazul patrulaterului $ABCD$. Să presupunem că pe laturile AB, BC, CD și DA (sau pe prelungirile lor) am ales astfel punctele K, L, M și N, încît

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{ND}{NA} = 1.$$

Dacă vom nota cu N' punctul de intersecție a planului KLM cu latura DA, vom avea, în virtutea teoremei directe,

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{N'D}{N'A} = 1.$$

Din ultimele două egalități, căpătăm $ND : NA = N'D : NA$, astfel că punctul N' coincide cu N. Așadar, reciproca a fost demonstrată pentru cazul unui patrulater.

Să arătăm că reciproca nu mai este adevărată pentru un poligon avînd numărul de laturi mai mare decît patru, de exemplu pentru un exagon. În adevăr, alegem pe laturile AB, BC, CD și DE patru puncte K, L, M și N, despre care știm că *nu sînt* situate în același plan; totuși, putem alege punctele P și Q pe laturile EF și FA, astfel ca relația (1) să fie satisfăcută. Considerații analoge sînt aplicabile pentru orice număr de laturi mai mare decît patru.

506. Să coborîm dintr-un punct B al semidreptei OB perpendiculara BH pe planul dat (fig. 80) și să luăm, pe prelungirea ei dincolo de punctul H, segmentul $HB' = BH$. Orice semidreaptă OD, situată în acest plan, formează cu semidreptele OB și OB' unghiurile egale BOD și $B'OD$, deoarece dreapta OH este bisectoarea unghiului BOB', iar planul BOB' este perpendicular pe planul dat (compară cu nr. **346**). În virtutea acestui fapt, vom avea, pentru orice semidreaptă OD din acest plan, $\widehat{AOD} + \widehat{DOB} = \widehat{AOD} + \widehat{DOB'} \geqslant \widehat{AOB'}$; inegalitatea va avea loc conform teoremei referitoare la suma a două unghiuri plane ale unui triedru (**375**), cînd semidreapta OD nu se va afla în planul BOB', iar egalitatea, cînd se va situa în acest plan. De aici rezultă că suma $\widehat{AOD} + \widehat{DOB}$ va fi minimă (anume egală cu $\widehat{AOB'}$), dacă semidreapta OD va coincide cu intersecția OC a planului AOB' cu planul dat (compară cu ex. 13, precum și cu ex. 452).

Observație. Dacă OD este o semidreaptă arbitrară a planului dat, distinctă de semidreapta OC, pentru care suma unghiurilor plane $\widehat{AOC} + \widehat{COB}$ are un minim, atunci, în planul dat, se va putea găsi o semidreaptă OD', oricît de apropiată de OD, pentru care să aibă loc inegalitatea $\widehat{AOD'} + \widehat{D'OB} < \widehat{AOD} + \widehat{DOB}$. În adevăr, este suficient să alegem semidreapta OD' în interiorul triedrului $O \cdot AB'D$, pentru ca să aibă loc (compară cu **376**) inegalitatea $\widehat{AOD'} + \widehat{D'OB'} < \widehat{AOD} + \widehat{DOB'}$, care coincide, în fond, cu cea precedentă.

507. Să coborîm, dintr-un punct B al semidreptei OB, perpendiculara BH pe planul dat (fig. 81) și să luăm, pe prelungirea ei dincolo de punctul H,

segmentul $HB' = BH$. Orice semidreaptă OD, situată în planul dat, formează cu semidreptele OB și OB' unghiuri egale (compară cu soluția problemei 506). În virtutea acestui fapt, pentru orice semidreaptă OD din planul dat, vom avea $|\widehat{AOD} - \widehat{BOD}| = |\widehat{AOD} - \widehat{B'OD}| \leqslant \widehat{AOB'}$; inegalitatea va avea loc (**375**), cînd semidreapta OD va fi exterioară planului BOB', iar egalitatea, cînd se va afla în acest plan. De aici rezultă că diferența $|\widehat{AOD} - \widehat{BOD}|$ este maximă (anume, egală cu BOB'), cînd semidreapta OD coincide

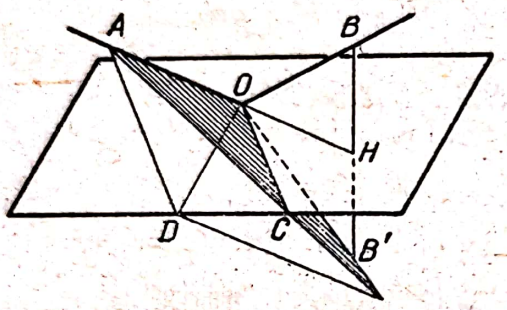


Fig. 80

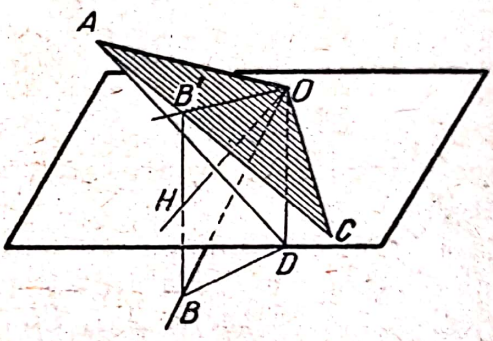


Fig. 81

cu intersecția planului BOB' cu planul dat (compară cu ex. 15, precum și cu exercițiul 453).

508. Să ducem prin muchia diedrului dat un semiplan exterior acestuia și fie AXB, BXC și AXC (fig. 82) unghiurile plane ale celor trei diedre astfel obținute. Printr-un punct arbitrar O al muchiei, diferit de X, ducem pe fețele diedrelor semidrepte care formează cu semidreapta OX unghiuri ascuțite egale și să notăm cu A, B și C punctele lor de intersecție cu laturile unghiurilor plane. Vom avea $XA = XB = XC$ și $OA = OB = OC$.

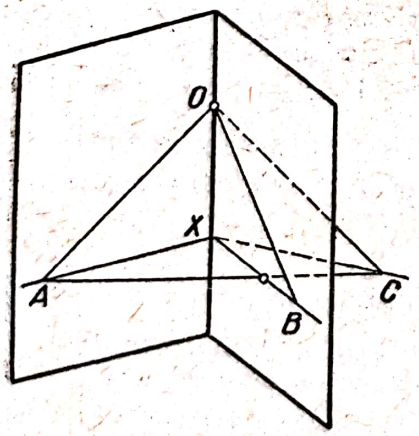


Fig. 82

În virtutea egalității $XA = XB = XC$, punctele A, B și C sînt evident necoliniare și, de aceea, semidreptele XA, XB și XC nu sînt situate în același plan. Din triedrul $O \cdot ABC$, găsim $\widehat{AOC} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$. Această din urmă inegalitate ne arată că unghiul AOB *nu variază proporțional* cu unghiul AXB, deoarece în cazul proporționalității, egalitatea $\widehat{AXB} + \widehat{BXC} = \widehat{AXC}$ ar implica $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ (compară cu nr. **17**).

Pentru a rezolva problema dacă raportul dintre unghiul AOB și unghiul plan AXB (fig. 82) va crește sau va descrește o dată cu creșterea acestuia din urmă, sîntem nevoiți să recurgem la formulele fundamentale ale trigonometriei și la proprietățile derivatei.

Să presupunem $x = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AXB}$; $y = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}$; $\alpha = \overset{\frown}{XOA} = \overset{\frown}{XOB}$. Dacă, la fel ca mai sus, avem $XA = XB$ și $OA = OB$, vom avea, cum ne dăm ușor seama, $\sin x = \frac{AB}{2XA}$; $\sin y = \frac{AB}{2OA}$; $\sin \alpha = \frac{XA}{OA}$, de unde deducem

$$\sin y = \sin \alpha \cdot \sin x. \tag{1}$$

Din egalitatea (1), obținem $y' \cos y = \sin \alpha \cdot \cos x$. Eliminînd $\sin \alpha$ din această egalitate și din egalitatea (1), găsim $y' \cdot \operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} x$. Derivînd fracția $\frac{y}{x}$ și folosind ultima egalitate, vom avea

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x \operatorname{cotg} x - y \operatorname{cotg} y}{x^2 \operatorname{cotg} y}. \tag{2}$$

În virtutea unei proprietăți cunoscute a derivatei, problema creșterii sau a descreșterii raportului y/x dintre unghiurile AOB și AXB se reduce la problema semnului membrului al doilea al egalității (2). După sensul problemei, este firesc să considerăm numai cazul în care unghiul AXB este mai mic de 180°, adică acel caz în care unghiul x, deci și y, sînt ambele ascuțite. În acest caz, $\operatorname{cotg} y > 0$, și problema se reduce la discuția semnului diferenței

$$x \operatorname{cotg} x - y \operatorname{cotg} y.$$

Semnul acestei diferențe se poate determina prin următoarele considerații. După cum se vede din egalitatea

$$(x \operatorname{cotg} x)' = \operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x - 2x}{\sin^2 x},$$

derivata funcției $x \operatorname{cotg} x$ este negativă (deoarece $\sin 2x < 2x$), și această funcție descrește cînd x crește. Însă în virtutea relației (1), avem $y < x$ și, deci

$$x \operatorname{cotg} x - y \operatorname{cotg} y < 0.$$

Așadar, derivata lui y/x este negativă, deci *raportul y/x dintre unghiul AOB și unghiul plan AXB al diedrului descrește cînd acesta din urmă crește.*

509. Să notăm cu α și cu β unghiurile pe care o dreaptă dată le formează cu planele date P și Q (prin definiție, unghiurile ascuțite sau drepte; nr. **364**), cu φ unghiul dintre aceleași plane (prin definiție, unghiul ascuțit sau drept; nr. **365**).

Deoarece unghiurile despre care este vorba nu se schimbă dacă înlocuim dreapta dată printr-o altă dreaptă paralelă cu ea, putem presupune, pentru a fixa ideile, că dreapta noastră taie dreapta de intersecție a planelor date P și Q într-un punct S. Fie SA una dintre semidreptele dreptei date. Să notăm cu SB și cu SC semidreptele care pornesc din punctul S, respectiv perpendiculare pe planele P și Q și formează cu SA unghiuri cel mult egale cu 1 dr. Vom avea (**364** *bis*) $\overset{\frown}{ASB} = 90° - \alpha$; $\overset{\frown}{ASC} = 90° - \beta$.

Dacă unghiul BSC, format de perpendicularele SB și SC pe planele P și Q, este ascuțit sau drept, el este egal cu unghiul dintre aceste plane (v. observația de la începutul soluției ex. 473). Așadar, în acest caz, $\widehat{BSC} = \varphi$ și inegalitatea $|\widehat{ASB} - \widehat{ASC}| \leqslant \widehat{BSC}$ dă $|(90° - \alpha) - (90° - \beta)| \leqslant \varphi$ sau $|\alpha - \beta| \leqslant \varphi$. Dacă însă unghiul BSC este obtuz, avem $\widehat{BSC} = 180° - \varphi$ și inegalitatea $\widehat{ASB} + \widehat{ASC} \geqslant \widehat{BSC}$ dă $(90° - \alpha) + (90° - \beta) \geqslant 180° - \varphi$, de unde $\alpha + \beta \leqslant \varphi$. Prin urmare, avem iarăși $|\alpha - \beta| \leqslant \varphi$, deoarece întotdeauna $|\alpha - \beta| \leqslant \alpha + \beta$.

510. Observăm că unghiul dintre o dreaptă D și un plan P' este egal cu unghiul format de planul P, perpendicular pe D și de dreapta D', perpendiculară pe P'. În adevăr, atît un unghi cît și celălalt este complementul, ascuțit sau drept, al unghiului format de dreptele D și D' (**364** *bis*).

Fie date acum planul P și două drepte D_1 și D_2. Unghiurile dintre planul P și fiecare dintre dreptele D_1 și D_2 sînt egale, în virtutea observației de mai sus, cu unghiurile pe care dreapta D, perpendiculară pe planul P, le formează cu fiecare dintre planele P_1 și P_2, respectiv perpendiculare pe dreptele D_1 și D_2. În afară de aceasta, unghiul dintre planele P_1 și P_2 este egal, în baza observației de la începutul soluției exercițiului 473, cu unghiul ascuțit sau drept, format de dreptele D_1 și D_2.

În virtutea problemei 509, diferența dintre unghiurile pe care dreapta D le formează cu planele P_1 și P_2 este cel mult egală cu unghiul acestor două plane. Înlocuind aici unghiurile formate de dreapta D cu planele P_1 și P_2 prin unghiurile respectiv egale formate de planul P și de dreptele date D_1 și D_2, iar unghiul planelor P_1 și P_2 prin unghiul ascuțit sau drept, egal, format de dreptele date D_1 și D_2, obținem propoziția care trebuia demonstrată.

511. Să presupunem că dreapta mobilă D are ca poziție limită dreapta D_0, iar planul mobil P are ca poziție limită planul P_0.

Să alegem un unghi arbitrar ε și să considerăm momentul de la care

$$(\widehat{P, P_0}) < \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad (\widehat{D, D_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

În acest caz, vom avea (probl. 509)

$$|(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D})| \leqslant (\widehat{P, P_0}) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

precum și (probl. 510)

$$|(\widehat{P_0, D}) - (\widehat{P_0, D_0})| \leqslant (\widehat{D, D_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Mai departe, are loc identitatea $(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D_0}) = [(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D})] + [(\widehat{P_0, D}) - (\widehat{P_0, D_0})]$, de unde, după proprietatea cunoscută a valorii absolute, obținem

$$|(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D_0})| \leqslant |(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D})| + |(\widehat{P_0, D}) - (\widehat{P_0, D_0})|. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, oricare ar fi ε, dacă sînt satisfăcute condiţiile (1), sînt îndeplinite şi condiţiile (2) şi (3); de aceea, în baza relaţiei (4), este satisfăcută şi condiţia

$$|(\widehat{P, D}) - (\widehat{P_0, D_0})| < \varepsilon.$$

Prin aceasta, teorema este demonstrată.

512. Dacă unghiurile plane egale sînt situate în planele date, atunci planul celei de-a treia feţe este perpendicular (ex. 485), pe planul bisector al unuia dintre diedrele formate de planele date. De aici rezultă că, pentru rezolvarea problemei, este suficient să ducem prin dreapta dată plane respectiv perpendiculare pe cele două plane bisectoare ale unghiurilor formate de planele date. Numărul maxim de soluţii este doi.

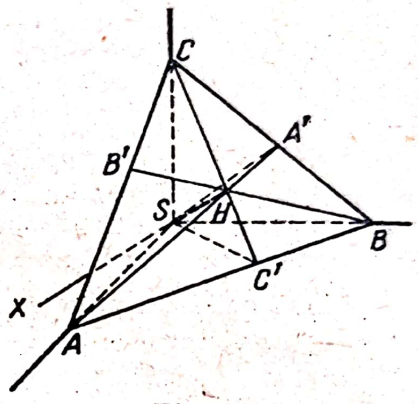


Fig. 83

Dacă însă unghiurile plane egale trebuie să fie situate unul într-un plan dat — să-l denumim planul nr. 1 — şi altul în planul căutat, atunci aceste două plane formează cu cel de al doilea plan dat unghiuri egale. De aici rezultă că, pentru rezolvarea problemei, este suficient să ducem prin dreapta dată planul care formează cu al doilea plan dat un diedru egal cu unghiul dintre planele date (ex. 465 *bis*).

În mod analog, putem construi un triedru isoscel avînd unghiurile plane egale în al doilea plan dat şi în planul căutat.

513. 1° Fie H proiecţia punctului S pe planul ABC (fig. 83). Planul SAH este perpendicular pe planul ABC (deoarece trece prin perpendiculara SH pe acest plan) şi pe planul SBC (dat fiind că trece prin perpendiculara SA pe acest plan). Planul SAH perpendicular pe planele ABC şi BSC, este perpendicular şi pe dreapta lor de intersecţie, BC. Prin urmare, dreptele AA' şi SA', după care planul SAH taie planele ABC şi BSC sînt de asemenea perpendiculare pe dreapta BC. Cu alte cuvinte, dreapta AA' este înălţime în triunghiul ABC, iar dreapta SA' înălţime în triunghiul SBC.

Aşadar, punctul H este situat pe înălţimea AA' a triunghiului ABC. În virtutea unor consideraţii analoge se deduce că este situat şi pe celelalte înălţimi BB' şi CC' ale aceluiaşi triunghi ABC şi coincide deci cu punctul de concurenţă al înălţimilor.

2° Deoarece dreapta SH este înălţimea triunghiului dreptunghic $AA'S$, avem $SA'^2 = AA' \cdot HA'$. Deoarece dreptele AA' şi SA' sînt, după cum am demonstrat, perpendiculare pe BC, rezultă că aria $SBC = \frac{1}{2} BC \cdot SA'$; aria $ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AA'$; aria $HBC = \frac{1}{2} BC \cdot HA'$, iar din relaţia iniţială obţinem, prin înmulţire cu $\frac{1}{4} BC^2$,

$$(\text{aria } SBC)^2 = \text{aria } ABC \cdot \text{aria } HBC.$$

Așadar, aria triunghiului SBC este medie proporțională între aria proiecției sale HBC pe planul ABC și între aria triunghiului ABC.

În același mod, deducem și celelalte două relații analoge.

3° Adunînd membru cu membru ultima egalitate obținută cu cele două egalități analoge, găsim

$$(\text{aria } SBC)^2 + (\text{aria } SCA)^2 + (\text{aria } SAB)^2 = \text{aria } ABC \cdot (\text{aria } HBC + \text{aria } HCA + \text{aria } HAB).$$

Dat fiind că SH este înălțime în triunghiul dreptunghic SAA', punctul H se află chiar pe segmentul AA' (nu pe prelungirea sa), și deci *în interiorul* triunghiului ABC. De aceea, aria HBC + aria HCA + aria HAB = aria ABC, iar relația precedentă devine

$$(\text{aria } SBC)^2 + (\text{aria } SCA)^2 + (\text{aria } SAB)^2 = (\text{aria } ABC)^2.$$

Observație. Deoarece punctul H este interior triunghiului ABC, acest triunghi este ascuțitunghi. Așadar, *dacă intersectăm un triedru având cele trei unghiuri plane drepte deci și cele trei diedre drepte cu un plan care nu trece prin vîrful său, triunghiul obținut în secțiune va avea unghiuri ascuțite.*

514. Să presupunem că vîrful S al triedrului căutat nu este situat în planul triunghiului dat. Din cele arătate în soluția exercițiului 513, rezultă că punctul S se află pe perpendiculara HX pe planul triunghiului ABC, care trece prin punctul de concurență H al înălțimilor acestuia (fig. 83). În afară de aceasta, înălțimea AA' a triunghiului dat trebuie să se vadă din punctul S sub un unghi drept. De aceea, punctul S trebuie să fie situat pe cercul de diametru AA', conținut într-un plan perpendicular pe planul ABC.

Pentru ca problema să aibă soluție, trebuie ca punctul H să se afle pe segmentul AA' (și nu pe prelungirea lui), iar *triunghiul ABC să fie ascuțitunghic*. În aceste condiții, dreapta HX va intersecta cercul despre care este vorba în două puncte, fiecare dintre ele putînd fi ales ca punct S. Se poate demonstra că, dacă punctul S se alege în acest fel, unghiurile BSC, CSA și ASB sînt drepte.

Observație. Ipoteza că punctul S se află în planul triunghiului duce la următoarea soluție lipsită de interes: triunghiul dat este dreptunghic; vîrful triedrului coincide cu vîrful unghiului drept al triunghiului dat, iar două dintre muchiile triedrului cu catetele triunghiului (compară cu triunghiul SAB și triedrul $S \cdot ABC$ în fig. 83).

Să presupunem că se cere să intersectăm triedrul tridreptunghic $SKLM$ dat printr-un plan, astfel ca secțiunea să fie un triunghi ABC, egal cu un triunghi dat abc.

Suprapunem în minte baza ABC a tetraedrului $S \cdot ABC$ cu triunghiul abc. Vîrful S va ocupa, în aceste condiții, o poziție s, astfel ca triedrul $s \cdot abc$ să aibă cele trei unghiuri plane drepte. De aici rezultă următoarea soluție a problemei:

Construim punctul s astfel ca triedrul $s \cdot abc$ să fie tridreptunghic. Mai departe, luăm pe muchiile acestui triedru, pornind de la vîrf, trei segmente SA, SB și SC, respectiv egale cu sa, sb și sc. Planul ABC va fi, evident, cel căutat.

Problema are soluții, dacă și numai dacă triunghiul dat abc este ascuțitunghic (v. mai sus). În acest caz, numărul maxim de soluții, anume șase, se

va obține dacă printre segmentele sa, sb și sc nu existau și segmente egale, deoarece fiecare dintre segmentele SA, SB și SC poate fi luat pe oricare dintre muchiile SK, SL și SM ale triedrului dat. De aceea, problema are șase soluții, dacă triunghiul dat este ascuțitunghic și nu are laturi egale (din egalitatea a două laturi ar rezulta și egalitatea a două dintre segmentele sa, sb și sc); trei soluții, dacă triunghiul dat este ascuțitunghic și isoscel; o singură soluție, dacă triunghiul dat este echilateral; și nu are soluții, dacă el este dreptunghic sau obtuzunghic.

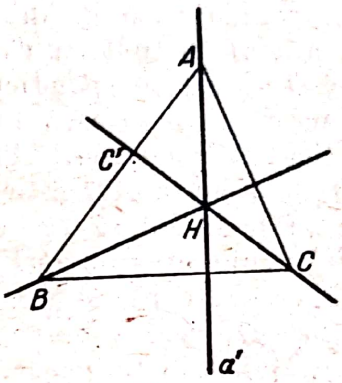


Fig. 84

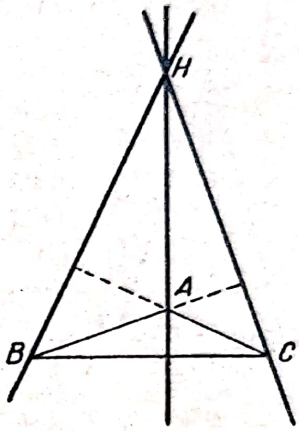


Fig. 85

515. Să presupunem că muchiile triedrului tridreptunghic $S{\cdot}ABC$ se proiectează pe un plan dat după trei drepte date HA, HB și HC (fig. 83 și 84). Să notăm cu A, B și C punctele de intersecție ale muchiilor triedrului cu planul dat. În virtutea celor spuse în soluția exercițiului 513, triunghiul ABC trebuie să fie ascuțitunghic, iar dreptele HA, HB și HC vor fi înălțimile sale.

Dacă HA, HB și HC sînt acum înălțimile tringhiului ascuțitunghic ABC, fiecare dintre cele trei unghiuri BHC, CHA și AHB este obtuz. În adevăr, unghiul BHC este unghi exterior triunghiului dreptunghic HBC', unde CC' este înălțimea triunghiului, etc. Așadar, dacă trei drepte concurente într-un punct H sînt înălțimile unui triunghi ascuțitunghic, putem alege pe aceste drepte sensuri HA, HB și HC, astfel ca toate trei unghiurile BHC, CHA și AHB să fie obtuze. Putem spune astfel că, *în cazul unui triunghi ascuțitunghic, fiecare dintre cele trei înălțimi trece prin interiorul unghiurilor obtuze, formate de celelalte două*: prelungirea HA' (fig. 83) a semidreptei HA este în interiorul triunghiului obtuzunghic BHC etc. Evident, această din urmă condiție nu este satisfăcută în cazul unui triunghi obtuzunghic; în fig. 85, înălțimea HA trece prin interiorul unghiului ascuțit BHC. Ea nu este satisfăcută nici în cazul unui triunghi dreptunghic, deoarece două înălțimi ale acestuia sînt perpendiculare.

Astfel, ajungem la următorul rezultat: *condiția necesară și suficientă pentru ca trei drepte date, situate în același plan și concurente, să fie proiecțiile muchiilor unui triedru tridreptunghic este ca fiecare dintre cele trei drepte să fie în interiorul unghiurilor obtuze formate de celelalte două.*

Necesitatea condiției a fost demonstrată. Să arătăm că este și suficientă. Cele trei drepte sînt, evident, înălțimile unui triunghi (soluția ex. 38, 1°). În virtutea celor spuse mai sus, acest triunghi nu poate fi nici obtuzunghic nici dreptunghic, deci el va fi ascuțitunghic. De aceea, există (v. soluția probl. 514) un triedru tridreptunghic, ale cărui muchii se proiectează după înălțimile acestui triunghi.

516. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că nici una dintre dreptele DA, DB și DC nu este perpendiculară pe planul ABC. Fie DH perpendiculara

coborîtă din punctul D pe planul ABC (fig. 86). Deoarece dreapta AB este, prin ipoteză, perpendiculară pe oblica CD, ea va fi perpendiculară și pe proiecția CH a acesteia. Tot astfel, deoarece dreapta AC este, prin ipoteză, perpendiculară pe oblica BD, ea va fi perpendiculară și pe proiecția BH a acesteia. În consecință, punctul H este punctul de concurență al înălțimilor triunghiului ABC și dreapta BC este perpendiculară pe AH. Deoarece dreapta BC este perpendiculară pe proiecția AH a oblicei AD, dreapta BC va fi perpendiculară și pe dreapta AD.

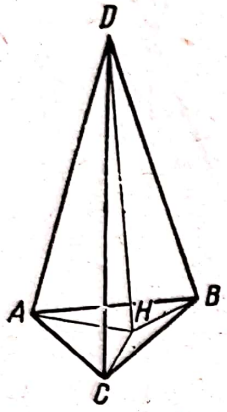


Fig. 86

Am demonstrat că dreptele BC și AD sînt perpendiculare, numai în ipoteza că nici una dintre dreptele AD, BD și CD nu este perpendiculară pe planul ABC. Să considerăm acum cazul în care una dintre aceste trei drepte este perpendiculară pe planul ABC.

Dacă dreapta AD este perpendiculară pe planul ABC, ea este perpendiculară și pe dreapta BC.

Fie acum dreapta BD perpendiculară pe planul ABC. Dat fiind că dreapta AB este, prin ipoteză, perpendiculară pe oblica CD, ea este perpendiculară și pe proiecția BC a acesteia. Mai departe, deoarece dreapta BC este perpendiculară pe proiecția AB a oblicei AD, ea va fi perpendiculară și pe această oblică.

În mod analog, demonstrăm că dreptele BC și AD sînt perpendiculare, dacă dreapta CD este perpendiculară pe planul ABC.

Așadar, am demonstrat că dreptele BC și AD sînt perpendiculare în toate cazurile.

Să presupunem acum că dreapta AB este perpendiculară pe CD (fără a face nici un fel de ipoteze despre perpendicularitatea celorlalte perechi de drepte). În aceste condiții, dreapta AB va fi perpendiculară și pe planul CDH, unde H este proiecția punctului D pe planul ABC. Deoarece planul care trece prin punctul C și este perpendicular pe dreapta AB este locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor lor la punctele A și B este egală cu $AC^2 - BC^2$ (ex. 446), avem $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ sau $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Dacă acum nu numai dreapta AB este perpendiculară pe CD, ci și dreapta AC este perpendiculară pe BD, vom avea, în afară de ultima egalitate, și următoarea: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Așadar, obținem

$$BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2.$$

517. Fie date trei plane P, Q și R care trec printr-o dreaptă d, iar în unul dintre ele, anume în planul P, o semidreaptă SA, care taie dreapta d în punctul S (fig. 42).

Prin dreapta SA, ducem un plan perpendicular pe planul R și notăm cu SB intersecția sa cu planul Q. Tot astfel, prin dreapta SA ducem un plan perpendicular pe planul Q și notăm cu SC intersecția sa cu planul R.

Triedrul $S.ABC$ este cel căutat. În adevăr, muchiile sale SA, SB și SC sînt situate respectiv în planele P, Q și R. Planul Q, care trece prin muchia SB, este perpendicular, prin construcție, pe fața SAC, iar planul R, care trece prin muchia SC, este perpendicular pe fața SAB. Prin urmare, planul

care trece prin muchia SA și prin intersecția d a planelor Q și R, adică planul P, va fi perpendicular, în virtutea exercițiului 481, pe fața BSC (compară cu soluția ex. 38, 1°).

În general, problema are o soluție unică, în sensul că dreapta SB este unică și dreapta SC de asemenea; totuși, dacă alegem pe dreapta SB una dintre cele două semidrepte SB și SB', iar pe dreapta SC una dintre cele două semidrepte SC și SC', căpătăm patru triedre $S{\cdot}ABC$, $S{\cdot}AB'C$, $S{\cdot}ABC'$ și $S{\cdot}AB'C'$, care satisfac enunțul problemei. Face excepție cazul în care dreapta

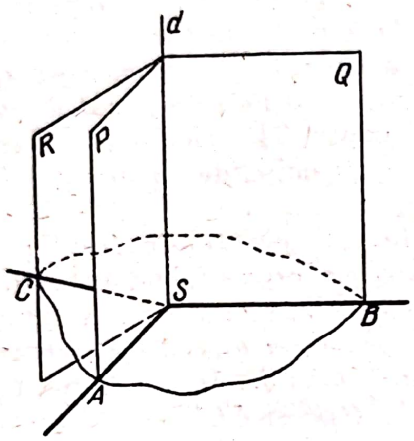


Fig. 87

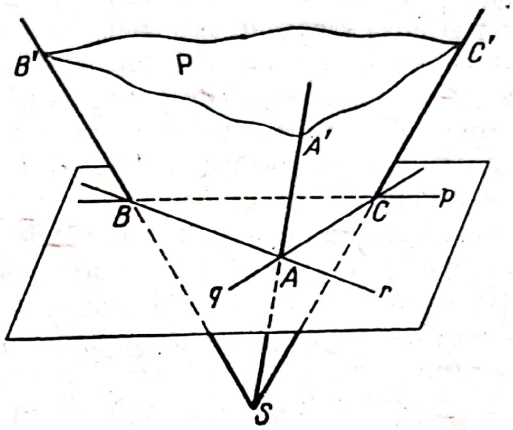


Fig. 88

SA este perpendiculară pe unul dintre planele Q sau R. În acest caz, problema are o infinitate de soluții. În adevăr, dacă dreapta SA este perpendiculară pe planul Q (fig. 87), atunci putem alege ca plan SAC orice plan care trece prin dreapta SA și este distinct de planul SAB, construit înainte.

518. Fie date trei drepte p, q și r, situate în același plan, și un plan P care trece prin una dintre ele, anume prin p. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că aceste trei drepte formează un triunghi (fig. 88).

În planul P, ducem, prin punctul de intersecție B al dreptelor p și r, dreapta BB', perpendiculară pe dreapta q, iar prin punctul de intersecție C al dreptelor p și q, dreapta CC', perpendiculară pe dreapta r. Dacă S este punctul de intersecție al acestor drepte, iar A punctul de intersecție al dreptelor q și r, atunci triedrul $S{\cdot}ABC$ este cel căutat.

În adevăr, una dintre fețele sale, anume BSC, coincide cu planul dat P, a doua față CSA trece prin dreapta q, iar a treia față ASB, prin dreapta r. Mai departe, dreptele q și r sînt respectiv perpendiculare, prin construcție, pe muchiile SB și SC. Prin urmare dreapta de intersecție a planului în care se află dreptele q și r cu fața BSC, adică dreapta p, va fi perpendiculară (conform observației la soluția ex. 482, 2°) pe muchia SA.

Construcția se modifică foarte puțin, dacă toate trei dreptele date sînt concurente într-un punct O. În acest caz, ducem prin punctul O, în planul P, dreptele OB și OC, respectiv perpendiculare pe dreptele q și r; mai departe, ducem a doua față a triedrului prin dreptele q și OC, a treia prin dreptele r și OB; notăm cu OA dreapta de intersecție a ultimelor două fețe.

Dacă dreptele p, q și r formează un triunghi (sînt concurente), problema are, în general, o soluție unică, în sensul că planele fețelor ocupă poziții pe deplin determinate în spațiu; însă aceste plane formează opt triedre. Face excepție cazul în care dreapta BB' și CC' (dreptele OB și OC) sînt paralele, precum și acela în care una dintre dreptele q sau r este perpendiculară pe planul P. În toate aceste cazuri, cum se vede ușor, *planul P este perpendicular pe planul dreptelor p, q și r.* Dacă, în acest caz, nici una dintre dreptele q și r nu este perpendiculară pe planul P, problema nu are soluții, deoarece dreptele BB' și CC' sînt paralele (dreptele OB și OC coincid). Dacă însă una dintre dreptele q și r, să zicem q, este perpendiculară pe planul P, problema devine nedeterminată; în adevăr, putem alege ca dreaptă BB' orice dreaptă care trece prin punctul B, este conținută în planul P și nu este paralelă cu dreapta CC', construită înainte (putem alege ca dreaptă OB orice dreaptă care trece prin punctul O, este situată în planul P și nu coincide cu dreapta OC, construită anterior).

Pînă acum, am considerat cazurile în care dreptele date p, q și r formează un triunghi sau sînt concurente. Deoarece este evident că problema nu are soluții, dacă cele trei drepte date sînt paralele, ne mai rămîne să cercetăm cazul în care două dintre dreptele date, de exemplu q și r, sînt paralele, iar dreapta a treia p le taie respectiv în punctele C și B. În acest caz, problema nu are în general soluții, deoarece dreptele BB' și CC', construite cum s-a arătat mai sus, sînt paralele. Face excepție numai cazul în care dreptele q și r sînt perpendiculare pe p, iar planul P este perpendicular pe planul dreptelor p, q și r, cu alte cuvinte, dacă dreptele q și r sînt perpendiculare pe planul P. Atunci problema devine nedeterminată, deoarece putem alege ca drepte BB' și CC' orice pereche de drepte concurente, care trec prin punctele B și C și sînt situate în planul P.

519. Să presupunem că, la fel ca în soluția exercițiului 454, am ales pe fiecare dintre dreptele D și D' un sens determinat, pe care-l vom numi *pozitiv*.

Luăm, pe dreptele D și D', două segmente arbitrare egale $AB = A'B'$ (fig. 9), ambele în sens pozitiv sau ambele în sens negativ. Mai departe, construim planul care este locul geometric al punctelor P, satisfăcînd respectiv condițiile[1]) $PA^2 - PA'^2 = h$ și $PB^2 - PB'^2 = h$. Aceste după plane sînt respectiv perpendiculare pe dreptele AA' și BB' și se intersectează deci după o dreaptă H_1, deoarece, altfel, segmentele AA' și BB' ar fi paralele, iar dreptele D și D' situate în același plan.

Orice punct P al dreptei H_1 satisface, conform definiției acesteia, condițiile $PA^2 - PA'^2 = PB^2 - PB'^2 = h$. Dacă vom lua acum pe dreptele D și D' două segmente egale $AM = AM'$, ambele în sens pozitiv sau ambele în sens negativ, vom avea, pentru orice punct P de pe dreapta H_1, după cum vom demonstra imediat, egalitățile $PM^2 - PM'^2 = PA^2 - PA'^2 = h$. În adevăr, avem, ca mărime și ca semn (v. soluția ex. 218)

$$PM^2 \cdot AB + PA^2 \cdot BM + PB^2 \cdot MA + AB \cdot BM \cdot MA = 0$$

și

$$PM'^2 \cdot A'B' + PA'^2 \cdot B'M' + PB'^2 \cdot M'A' + A'B' \cdot B'M' \cdot M'A' = 0,$$

[1]) În ediția în limba rusă, în locul numărului k^2 este numărul $k \leq 0$ (Nota Red. E.T.).

de unde, în virtutea egalităților $AB = A'B'$, $AM = A'M'$, $BM = B'M'$, căpătăm $(PM^2 - PM'^2) \cdot AB + (PA^2 - PA'^2) \cdot BM + (PB^2 - PB'^2) \times MA = 0$. Deoarece $PA^2 - PA'^2 = PB^2 - PB'^2 = h$ și $BM + MA = -AB$, egalitatea de mai sus ne dă $PM^2 - PM'^2 = h$. Aceasta înseamnă că *planul care este locul geometric al punctelor având diferența pătratelor distanțelor la punctele M și M' egală cu o mărime dată h, trece prin dreapta H_1.*

Vom obține o a doua dreaptă H_2, analogă lui H_1, luînd unul dintre segmentele AM și $A'M'$, în sensul pozitiv, iar pe celălalt, în sensul negativ.

Trecem la studiul proprietăților dreptelor H_1.

Să notăm cu p și cu p' proiecțiile punctului P pe dreptele D și D'. În triunghiurile PAB și $PA'B'$, vom avea, ca mărime și ca semn (compară cu nr. **126**) $PB^2 = PA^2 + AB^2 - 2AB \cdot Ap$ și $PB'^2 = PA'^2 + A'B'^2 - 2A'B' \cdot A'p'$, de unde, în virtutea egalităților $PB^2 - PB'^2 = PA^2 - PA'^2$ și $AB = A'B'$, obținem $Ap = A'p'$. Mai departe, $Pp^2 = PA^2 - Ap^2$ și $Pp'^2 = PA'^2 - A'p'^2$, de unde $Pp^2 - Pp'^2 = PA^2 - PA'^2 = h$. Așadar, *diferența pătratelor distanțelor oricăruia dintre punctele dreptei H_1 la dreptele D și D' este egală cu h.*

Să găsim acum locul geometric al dreptelor H_1, cu condiția ca punctele A și A' să rămînă pe loc, în timp ce constanta h variază; în aceste condiții putem păstra pe loc și punctele B și B'. Atunci vom avea, pentru orice punct P al fiecăreia dintre dreptele H_1, egalitatea

$$PA^2 - PA'^2 = PB - PB'^2. \tag{1}$$

Reciproc, dacă pentru un punct arbitrar P este satisfăcută egalitatea (1), punctul P aparține uneia dintre dreptele H_1; valoarea corespunzătoare a constantei h este egală cu valoarea comună a celor doi membri ai egalității (1). Această egalitate se mai poate scrie

$$PA^2 + PB'^2 = PA'^2 + PB^2. \tag{2}$$

Să notăm acum cu K și cu L mijloacele segmentelor AB' și $A'B$. Conform teoremei referitoare la mediana unui triunghi (**128**), vom avea

$$PA^2 + PB'^2 = 2PK^2 + \frac{1}{2}AB'^2; \quad PA'^2 + PB^2 =$$

$$= 2PL^2 + \frac{1}{2}A'B^2, \tag{3}$$

de unde, în virtutea relației (2), rezultă

$$PK^2 - PL^2 = \frac{1}{4}(A'B^2 - AB'^2). \tag{4}$$

Reciproc, din egalitatea (4), obținem ușor egalitatea (2), cu ajutorul lui (3), deci și relația (1). Egalitatea (4) ne arată că *locul geometric al punctelor P, adică locul geometric al dreptelor H_1 este planul perpendicular pe dreapta KL și care trece prin punctul acestei drepte, care satisface condiția* (4).

Mai mult, dacă punctele A și A' rămîn pe loc, în timp ce constanta h variază, dreapta H_1 se deplasează în planul găsit mai sus, *paralel cu ea*

Scanned with OKEN Scanner

însăși. În adevăr, în acest caz, se deplasează paralel cu el însuși planul care este locul geometric al punctelor P satisfăcînd condiția $PA^2 - PA'^2 = h$. Tot astfel, se deplasează paralel cu el însuși (dacă punctele B și B' sînt fixe) și planul analog, care corespunde condiției $PB^2 - PB'^2 = h$. Prin urmare, și intersecția H_1 a celor două plane va efectua o translație.

Așadar, punctele A și A' fiind date și h variind, dreapta H_1 se deplasează paralel cu ea însăși; pentru $h = 0$, dreapta H_1 coincide, evident, cu dreapta G_1, considerată la exercițiul 454 care corespunde acelorași puncte A și A'. De aici urmează că fiecare dreaptă H_1 este paralelă cu dreapta G_1 corespunzătoare acelorași puncte A și A'. Deoarece toate dreptele G_1, corespunzătoare diferitelor puncte A și A', sînt paralele cu un același plan γ_1 (v. soluția ex. 454), rezultă că și *toate dreptele* H_1, *care se obțin în condiția că punctele* A *și* A' *variază* (*iar* h *este constant*), *vor fi paralele cu un același plan, anume cu* γ_1.

Pe aceeași cale demonstrăm și proprietățile analoge ale dreptelor H_2.

Să demonstrăm, mai departe, că (pentru h dat) fiecare dreaptă H_1 intersectează fiecare dreaptă H_2. La fel ca în demonstrația proprietății corespunzătoare a dreptelor G_1 și G_2 din soluția exercițiului 454, putem considera că dreapta H_1 este determinată de punctele A și A' ale dreptelor D și D', iar dreapta H_2, de punctele A și A'' ale acelorași drepte, introducînd și punctele A_0 și A'_0 considerate acolo. În aceste condiții, planul care este locul geometric al punctelor P satisfăcînd condiția $PA_0^2 - PA'^2_0 = h$ trece prin dreapta H_1, deoarece $AA_0 = A'A'_0$, și ambele segmente sînt pozitive sau ambele negative; același plan trece și prin dreapta H_2, deoarece segmentele AA_0 și $A''A'_0$ sînt egale ca mărime, însă unul este pozitiv, iar celălalt negativ. Așadar, dreptele H_1 și H_2 se află în același plan. Deoarece fiecare dintre dreptele H_1 și H_2 este paralelă, conform celor demonstrate mai sus, respectiv cu una dintre dreptele G_1 și cu una dintre dreptele G_2 și că nici o pereche de drepte G_1 și G_2 nu sînt paralele (v. soluția ex. 454), rezultă *că dreptele* H_1 *și* H_2 *se taie*.

În sfîrșit, dacă un punct P din spațiu are proprietatea că diferența pătratelor distanțelor sale la dreptele D și D' este egală cu h, putem alege ca puncte A și A' picioarele perpendicularelor coborîte din punctul P pe aceste drepte. Repetînd raționamentele pe care le-am folosit la începutul soluției, ne convingem ușor că punctul P va fi situat atît pe dreapta H_1 cît și pe dreapta H_2, corespunzătoare punctelor A și A' astfel alese. Prin urmare, *prin orice punct* P *care satisface condiția indicată în enunțul problemei, trece o dreaptă* H_1 *și o dreaptă* H_2.

Scanned with OKEN Scanner

POLIEDRELE

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL I

520. Fie $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 89) un paralelipiped dat, O punctul de intersecție al diagonalelor, MM' un segment dat, care trece prin O. Trebuie să demonstrăm că $OM = OM'$.

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că punctele M și M' sînt pe fețele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ ale paralelipipedului. Dreapta MM' se află în același plan cu fiecare dintre diagonalele paralelipipedului, de exemplu cu BD', deoarece ea intersectează această diagonală în punctul O. Triunghiurile OBM și $OD'M'$ sînt egale; în adevăr, $OB = OD'$; $\widehat{BOM} = \widehat{D'OM'}$ și $\widehat{OBM} = \widehat{OD'M'}$, întrucît dreptele BM și $D'M'$ sînt paralele, ca intersecții ale planului BMO cu două fețe paralele. Din egalitatea triunghiurilor OBM și $OD'M'$ rezultă egalitatea segmentelor OM și $O'M'$.

521. Prin fiecare pereche dintre dreptele date, putem duce cîte o pereche de plane paralele. Aceste trei perechi de plane paralele vor mărgini paralelipipedul căutat. De exemplu, dacă dreptele date vor fi AB, CC' și $A'D'$ (fig. 89), paralelipipedul căutat va fi $ABCDA'B'C'D'$.

521 *bis*. Fie date două drepte fixe AB și CC' (ex. 521 și fig. 89), iar a treia dreaptă $A'D'$ se deplasează prin translație, rămînînd mereu în același plan.

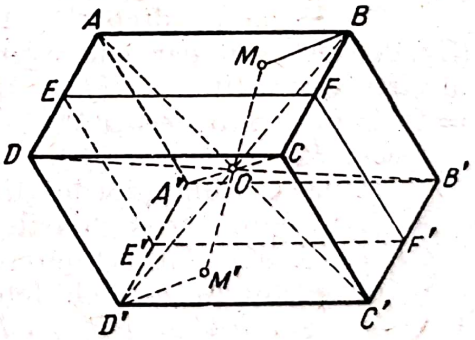


Fig. 89

Deoarece dreptele AB și CC' sînt fixe, nu se schimbă nici poziția planelor în care sînt situate fețele $ABB'A'$ și $CDD'C'$. Prin urmare, centrul O al paralelipipedului rămîne în planul $EFF'E'$, egal depărtat de cele două plane paralele.

Mai departe, la translația muchiei $A'D'$, rămîn pe loc planele în care se află fețele $ABCD$ și $BB'C'C$. Prin urmare, rămîne pe loc și muchia BC, deci și mijlocul ei punctul F.

Deoarece muchia $A'D'$, deplasîndu-se prin translație, descrie un plan, mijlocul ei E' descrie o dreaptă în planul fix $EFF'E'$. De aceea, și punctul O — mijlocul segmentului FE' — descrie o dreaptă omotetică în raport cu centrul de asemănare F cu dreapta pe care o descrie punctul E'.

522. Dacă diagonalele AC' și $A'C$ (fig. 89) sînt egale, paralelogramul $ACC'A'$ este un dreptunghi, iar muchiile laterale AA' și CC' sînt perpen-

diculare pe dreapta $A'C'$. Dacă diagonalele BD' și $B'D$ sînt egale, paralelogramul $BDD'B'$ este un dreptunghi, iar muchiile laterale BB' și DD' sînt perpendiculare pe dreapta $B'D'$. Prin urmare, și muchiile laterale AA' și CC' sînt perpendiculare pe dreapta $B'D'$.

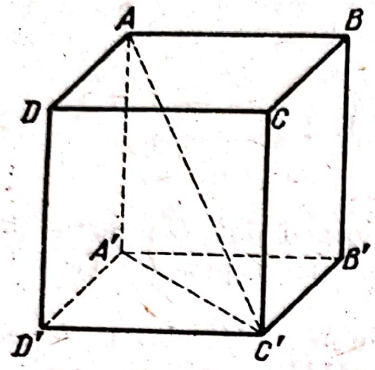


Fig. 90

Muchia laterală AA' fiind perpendiculară pe dreptele $A'C'$ și $B'D'$, va fi perpendiculară și pe planul $A'B'C'D'$.

Dacă $AC' = A'C = BD' = B'D$, demonstrăm astfel că *fiecare* muchie a paralelipipedului este perpendiculară pe fața corespunzătoare. Aceasta înseamnă că paralelipipedul este dreptunghic.

523. Luînd drept catete ale unui triunghi dreptunghic latura și diagonala unui pătrat oarecare, căpătăm un triunghi asemenea cu triunghiul $AA'C'$ (fig. 90). Cunoscînd lungimea diagonalei AC', construim pe acest segment, luat ca ipotenuză, un triunghi dreptunghic, asemenea cu cel construit înainte. Cateta lui mai mică va fi muchia cubului căutat.

524. 1° Evident, secțiunea diagonală $ACC'A'$ a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 91) trece prin mediana $A'M$ a triunghiului $A'BD$. Prin urmare, punctul de intersecție P al diagonalei AC' cu planul $A'BD$ se află pe această mediană.

Din aceeași cauză, punctul P se găsește și pe celelalte două mediane ale aceluiași triunghi (este suficient să considerăm secțiunea diagonală $AB'C'D$ sau $ABC'D'$), iar punctul Q, în care diagonala AC' taie planul $B'CD'$, este situat pe mediana triunghiului $B'CD'$.

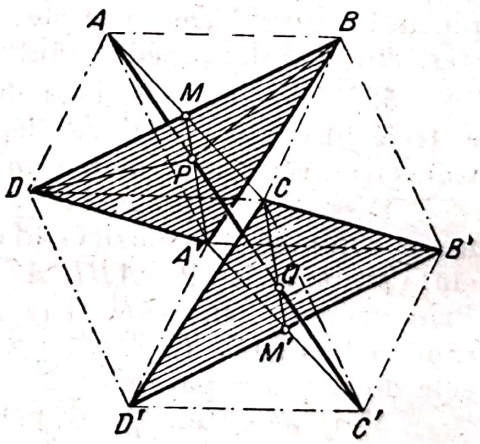


Fig. 91

2°. Deoarece dreptele $A'M$ și $M'C$ (fig. 91 și 92) sînt paralele, avem $AP = PQ$, în virtutea egalității $AM = MC$, și $PQ = QC'$, în virtutea egalității $A'M' = M'C'$, deducem $AP = PQ = QC'$.

3°. Dacă paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, triunghiurile $A'BD$ și $B'CD'$ (fig. 91) sînt echilaterale, deoarece laturile lor sînt diagonalele fețelor cubului. În acest caz, $PA' = PB = PD$, triunghiurile APA', APB și APD sînt egale (avînd cele trei laturi respectiv egale), și deci $\widehat{APA'} = \widehat{APB} = \widehat{APD}$. Dreapta AP este perpendiculară pe planul $A'BD$, conform exercițiului 444.

525. Una dintre secțiunile unui cub cu planele perpendiculare pe diagonala AC' (fig. 93) este triunghiul echilateral $A'BD$ (v. soluția ex. 524, 3°). Planele paralele cu planul $A'BD$ și care trec între vîrful A și acest plan, taie cubul după triunghiurile echilaterale EFG, care pot fi considerate drept secțiuni ale piramidei $AA'BD$ cu plane paralele la baza $A'BD$.

Planele perpendiculare pe diagonala AC' și care trec printre planul $B'CD'$ și vîrful C' taie cubul tot după triunghiurile RST, de asemenea echilaterale.

Planul perpendicular pe AC' și care trece prin mijlocul diagonalei este egal depărtat de planele $A'BD$ și $B'CD'$. De aceea, în acest plan, vom avea (în virtutea nr. **336**) punctele K, L, M, N, P și Q, mijloacele segmentelor BC, CD, DD', $D'A'$, $A'B'$ și $B'B$. Laturile hexagonului $KLMNPQ$ sînt toate egale: fiecare dintre ele este egală cu jumătatea diagonalei feței cubului. Vîrfurile sale sînt egal depărtate de centrul cubului, deci secțiunea este un hexagon regulat.

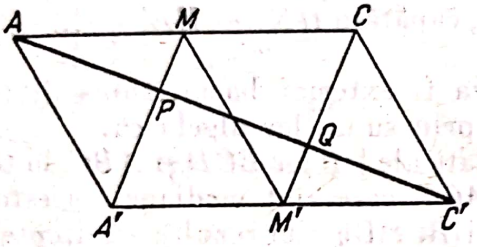


Fig. 92

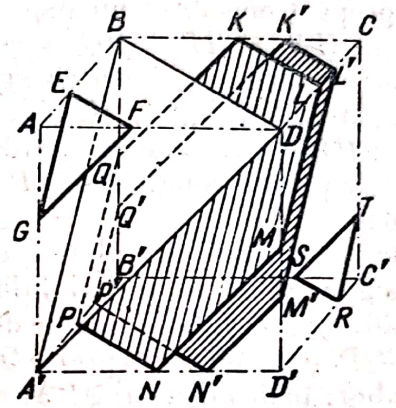


Fig. 93

Planele perpendiculare pe dreapta AC' și care trec printre planele $A'BD$ și $KLMNPQ$ sau între planele $KLMNPQ$ și $B'CD'$, taie cubul după hexagoanele $K'L'M'N'P'Q'$. Laturile acestora sînt respectiv paralele cu laturile hexagonului $KLMNPQ$ (astfel că toate unghiurile lor sînt de cîte 120°) și sînt egale între ele din două în două: $K'L' = M'N' = P'Q'$ și $L'M' = N'P' = Q'K'$ (în virtutea egalității celor trei triunghiuri $CK'L'$, $D'M'N'$ și $B'P'Q'$, precum și a celor trei triunghiuri $DL'M'$, $A'N'P'$ și $BQ'K'$).

526. Demonstrația acestei afirmații este dată în text (v. nr. **711** *bis* și fig. 361 din Geometria în spațiu).

527. Fie $S \cdot ABCDEF$ o piramidă regulată dată (fig. 94); H un punct de pe baza ei; HK, HL, HM, ... distanțele punctului H la planele fețelor laterale; HK_0, HL_0, HM_0, ... distanțele aceluiași punct la laturile bazei; HK', HL', HM', ... (fig. 95) segmentele determinate de planele fețelor laterale pe perpendiculara ridicată în punctul H pe bază.

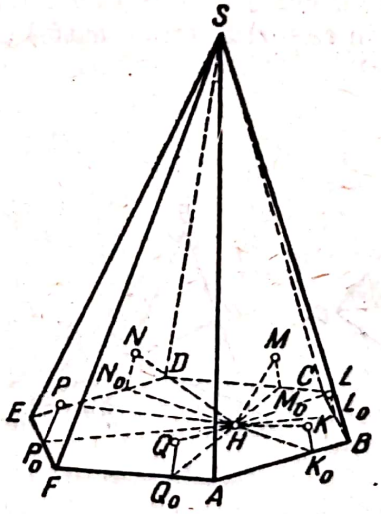


Fig. 94

Fig. 95

Deoarece $\widehat{HK_0K} = \widehat{HL_0L} = \widehat{HM_0M} = \ldots$, triunghiurile HK_0K, HL_0L, HM_0M, ... sînt asemenea și $HK : HK_0 = HL : HL_0 = HM : HM_0 = \ldots$ Înlocuind toate segmentele din relația (ex. 298)

$$HK_0 + HL_0 + HM_0 + HN_0 + HP_0 + HQ_0 = \text{const}, \qquad (1)$$

cu segmentele porporționale HK, HL, ... și HQ, obținem, (deoarece coeficientul de proporționalitate nu depinde de alegerea punctului H) $HK + HL + HM + HN + HP + HQ = \text{const}$.

Mai departe, în virtutea egalității acelorași unghiuri, vor fi asemenea și triunghiurile HK_0K', HL_0L', HM_0M', ..., de unde avem $HK' : HK_0 = HL' : HL_0 = \ldots = \text{const}$. Înlocuind acum segmentele din relația (1) cu segmentele proporționale HK', HL', ..., căpătăm $HK' + HL' + \ldots + HQ' = \text{const}$.

Dacă punctul din planul bazei va fi exterior bazei, suma distanțelor sau a segmentelor va trebui înlocuită prin suma lor algebrică.

528. Fie G' și G'' centrele de greutate ale fețelor BCD și ABC în tetraedrul $ABCD$ (fig. 96). Dreptele DG' și AG'', care sînt medianele acestor fețe, trec ambele prin mijlocul M al muchiei BC. De aici rezultă că dreptele AG' și AG'' sînt situate în planul ADM și se intersectează într-un punct G.

Deoarece, conform proprietății centrului de greutate al unui triunghi, avem $MG'' : MA = MG' : MD = 1 : 3$, segmentul $G'G''$ (fig. 97) este paralel cu AD și egal cu $\frac{1}{3}AD$. De aceea, triunghiurile $GG'G''$ și GAD sînt asemenea și $G'G : GA = G''G : GD = G'G'' : AD = 1 : 3$. Așadar, segmentele $G'A$ și $G''D$ sînt împărțite de punctul de concurență G în raportul $1 : 3$.

În același mod demonstrăm că și segmentele care unesc vîrfurile B și C cu centrele de greutate ale fețelor ACD și ABD intersectează segmentul DG'' și îl împart în raportul $1 : 3$, astfel că trec prin același punct G.

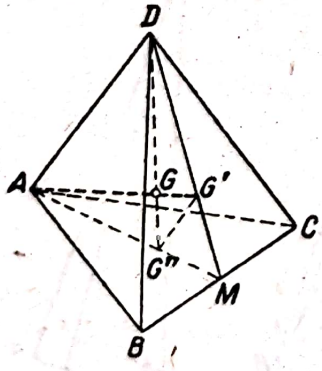


Fig. 96

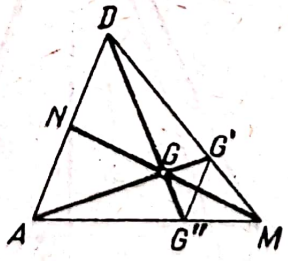


Fig. 97

Dacă N este mijlocul muchiei AD, atunci punctul G este situat în planul BCN, deoarece el se află pe dreapta care unește vîrful B cu centrul de greutate al fetei ACD. Prin urmare, punctul G se găsește pe intersecția MN a planelor ADM și BCN. Tot astfel se demonstrează că și segmentele care unesc mijloacele celorlalte două perechi de muchii opuse trec prin G.

Considerînd acum triunghiul AMN și transversala DG'', vom avea (**192**) $\frac{GM}{GN} \cdot \frac{DN}{DA} \cdot \frac{G''A}{G''M} = 1$, unde segmentele se consideră ca fiind dirijate, deoarece $DN : DA = 1 : 2$; $G''A : G''M = -2 : 1$, rezultă că $GM : GN = -1$, astfel că punctul G este mijlocul segmentului MN.

529. Fie date segmentele LL', MM' și NN', care unesc mijloacele muchiilor opuse AB și CD, AC și BD, AD și BC ale tetraedrului căutat

(fig. 98). Dacă, prin muchia AB, vom duce planul $AC'BD'$, paralel la muchia opusă CD etc., vom obţine şase plane care formează paralelipipedul $AC'BD'B'DA'C$. Vîrfurile tetraedrului căutat fac parte din mulţimea vîrfurilor paralelipipedului, iar extremităţile segmentelor date sînt centrele feţelor sale.

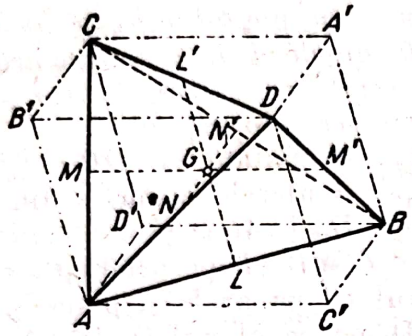


Fig. 98

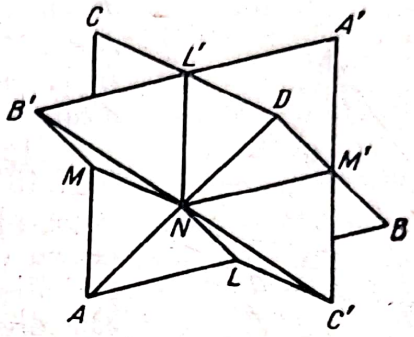


Fig. 99

Deoarece feţele $AC'BD'$ şi $B'DA'C$ ale paralelipipedului sînt paralele cu planul $MNM'N'$ etc., ajungem la construcţia următoare. Prin extremităţile L şi L' ale primului segment dat, ducem plane paralele cu celelalte două segmente. Repetăm aceeaşi construcţie pentru segmentele al doilea şi al treilea. Cele opt vîrfuri ale paralelipipedului obţinut determină două tetraedre $ABCD$ şi $A'B'C'D'$, care satisfac condiţiile problemei. Cele două tetraedre sînt reprezentate în figura 99.

530. Să presupunem că planul $KLMN$ (fig. 100), care trece prin mijloacele K şi L ale muchiilor AB şi CD ale tetraedrului $ABCD$, taie în punctele M şi N muchiile BC şi AD.

Construim, pe muchia DA, punctul N' (nereprezentat în figură), astfel încît să aibă loc proporţionalitatea segmentelor $BM : MC = AN' : N'D$. În virtutea rezultatelor exerciţiului 437, dreapta AN' va intersecta dreapta KL, iar punctul N' va fi situat în planul KLM. Prin urmare, punctul N' coincide cu N, iar celor patru puncte K, L, M şi N li se pot aplica rezultatele aceluiaşi exerciţiu. Dreapta KL împarte segmentul MN în acelaşi raport în care împarte muchiile AB şi CD, adică în două părţi egale.

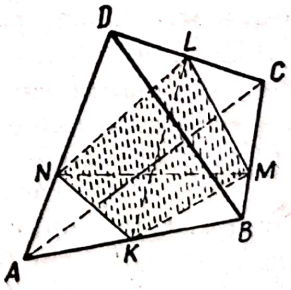


Fig. 100

531. Punctul de intersecţie O al planelor perpendiculare pe muchiile AD, BD şi CD ale tetraedrului $ABCD$, prin mijloacele acestora, este egal depărtat de punctul D şi de fiecare dintre punctele A, B şi C. Deoarece punctul O este egal depărtat de punctele A, B şi C, el se află şi în planele duse perpendicular prin mijloacele celorlalte muchii BC, CA şi AB ale tetraedrului.

532. Fie I punctul de intersecţie al planelor bisectoare ale diedrelor de muchii BC, CA şi AB în tetraedrul $ABCD$. Deoarece punctul I este situat în planul bisector al diedrului de muchie BC, el este egal depărtat de feţele ABC şi BCD. Din aceeaşi cauză, I este egal depărtat de toate cele patru feţe ale tetraedrului. Fiind egal depărtat de feţele ABD şi ACD,

punctul I se va afla în planul bisector al diedrului de muchie AD, precum și în planele bisectoare ale diedrelor de muchii BD și CD.

533. Vom începe cu următoarele observații preliminare.

Dacă, prin muchia CD a unui diedru arbitrar $A.CD.B$, ducem două plane $\{CD\}$ și $\{CD\}'$ astfel ca planul bisector al unuia dintre diedrele formate de ele să coincidă cu planul bisector al diedrului dat[1]*, atunci distanțele a două puncte arbitrare O și O', situate respectiv în aceste plane, la fețele diedrului vor fi invers proporționale.*

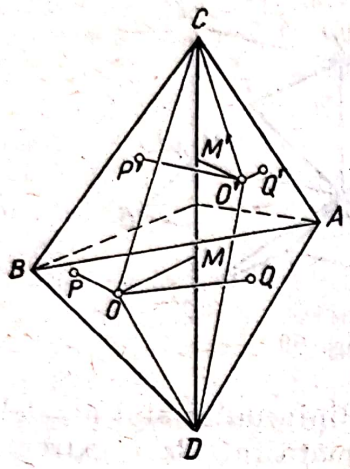


Fig. 101

În adevăr, să notăm cu OP, OQ și OM (fig. 101), perpendicularele coborîte din punctul O pe planele BCD și ACD și pe dreapta CD, iar cu $O'P'$, $O'Q'$ și $O'M'$ perpendicularele coborîte din punctul O' pe aceleași plane și pe aceeași dreaptă. Deoarece planul OCD, adică planul $\{CD\}$, formează cu fața BCD un unghi egal cu unghiul dintre planul $O'CD$, adică planul $\{CD\}'$, și fața BCD, unghiurile OMP și $O'M'Q'$ vor fi egale, iar triunghiurile OMP și $O'M'Q'$ vor fi asemenea, astfel că $OP : O'Q' = OM : O'M'$. Analog, din triunghiurile asemenea OMQ și $O'M'P'$, găsim $OQ : O'P' = OM : O'M'$. Prin urmare, $OP : O'Q' = OQ : O'P'$ sau $OP : OQ = O'Q' : O'P'$ (compară cu construcțiile și raționamentele analoge din geometria plană, ex. 197).

Ca și în soluția problemei 197, are loc următoarea reciprocă: *dacă distanțele punctelor O și O' la fețele diedrului $A.CD.B$ sînt invers proporționale, iar planele OCD și $O'CD$ trec ambele prin interiorul sau ambele prin exteriorul diedrului, atunci planul bisector al unuia dintre diedrele formate de ele coincide cu planul bisector al diedrului dat*[2]*.*

Să considerăm mai departe un triedru. În acest caz, are loc următoarea propoziție: *dacă, prin fiecare dintre muchiile DA, DB și DC ale unui triedru dat $D{\cdot}ABC$, ducem cîte un plan avînd proprietatea că diedrul format de acest plan cu planul care unește aceeași muchie cu un punct dat O din spațiu are același plan bisector ca și diedrul cu această muchie, atunci cele trei plane astfel obținute se intersectează după aceeași dreaptă.*

Să notăm respectiv cu $\{AD\}'$, $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$ cele trei plane nou construite. Orice punct O' din planul $\{BD\}'$ satisface, în virtutea celor arătate mai sus, condiția $OR : OP = O'P' : O'R'$, iar orice punct din planul $\{CD\}'$ satisface condiția $OP : OQ = O'Q' : O'P'$, unde am notat cu OP, OQ, OR și cu $O'P'$, $O'Q'$, $O'R'$ distanțele punctelor O și O' respectiv la fețele DBC, DCA și DAB ale triedrului. Din ultimele două egalități, obținem pentru orice punct O' de pe intersecția planelor $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$, proporția $OQ : OR = O'R' : O'Q'$. În virtutea propoziției reciproce enunțate mai sus, orice punct O' de pe intersecția planelor $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$ este situat în planul $\{AD\}'$, *adică cele trei plane $\{AD\}'$, $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$ sînt secante după aceeași dreaptă;*

[1]) Cu alte cuvinte, ambele plane considerate sînt simetrice în raport cu planul bisector al diedrului dat (**419**).

[2]) V. nota precedentă.

în adevăr, planele OAD și $O'AD$ trec, după cum se poate arăta, ambele prin interiorul sau ambele prin exteriorul diedrului de muchie CD.

Ne putem convinge în modul următor de adevărul ultimei afirmații. Să presupunem întîi că punctul O se află în interiorul triedrului dat $D\cdot ABC$ sau în interiorul simetricului său (în sensul de la nr. **374**). În acest caz, planul OAD trece prin interiorul diedrului de muchie AD. Mai departe, planul OBD, deci și planul $\{BD\}'$, trece prin interiorul diedrului de muchie BD; planul OCD, deci și $\{CD\}'$, trec prin interiorul diedrului de muchie CD. Așadar, planele $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$ trec ambele prin interiorul diedrelor de muchii BD și CD; în consecință, dreapta lor de intersecție trece prin interiorul triedrului $D\cdot ABC$. De aici rezultă că și planul $O'AD$ trece prin interiorul diedrului de muchie AD. Analog, am fi putut considera și celelalte cazuri, cînd punctul O este interior triedrului $D\cdot A'BC$, unde DA' este prelungirea muchiei DA, sau interior simetricului său etc.

Am fi putut evita însă analiza tuturor acestor cazuri particulare și da întregii demonstrații un caracter mai general, dacă am fi considerat distanța OP a unui punct arbitrar O la planul BCD pozitivă sau negativă, după cum punctul O și muchia DA se află de aceeași parte a planului DBC, sau de o parte și de cealaltă a acestuia, și luînd condițiile analoge pentru distanțele punctului O la alte două plane ale fețelor triedrului (compară cu soluția ex. 301, Obs). În acest caz, toate egalitățile de mai sus vor fi valabile ca mărime și ca semn.

Trecem la soluția problemei date. În virtutea proprietății studiate mai sus a triedrului, cele șase plane $\{BC\}'$, $\{CA\}'$, $\{AB\}'$, $\{AD\}'$, $\{BD\}'$ și $\{CD\}'$, duse prin muchiile BC, CA, ... și CD ale tetraedrului $ABCD$, trec, după cum se arată în enunțul problemei, trei cîte trei prin patru drepte. În adevăr, planele $\{AB\}'$, $\{CA\}'$ și $\{AD\}'$ trec printr-o aceeași dreaptă AA_0; în mod analog, mai obținem trei drepte BB_0, CC_0 și DD_0. Cele patru drepte AA_0, BB_0, CC_0 și DD_0 nu sînt situate, evident, în același plan. Prin urmare (ex. 428), aceste patru drepte sînt concurente sau paralele. În primul caz, cele șase plane $\{BC\}'$,... și $\{CD\}'$ sînt concurente într-un punct, în al doilea ele se întretaie trei cîte trei după patru drepte paralele.

534. Fie $ABCD$ un tetraedru dat, L și L' mijloacele muchiilor sale AB și CD, G și O punctele considerate respectiv în exercițiile 528 și 531. Segmentul LL' este tăiat în părți egale de punctul G (ex. 528). Planul care trece prin punctul L și este perpendicular pe muchia AB a tetraedrului trece prin punctul O (ex. 531). De aici se deduce ușor că planul paralel, care trece prin punctul L' și este de asemenea perpendicular pe AB, taie dreapta OG într-un punct O', astfel încît $OG = GO'$ (fig. 102).

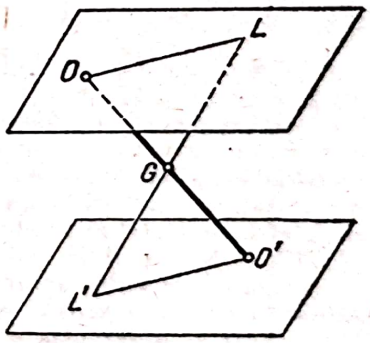


Fig. 102

În baza acelorași considerații, prin punctul O' vor trece și celelalte plane care trec fiecare prin mijlocul uneia dintre muchiile tetraedrului și sînt perpendiculare pe muchia opusă.

535. Vom numi, pentru a scurta exprimarea, *dreaptă d a unui triedru* dreapta de intersecție a celor trei plane care trec fiecare prin cîte o muchie și sînt perpendiculare pe fața opusă (ex. 482, 1°).

Să notăm cu AA' și cu BB' dreptele d ale triedrelor $ABCD$ și $BCDA$ din tetraedrul $ABCD$. Să presupunem că aceste drepte AA' și BB' se taie într-un punct H. În acest caz, planul ABH va fi perpendicular pe fața ACD,

deoarece dreapta AH este situată, prin construcție, în planul care trece prin muchia AB și este perpendicular pe fața ACD. Planul ABH va fi, din motive analoge, perpendicular și pe fața BCA, deci și pe muchia CD. Deoarece planul ABH este perpendicular pe muchia CD, muchia AB, situată în el, va fi de asemenea perpendiculară pe CD.

Reciproc, să presupunem că, într-un tetraedru, muchia AB este perpendiculară pe CD. În acest caz, prin muchia AB trece, cum se vede ușor, un plan P, perpendicular pe muchia CD și pe fețele ACD și BCD. Dreptele AA' și BB', despre care a fost vorba mai sus, se găsesc în acest plan P; totodată, ele vor fi evident neparalele, și deci se intersectează într-un punct H.

Faptul că dreptele AA' și BB', de care ne-am ocupat mai sus, nu pot fi paralele, se demonstrează astfel.

Dreptele AA' și BB' se află în planele CAA' și CBB', ambele perpendiculare pe planul ABD. Dacă dreptele AA' și BB' ar fi paralele, ar rezulta de aici că sînt perpendiculare pe planul ABD. Dintr-un motiv analog, ele ar fi atunci perpendiculare și pe planul ABC, ceea ce este imposibil.

Dacă acum, într-un tetraedru, cele patru drepte d ale triedrelor sale sînt concurente, atunci raționamentele de mai sus sînt aplicabile oricărei perechi de vîrfuri ale tetraedrului. Orice pereche de muchii opuse ale tetraedrului sînt perpendiculare între ele, iar vîrfurile sale sînt dispuse cum se arată în problema 516. Reciproc, dacă fiecare pereche de muchii opuse ale unui tetraedru sînt perpendiculare între ele, atunci, în virtutea celor spuse mai sus, cele patru drepte despre care este vorba se taie două cîte două. Deoarece aceste patru drepte nu sînt situate toate în același plan, ele sînt concurente într-un punct H (ex. 423).

În acest caz, planul ABH va fi, cum s-a arătat mai sus, perpendicular pe fața BCD, ceea ce este valabil și pentru fiecare dintre planele ACH și ADH. Prin urmare, dreapta AH va fi înălțime a tetraedrului; vor fi de asemenea înălțimi dreptele BH, CH și DH. Așadar, înălțimile unui tetraedru cu muchii ortogonale coincid cu cele patru drepte de care ne-am ocupat și sînt, de aceea, concurente.

Observație. Folosind cele arătate în soluția problemei **516**, obținem direct următoarea propoziție:

Dacă dreptele d a două triedre dintr-un tetraedru avînd ca vîrfuri extremitățile unei muchii date se intersectează, atunci sumele pătratelor celor două perechi de muchii opuse ale tetraedrului, dintre care muchia considerată nu face parte, sînt egale între ele, și reciproc.

Astfel, dacă se intersectează dreptele d ale triedrelor din vîrfurile A și B ale unui tetraedru, atunci muchia AB este perpendiculară pe CD și, de aceea, avem $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Dacă cele patru drepte d ale triedrelor unui tetraedru sînt concurente, atunci sumele pătratelor celor trei perechi de muchii opuse ale tetraedrului sînt egale între ele, și reciproc.

Vezi și observația de la soluția exercițiului 537.

536. Vom numi pentru a scurta exprimarea, *dreaptă Δ a unui triedru* dreapta de intersecție a trei plane care trec fiecare prin bisectoarea unuia dintre unghiurile plane și sînt perpendiculare pe planul acestui unghi (ex. 480, 2°); dreapta Δ formează unghiuri egale cu muchiile triedrului.

Să presupunem că dreptele Δ ale triedrelor unui tetraedru sînt toate concurente într-un punct O (fig. 103); să coborîm din punctul O perpendicu-

larele OK, OL, OM, ON, OI şi OJ pe muchiile AB, BC, CD, DA, AC şi BD ale tetraedrului. Deoarece dreapta AO formează unghiuri egale cu muchiile AB, AC şi AD, triunghiurile AOK, AOI şi AON sînt egale, deci segmentele AK, AI şi AN sînt de asemenea egale. Notînd mărimea comună a acestor segmente cu a, vom avea $AK = AI = AN = a$. Analog, găsim $BL = BJ = BK = b$; $CM = CI = CL = c$; $DN = DJ = DM = d$. De aici, avem $AD + BC = AN + DN + BL + CL = a + b + c + d$. În acelaşi mod, căpătăm $BD + AC = a + b + c + d$; $CD + AB = a + b + c + d$, de unde deducem

$$AD + BC = BD + CA = CD + AB \qquad (1)$$

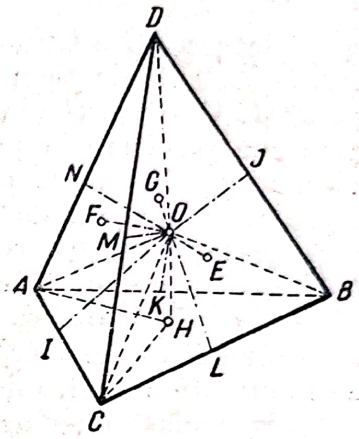


Fig. 103

Aşadar, am demonstrat următoarea propoziţie:

Dacă cele patru drepte Δ *ale triedrelor unui tetraedru sînt concurente, atunci sumele celor trei perechi de muchii opuse ale tetraedrului sînt egale.*

Să presupunem acum cunoscut doar că dreptele Δ a două triedre dintr-un tetraedru se intersectează. În acest caz, putem demonstra o propoziţie ceva mai generală:

Dacă dreptele Δ *a două triedre dintr-un tetraedru, avînd vîrfurile în extremităţile unei muchii date, se intersectează, atunci sumele celor două perechi de muchii opuse ale tetraedrului, din care nu face parte muchia considerată, sînt egale.*

Astfel, dacă dreptele Δ ale triedrelor cu vîrfurile în A şi în C se taie, atunci suma muchiilor opuse AB şi CD este egală cu suma muchiilor opuse BC şi DA (muchia AC nu figurează aici).

Să notăm cu O punctul de concurenţă al dreptelor Δ ale triedrelor $ABCD$ şi $BCDA$, cu I piciorul perpendicularei coborîte din punctul O pe muchia CA, cu H şi cu F picioarele perpendicularelor coborîte din acelaşi punct pe feţele ABC şi CDA.

După cum rezultă din definiţia dreptelor AO şi CO, punctul H este situat pe bisectoarele AH şi CH ale triunghiului ABC, şi coincide deci cu centrul cercului înscris. În virtutea perpendicularităţii segmentelor HI şi FI pe muchia AC, punctul I va fi punctul de contact cu dreapta AC, comun cercurilor înscrise în triunghiurile ABC şi CDA. Însă segmentul de pe latura AC a triunghiului ABC, luat de la vîrful A pînă la punctul de contact al cercului înscris, este egal (ex. 90 *bis*) cu $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, iar în triunghiul CDA segmentul corespunzător de pe latura AC este egal cu $\frac{1}{2}(AC + DA - CD)$. De aici rezultă $\frac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{1}{2}(AC + DA - CD)$, sau

$$AB + CD = BC + DA.$$

Să presupunem acum, reciproc, că muchiile tetraedrului $ABCD$ satisfac una dintre egalităţile (1), anume

$$AB + CD = BC + DA. \qquad (2)$$

Vom demonstra că, în acest caz, dreptele Δ ale triedrelor cu vîrfurile A şi C ale tetraedrului se intersectează şi că acelaşi lucru se întîmplă cu dreptele Δ ale triedrelor cu vîrfurile în B şi în D (remarcăm că tocmai muchiile AC şi BD nu intervin în egalitatea considerată).

În adevăr, din egalitatea (2), rezultă că $AB + AC - BC = AC + DA - CD$. Însă $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ este (ex. 90 *bis*) segmentul de pe latura AC a triunghiului ABC, luat de la vîrful A pînă la punctul de tangență I al cercului înscris, iar $\frac{1}{2}(AC + DA - CD)$ este segmentul analog de pe latura AC a triunghiului CDA. Prin urmare, cercurile înscrise în fețele ABC și CDA ale tetraedrului sînt tangente la muchia AC într-un același punct I. Centrele H și F ale acestor cercuri sînt situate în planul care trece prin punctul I și este perpendicular pe muchia AC.

Perpendicularele pe fețele ABC și CDA, respectiv în punctele H și F, se intersectează, de aceea, într-un punct O. Planul OAH este perpendicular pe fața ABC și trece prin bisectoarea AH a unghiului CAB, iar planul OAF este perpendicular pe fața CDA și trece prin bisectoarea AF a unghiului CAD, astfel că OA este dreapta Δ a triedrului cu vîrful în A. În același mod, BO este dreapta Δ a triedrului cu vîrful în B, iar O este punctul de intersecție al celor două drepte Δ.

În același mod demonstrăm că, dacă este îndeplinită aceeași condiție (2), dreptele Δ ale celorlalte două triedre ale tetraedrului se intersectează de asemenea într-un punct; este suficient să menționăm că condiția (2) nu se va modifica, dacă vom permuta între ele punctele A și B și, în același timp, punctele C și D.

În consecință, am demonstrat următoarea propoziție:

Dacă sumele a două perechi de muchii opuse într-un tetraedru sînt egale, atunci dreptele Δ ale triedrelor tetraedrului avînd vîrfurile în extremitățile fiecăreia dintre muchiile celei de-a treia perechi, sînt concurente.

Dacă vom presupune acum că sumele celor trei perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sînt egale, va rezulta de aici că orice pereche din cele patru drepte Δ ale triedrelor tetraedrului sînt concurente. Deoarece aceste patru drepte nu sînt situate în același plan, ele sînt toate concurente în același punct (ex. 423). Am ajuns la următorul rezultat final:

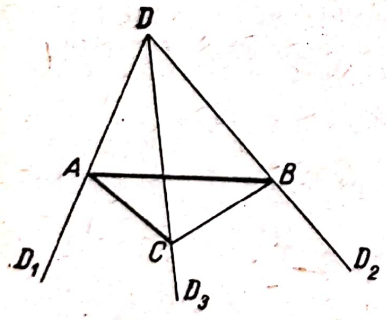


Fig. 104

Dacă sumele celor trei perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sînt egale, atunci cele patru drepte Δ ale triedrelor tetraedrului sînt concurente.

Observații. 1. Alături de dreptele Δ ale triedrelor unui tetraedru, putem considera (compară cu dreptele Δ_1, Δ_2 și Δ_3 din soluția ex. 480, 2°) dreptele Δ ale triedrelor sale „exterioare", adică ale triedrelor formate de fiecare pereche de muchii ale tetraedrului și de prelungirea celei de-a treia muchii (de exemplu, triedrul $ABCD_1$, fig. 104). În acest caz, are loc următoarea propoziție:

Dacă patru drepte Δ, anume dreapta Δ a triedrului $DABC$ al unui tetraedru și cele trei drepte Δ ale triedrelor $ABCD_1$, $BCAD_2$ și $CABD_3$, unde AD_1, BD_2 și CD_3 sînt respectiv prelungirile muchiilor DA, DB și DC dincolo de vîrfurile A, B și C (fig. 104), sînt concurente, atunci diferențele muchiilor opuse ale tetraedrului sînt egale

$$AD - BC = BD - CA = CD - AB,$$

reciproc.

Demonstrația acestei propoziții este atît de asemănătoare cu cea de mai sus, încît nu este cazul să insistăm asupra ei.

2. În privința proprietăților analoge ale „dreptelor d" și ale „dreptelor δ" ale unui tetraedru, vezi soluțiile exercițiilor 535, 537, în particular observația la soluția exercițiului 537 . În privința altor proprietăți ale tetraedrelor de formă particulară considerate în acest exercițiu, vezi mai jos, problema 558, și exercițiul 687.

537. Vom numi, pentru a scurta exprimarea, *dreapta δ a unui triedru* dreapta de intersecție a celor trei plane care trec prin fiecare muchie a triedrului și prin bisectoarea unghiului plan opus (ex. 481).

Să presupunem că dreptele δ ale triedrelor $ABCD$ și $BCDA$ din tetraedrul $ABCD$ se intersectează în punctul O. Să notăm cu X intersecția planului ABO cu muchia CD a tetraedrului. În acest caz, dreptele AX și BX vor fi, în virtutea definiției dreptelor δ, bisectoare în triunghiurile CDA și BCD. De aici rezultă că $CX : XD = AC : AD = BC : BD$, și, de aceea, $AD \cdot BC = BD \cdot AC$. Se vede ușor că, și reciproc, din această egalitate rezultă că dreptele δ ale triedrelor cu vîrfurile în A și în B se întîlnesc. Așadar, am demonstrat următoarea propoziție:

Dacă dreptele δ a două triedre dintr-un tetraedru, avînd vîrfurile în extremitățile unei muchii date, se intersectează, atunci produsul celor două perechi de muchii opuse ale tetraedrului, din care muchia considerată nu face parte, sînt egale, și reciproc.

Să presupunem acum că dreptele δ ale tuturor triedrelor unui tetraedru sînt concurente. Raționamentele de mai sus se aplică oricărei perechi de vîrfuri ale tetraedrului, de unde rezultă că, în acest caz, produsele celor trei perechi de muchii opuse ale tetraedrului sînt egale

$$AD \cdot BC = BD \cdot CA = CD \cdot AB.$$

Reciproc, dacă aceste condiții sînt îndeplinite, dreptele δ ale triedrelor unui tetraedru se întîlnesc două cîte două, după cum rezultă din cele arătate mai sus. Dat fiind că cele patru drepte δ nu se află în același plan, ele sînt concurente (ex. 423).

Așadar, *dacă cele patru drepte δ ale triedrelor unui tetraedru sînt concurente, produsele celor trei perechi de muchii opuse ale tetraedrului sînt egale, și reciproc.*

Observație. Menționăm aici analogia dintre proprietățile „dreptelor d", ale „dreptelor Δ" și ale „dreptelor δ", care a reieșit din soluțiile exercițiilor 535—537. Au loc următoarele propoziții:

Dacă dreptele d (sau dreptele Δ, sau dreptele δ) a două triedre dintr-un tetraedru, avînd ca vîrfuri extremitățile aceleiași muchii date, se intersectează, atunci sumele pătratelor (respectiv, sumele sau produsele) celor două perechi de muchii opuse ale tetraedrului, din care nu face parte muchia considerată, sînt egale și reciproc.

Dacă cele patru drepte d (sau dreptele Δ, sau dreptele δ) ale triedrelor unui tetraedru sînt concurente, atunci sumele patratelor (respectiv, sumele sau produsele) celor trei perechi de muchii opuse sînt egale, și reciproc.

Scanned with OKEN Scanner

538. Fie $A_0B_0C_0D_0$ (fig. 105) un tetraedru în care cunoaștem lungimile muchiilor $B_0C_0 = a$, $C_0A_0 = b$; $A_0B_0 = c$; $D_0A_0 = a'$; $D_0B_0 = b'$ și $D_0C_0 = c'$. Să notăm acum cu D_0H_0 înălțimea tetraedrului și cu D_0K_0 și D_0L_0 înălțimile fețelor $D_0B_0C_0$ și $D_0A_0B_0$. În acest caz, dreptele H_0K_0 și H_0L_0 vor fi respectiv perpendiculare pe B_0C_0 și pe A_0B_0.

Cunoscînd lungimile muchiilor tetraedrului, putem construi în plan o „desfășurare" a tetraedrului, adică triunghiurile BCD', CAD'', ABD''' și ABC, respectiv egale cu $B_0C_0D_0$, $C_0A_0D_0$, $A_0B_0D_0$ și $A_0B_0C_0$ ale tetraedrului și așezate cum se arată în fig. 106 (laturile triunghiului BCD' sînt egale cu a, b' și c' etc.) Dacă vom duce prin două dintre cele trei puncte D', D''

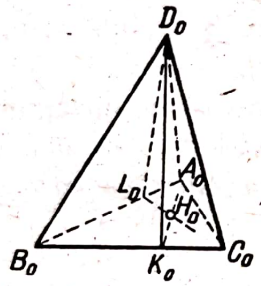


Fig. 105

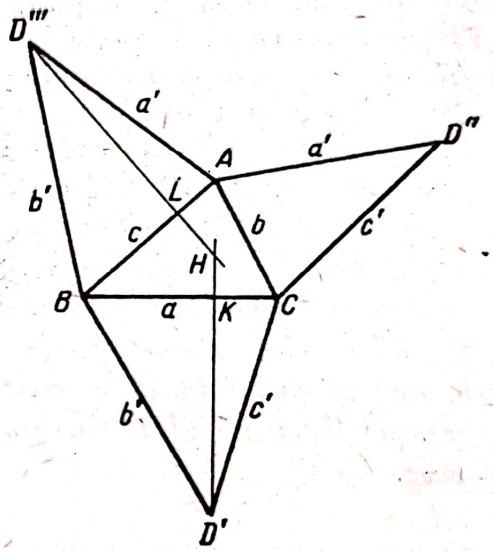


Fig. 106

și D''' drepte perpendiculare pe laturile respective ale triunghiului ABC, de exemplu prin D' dreapta $D'K$, perpendiculară pe BC, și prin D''', dreapta $D'''L$, perpendiculară pe AB, și vom nota cu H intersecția dreptelor astfel construite, vom avea, evident, $D'K = D_0K_0$; $D'''L = D_0L_0$; $KH = K_0H_0$; $LH = L_0H_0$. Construind acum, în același plan, triunghiul dreptunghic avînd ipotenuza $D'K$ și una dintre catete egală cu KH, obținem efectiv înălțimea D_0H_0 a tetraedrului: ea va fi egală cu a doua catetă a triunghiului astfel construit.

Așadar, întreaga construcție a unei înălțimi se reduce la construcția triunghiurilor BCD', ABD''' și ABC (construcția celui de-al patrulea triunghi nu este necesară), la trasarea dreptelor $D'K$ și $D'''L$, perpendiculare respectiv pe BC și pe AB, și la construcția unui triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza și o catetă, așa cum s-a arătat mai sus.

Celelalte înălțimi se construiesc în mod analog.

Observație. La rezolvarea acestei probleme, am presupus că există un tetraedru $A_0B_0C_0D_0$, ale cărui muchii B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0, D_0A_0, D_0B_0 și D_0C_0 sînt respectiv egale cu segmentele date a, b, c, a', b', și c' Nu ne vom ocupa aici de stabilirea condițiilor pe care trebuie să le satisfacă segmentele date pentru ca tetraedrul considerat să existe.

EXERCIŢIILE LA CAPITOLUL II

539. Deoarece volumul prismei triunghiulare $ABCA'B'C'$ (fig. 107) este egal cu produsul dintre aria secţiunii drepte $A_0B_0C_0$ şi muchia laterală CC' (ex. **403**), avem vol. $ABCA'B'C' =$ aria $A_0B_0C_0 \cdot CC' = \frac{1}{2} A_0H_0 \cdot B_0C_0 \times$ $\times CC' = \frac{1}{2} A_0H_0 \cdot$ aria $BB'C'C$,

unde A_0H_0 este înălţimea triunghiului $A_0B_0C_0$. Însă segmentul A_0H_0, perpendicular pe dreapta B_0C_0 şi situat în planul $A_0B_0C_0$, perpendicular pe planul

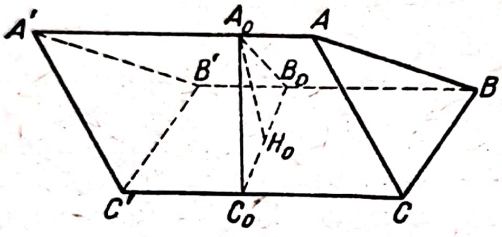


Fig. 107

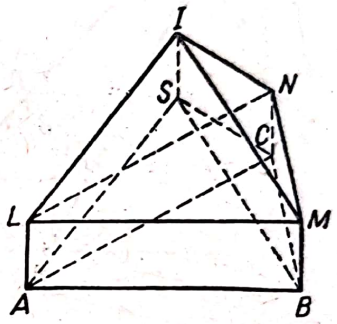


Fig. 108

$BB'C'C$, va fi perpendicular şi pe planul $BB'C'C$ (**354**). Aşadar, volumul prismei considerate va fi efectiv egal cu jumătatea produsului dintre aria feţei $BB'C'C$ şi distanţa A_0H_0 a acestei feţe la muchia AA'.

540. Volumul unei prisme triunghiulare este egal cu produsul dintre aria secţiunii ei drepte şi o muchie laterală (**403**). Deoarece însă, în condiţiile menţionate în enunţul problemei, aria secţiunii drepte nu depinde de poziţia segmentelor AA', BB' şi CC' pe dreptele paralele date, volumul prismei va fi de asemenea independent de poziţia acestor segmente pe dreptele considerate.

541. Deoarece volumul unei prisme nu se schimbă, dacă una dintre bazele ei se deplasează prin translaţie (cu alte cuvinte dacă se deplasează în sensul stabilit la nr. **51**), în planul ei, rezultă că prismele construite pe feţele SBC, SCA şi SAB ale tetraedrului pot fi înlocuite prin prisme echivalente, construite pe aceleaşi feţe şi având segmentul SI ca muchie laterală comună (v. raţionamentul analog de la soluţia ex. 311). Aşadar, vom obţine prismele $SBCIMN$, $SCAINL$ şi $SABILM$ (fig. 108). Aceste prisme formează, împreună cu tetraedrul $S \cdot ABC$, un solid cu şapte feţe, mărginit de cele patru triunghiuri ABC, IMN, INL, ILM şi de cele trei paralelograme $BCNM$, $CALN$ şi $ABML$. Acelaşi poliedru poate fi considerat ca format din prisma $ABCLMN$ şi din tetraedrul $ILMN$. De aici rezultă că vol $\cdot SBCIMN +$ $+$ vol $\cdot SCAINL +$ vol $\cdot SABILM +$ vol $\cdot SABC =$ vol $\cdot ABCLMN +$

$+$ vol $\cdot ILMN$.

Însă tetraedrele $S \cdot ABC$ şi $I \cdot LMN$ sînt egale, deoarece muchiile BC, CA, AB, SA, SB şi SC ale primului sînt respectiv paralele şi egale cu muchiile MN,

NL, *LM*, *IL*, *IM* și *IN* ale celui de-al doilea; prin urmare, și volumele lor vor fi egale. Egalitatea de mai sus ne duce la rezultatul cerut:

$$\text{vol}\cdot SBCIMN + \text{vol}\cdot SCAINL + \text{vol}\cdot SABILM = \text{vol}\, ABCLMN.$$

542. Să presupunem că, secționînd piramida *SABCD* cu planul *Q*, obținem dreptunghiul *A'B'C'D'* (fig. 109 și 110) și că în acest dreptunghi este înscris patrulaterul *E'F'G'H'*, a cărui latură *E'F'* este paralelă cu *A'C'*, iar laturile *H'E'* și *F'G'* sînt paralele cu *B'D'*. În acest caz, nu este greu de demonstrat că și latura *G'H'* va fi paralelă cu *A'C'*.

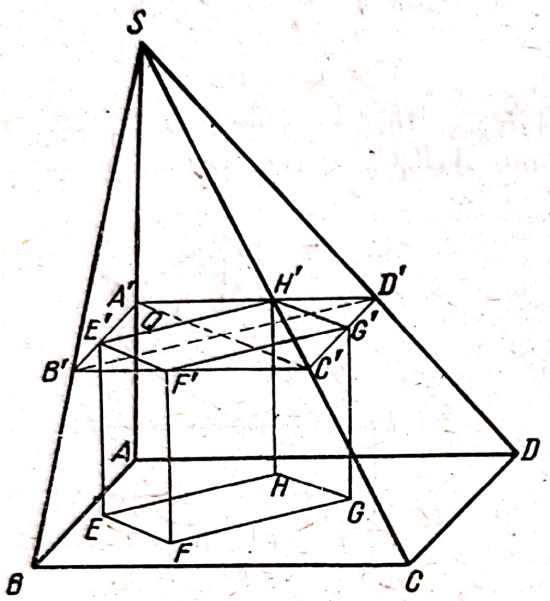


Fig. 109

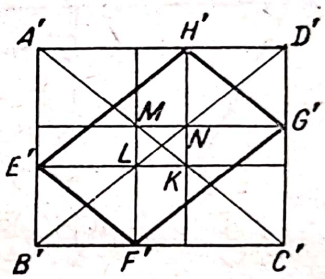


Fig. 110

1° Să notăm cu x distanța de la vîrful *S* la planul *Q*. În acest caz, laturile dreptunghiului *A'B'C'D'* vor fi egale (**393**) cu ax/h și cu bx/h, iar diagonala, cu $\frac{x}{h}\sqrt{a^2+b^2}$. Deoarece $E'F' = G'H' = A'M$ și $F'G' = E'H' = MC'$, unde *M* este intersecția dreptelor duse prin punctele *F'* și *G'*, paralel cu laturile dreptunghiului, perimetrul patrulaterului *E'F'G'H'* va fi egal cu $2A'C' = \frac{2x}{h}\sqrt{a^2+b^2}$. De aici rezultă că suma celor 12 muchii ale prismei *R* este $\frac{4x}{h}\sqrt{a^2+b^2} + 4(h-x)$. Egalînd această expresie cu mărimea $4m$ dată și rezolvînd ecuația obținută în raport cu x, găsim

$$x = \frac{h(m-h)}{\sqrt{a^2+b^2}-h}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă, valoarea găsită pentru x trebuie să satisfacă, evident, condițiile $0 < x < h$.

Dacă $\sqrt{a^2+b^2} - h > 0$, atunci aceste condiții se reduc la $m - h > 0$ și $m - h < \sqrt{a^2+b^2} - h$, de unde deducem $h < m < \sqrt{a^2+b^2}$; dacă însă $\sqrt{a^2+b^2} - h < 0$, aceleași condiții se reduc la $m - h < 0$ și $m - h > \sqrt{a^2+b^2} - h$; de aici obținem $\sqrt{a^2+b^2} < m < h$. Așadar, *pentru ca suma celor 12 muchii ale prismei R să poată fi egală cu 4m, mărimea dată m trebuie*

să fie cuprinsă între înălţimea h a piramidei SABCD şi între diagonala bazei ei, egală cu $\sqrt{a^2+b^2}$.

2° Pentru ca prisma R, corespunzătoare unei poziţii determinate a planului Q, să aibă volumul maxim, aria patrulaterului $E'F'G'H'$, înscris în dreptunghiul dat, trebuie să fie maximă. Din fig. 110 însă, se vede că diferenţa dintre aria dreptunghiului $A'B'C'D'$ şi aria paralelogramului $E'F'G'H'$ va fi, în general, mai mare decît aria acestuia din urmă, deoarece aria paralelogramului va fi mai mică decît jumătatea ariei dreptunghiului. În adevăr, această diferenţă se poate scrie sub forma: aria $A'H'E'$ + aria $B'E'F'$ + aria $C'F'G'$ + aria $D'G'H'$ = aria $KH'E'$ + aria $LE'F'$ + + aria $MF'G'$ + aria $NG'H'$ (notaţiile K, L, M şi N rezultă din figură); însă ariile ultimelor patru triunghiuri acoperă, în general, cu exces aria paralelogramului $E'F'G'H'$ (triunghiurile „au părţi comune"). Face excepţie numai cazul în care punctele E', F', G' şi H' coincid respectiv cu mijloacele E_0, F_0, G_0 şi H_0 ale laturilor dreptunghiului (fig. 111): în acest din urmă caz, aria paralelogramului este egală cu jumătatea ariei dreptunghiului.

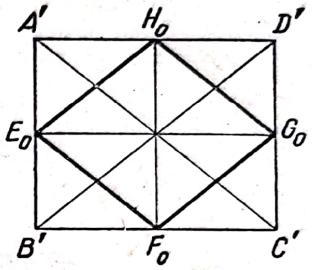


Fig. 111

Aşadar, *dintre toate prismele R, care pot fi construite pentru o poziţie dată a planului Q, volumul maxim revine aceleia a cărei bază este un romb.*

Putem ajunge la acelaşi rezultat şi pe altă cale, mai puţin intuitivă. Deoarece toate paralelogramele înscrise $E'F'G'H'$ au aceleaşi unghiuri, rezultă că ariile lor vor fi în acelaşi raport ca produsele laturilor vecine (compară cu **256**), deci aria paralelogramului $E'F'G'H'$ va fi maximă, dacă produsul $E'F' \cdot F'G'$ va fi maxim. În acest caz, suma laturilor $E'F' + F'G'$ *îşi păstrează o valoare constantă*, $E'F' + F'G' = A'M + MC' = A'C'$. Deoarece produsul a două segmente a căror sumă este constantă e maxim cînd segmentele sînt egale (**155**), ajungem la acelaşi rezultat ca mai sus.

Din cele arătate, rezultă că volumul maxim al prismei R se exprimă după cum urmează, pentru o poziţie dată a planului Q:

$$\frac{1}{2}\text{aria } A'B'C'D' \cdot EE' = \frac{1}{2}\frac{ab}{h^2} \cdot x^2 (h - x).$$

Pentru a obţine variaţia acestui volum cînd x variază în intervalul $0 < x < h$, trebuie să studiem variaţia funcţiei

$$y = x^2 (h - x),$$

în aceleaşi condiţii.

Pentru aceasta, vom folosi proprietăţile derivatei. Avem $y' = 2hx - 3x^2 = x(2h - 3x)$. De aici se vede că derivata y' este pozitivă pentru $0 < x < \frac{2}{3}h$, se anulează pentru $x = \frac{2}{3}h$ şi este negativă pentru $\frac{2}{3}h < x < h$. De aceea, *volumul maxim pe care prisma R îl poate avea în cazul unei distanţe x date a vîrfului S la planul Q creşte cînd x creşte de la 0 la* $\frac{2}{3}h$, *devine maximă pentru* $x = \frac{2}{3}h$ *şi scade dacă x creşte mai departe de la* $\frac{2}{3}h$ *pînă la h.*

Faptul că *volumul care ne interesează devine maxim pentru* $x = \frac{2}{3}h$ se poate demonstra și fără a recurge la noțiunea de derivată, dacă aplicăm următoarea teoremă:

Produsul a trei factori pozitivi a căror sumă este constantă este maxim, dacă toți trei factorii sînt egali.

În cazul de față, avem $y = x^2(h - x)$ și

$$\frac{1}{4}y = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}(h - x).$$

Deoarece $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (h - x) = h$ este constant, rezultă că $\frac{1}{4}y$, deci și y își ating valoarea maximă pentru $\frac{x}{2} = h - x$, adică pentru $x = \frac{2}{3}h$.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL III

543. Să împărțim muchia SA a piramidei date $S{\cdot}ABC$ (fig. 112) în n părți egale $SA_1 = A_1A_2 = \ldots$, iar prin punctele de diviziune $A_1, A_2, \ldots$, să ducem secțiunile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., paralele cu baza. Ariile acestor secțiuni vor fi (conform nr. **393**) respectiv egale cu $\frac{1^2}{n^2}S$, $\frac{2^2}{n^2}S$, ..., unde $S =$ = aria ABC. Ducînd prin punctele $B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots$ dreptele B_1b_1, C_1c_1, B_2b_2, C_2c_2, ..., paralele cu SA, căpătăm (ca la nr. **406**) un număr de prisme $A_1B_1C_1A_2b_1c_1$, $A_2B_2C_2A_3b_2c_2$, ..., a căror înălțime este egală cu $\frac{1}{n}\cdot H$, unde H este înălțimea piramidei date. Pentru suma volumelor acestor prisme, obținem următoarea expresie:

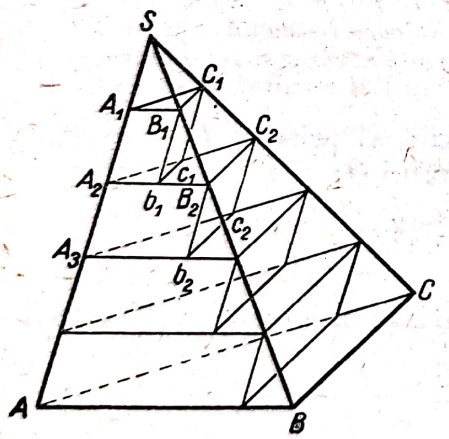


Fig. 112

$$s_n = \frac{1}{n^3} \cdot S \cdot H\,[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

După cum se știe însă, $1^2 + 2^2 + \ldots + (n - 1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1) \times (2n-1)$. Prin urmare, $s_n = \frac{1}{6n^3} \cdot S \cdot H \cdot n(n-1)(2n-1) =$ $= \frac{1}{6} \cdot S \cdot H \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. Trecînd la limită, dacă n crește nemărginit, obținem expresia obișnuită $\frac{1}{3} \cdot S{\cdot}H$ pentru volumul piramidei.

544. *Prima soluție.* Dacă muchia unui tetraedru regulat este egală cu a, atunci aria bazei sale este (soluția ex. 287) $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Înălțimea tetraedrului regulat trece prin centrul bazei (**394**). De aceea, înălțimea tetra-

edrului va fi catetă în triunghiul dreptunghic avînd ca ipotenuză muchia laterală a, iar ca a doua catetă raza cercului circumscris bazei, adică (**167**) $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Prin urmare, înălțimea tetraedrului este $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, iar volumul său este $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

A doua soluție. Dacă prin fiecare muchie a unui tetraedru regulat vom duce cîte un plan paralel la muchia opusă, aceste șase plane vor forma un cub (compară cu nr. **711** *bis* și fig. 361 din Geometria în spațiu). Muchia acestui cub este egală cu $a/\sqrt{2}$, unde a este muchia tetraedrului dat, iar volumul cubului este $\frac{a^3}{4}\sqrt{2}$. Însă volumul tetraedrului este egal (în virtutea soluției ex. 550) cu o treime din volumul cubului. De aici obținem pentru volumul tetraedrului regulat aceeași expresie ca mai sus : $\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

545. Două tetraedre care au cîte un triedru egal pot fi astfel așezate încît aceste două triedre să coincidă, cum este cazul tetraedrelor $ABCD$ și $A'B'C'D$ din fig. 113. În acest caz, înălțimile AH și $A'H'$ ale celor două tetraedre vor fi în același raport cu muchiile DA și DA', astfel că $AH : A'H' = DA : DA'$. Ariile bazelor vor fi în același raport (**256**) ca produsele laturilor care cuprind unghiul comun, anume aria DBC : aria $DB'C' = (DB \cdot DC) : (DB' \cdot DC')$. De aici avem

vol. $ABCD$: vol. $A'B'C'D$ = (aria $DBC \cdot AH$): (aria $DB'C' \times A'H'$) = $(DA \cdot DB \cdot DC)$: $(DA' \cdot DB' \cdot DC')$.

Dacă două tetraedre au cîte un triedru simetric, și nu egal, aceste două tetraedre pot fi astfel așezate, încît cele două triedre simetrice să fie simetrice în raport cu vîrful comun (în sensul de la nr. **374** *bis*,) ca în cazul tetraedrelor $ABCD$ și $A''B''C''D$ din fig. 113. În acest caz, putem relua raționamentele de mai sus.

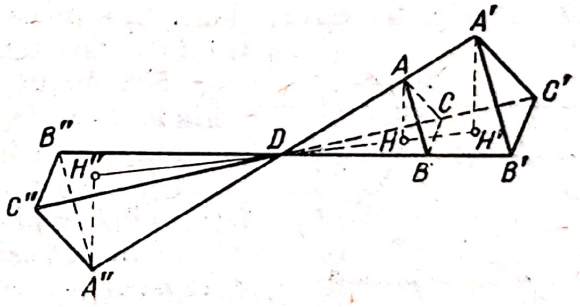


Fig. 113

546. Două tetraedre avînd cîte o muchie egală și diedre egale cu aceste muchii pot fi astfel așezate, încît muchiile lor egale și planele fețelor alăturate acestora să coincidă, ca în tetraedrele $ABCD$ și $A'BCD'$ din fig. 114. În acest caz, pentru raportul dintre înălțimile AH și $A'H'$ obținem următoarea expresie: $AH : A'H' = AK : A'K'$ = aria ABC : aria $A'BC$, unde K și K' sînt picioarele perpendicularelor coborîte din punctele A și A' pe muchia comună BC. Prin urmare, avem

vol. $ABCD$: vol. $A'BCD'$ = (aria $BCD \cdot AH$) : aria $(BCD' \cdot A'H')$ = = (aria $BCD \cdot$ aria ABC) : (aria $BCD' \cdot$ aria $A'BC$).

547. Să presupunem că un punct G, unit cu vîrfurile tetraedrului $ABCD$, îl împarte în patru tetraedre echivalente $GBCD$, $GCDA$, $GDAB$, și $GABC$.

Să notăm cu M punctul de intersecție al planului GCD cu muchia AB. Evident, avem vol. $GACD$: vol. $MACD$ = aria GCD : aria MCD și vol. $GBCD$: vol. $MBCD$ = aria GCD : aria MCD și vol. $GBCD$: vol. $MBCD$ = aria GCD : aria MCD. În virtutea egalității volumelor teatraedrelor $GACD$ și $GBCD$, rezultă de aici că vol. $MACD$ = vol. $MBCD$. Însă cele două tetraedre $MACD$ și $MBCD$ au baza MCD comună; de aceea, raportul dintre volumele lor este egal cu raportul dintre distanțele punctelor A și B la planul MCD,

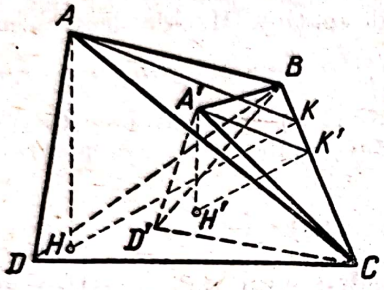


Fig. 114

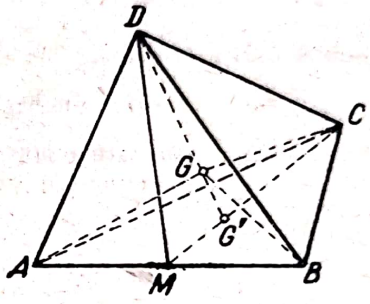


Fig. 115

adică este egal cu raportul segmentelor MA și MB. Prin urmare, avem $MA = MB$. Deoarece aceste raționamente se pot aplica oricărei muchii a tetraedrului, punctul G trebuie să coincidă cu cel considerat la exercițiul 528.

Mai rămîne să demonstrăm că punctul G, considerat la soluția exercițiului 528, se bucură efectiv de proprietatea cerută. Dacă dreapta DG intersectează fața ABC în punctul G' (fig. 115), avem $GG' : DG' = 1 : 4$, de unde rezultă că vol. $GABC = \frac{1}{4}$ vol. $ABCD$, iar același lucru este valabil pentru fiecare dintre tetraedrele $GBCD, GCDA$ și $GDAB$. Așadar, punctul G, considerat în soluția exercițiului 528, unit cu vîrfurile tetraedrului, îl împarte efectiv în patru tetraedre echivalente.

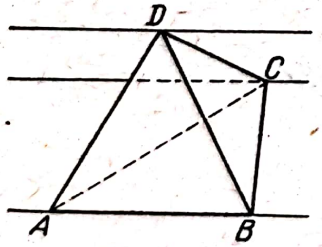


Fig. 116

548. Volumul tetraedrului $ABCD$ (fig. 116) nu se schimbă dacă deplasăm segmentul AB (fără a-i modifica lungimea) și vîrfurile C și D respectiv pe cele trei drepte paralele deoarece, în acest caz, nu se schimbă nici aria feței ABC, nici lungimea înălțimii duse din vîrful D.

Din aceeași cauză, volumul nu se va schimba dacă vom lua o muchie egală cu AB pe aceea dintre dreptele date, unde se afla inițial vîrful C, iar vîrful C îl vom lua pe dreapta pe care se situa înainte muchia AB.

Analog, volumul tetraedrului nu se va schimba dacă vom purta o muchie egală cu AB pe dreapta pe care se afla inițial vîrful D, iar vîrful D îl vom lua pe dreapta unde era la început muchia AB, deoarece, în acest caz, nu se va schimba nici aria feței ABD, nici înălțimea tetraedrului, dusă din vîrful C.

549. Să presupunem că planele duse prin vîrfurile unui tetraedru dat $A \cdot BCD$, paralel la fețele opuse, formează un tetraedru $A' \cdot B'C'D'$ (fig. 117). Planul ABC taie cele trei fețe ale noului tetraedru după laturile triunghiului

„$A''B''C''$, respectiv paralele cu laturile triunghiului ABC; în adevăr, planul ABC intersectează planele BCD şi $B'C'D'$, după dreptele paralele BC şi $B'C'$ etc.

De aici rezultă că punctul C este mijlocul segmentului $A''B''$. Mai departe, dreptele $A''B''$ şi $A'B'$ sînt paralele, ca intersecţii ale planelor paralele ABC şi $A'B'C'$ cu planul $A'B'D'$. Deoarece $CA'' = CB''$, iar segmentul $A'B'$ este paralel cu $A''B''$, dreapta $D'C$ împarte segmentul $A'B'$ în părţi egale, în punctul M'. Aşadar, vîrful C al tetraedrului $ABCD$ se află pe mediana $D'M'$ a feţei $A'B'D'$ a tetraedrului $A'B'C'D'$. Repetînd aceste raţionamente pentru celelalte vîrfuri şi muchii ne convingem că fiecare vîrf al tetraedrului $ABCD$ este centrul de greutate al uneia dintre muchiile tetraedrului $A'B'C'D'$. Deci avem $D'M' : D'C = D'B' : D'B'' = 3 : 2$, deci (**393**)

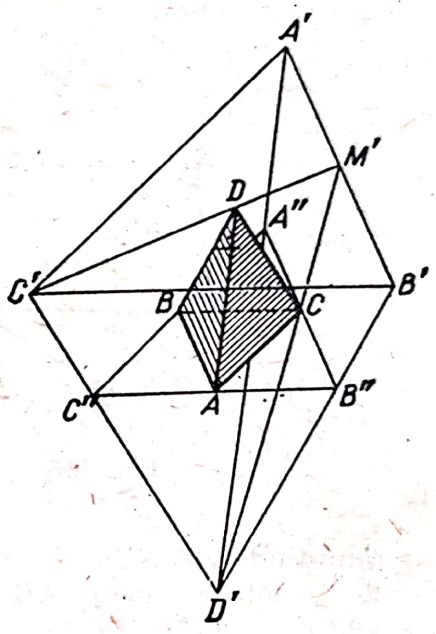


Fig. 117

aria $A'B'C' :$ aria $A''B''C'' = (D'B' : D'B'')^2 = 9 : 4$. Deoarece, evident, aria $A''B''C' :$ aria $ABC = 4 : 1$, rezultă că aria $A'B'C' = 9$. aria ABC. Înălţimile tetraedrelor $A'B'C'D'$ şi $ABCD$, duse din vîrfurile D' şi D, sînt între ele în raportul $D'B' : D'B'' = 3 : 1$. De aici rezultă că volumul tetraedrului $A'B'C'D'$ este de 27 ori mai mare decît volumul tetraedrului $ABCD$.

550. Prin muchia AB a tetraedrului dat $ABCD$, ducem planul $AC'BD'$, paralel cu muchia CD etc. (fig. 98). În felul acesta, obţinem paralelipipedul $AC'BD'B'DA'C$. Volumul tetraedrului $ABCD$ se obţine, dacă scădem din volumul acestui paralelipiped volumele celor patru piramide $A'BCD$, $AB'CD$, $ABC'D$ şi $ABCD'$. Însă volumul fiecăreia dintre aceste piramide este egal cu o şesime din volumul paralelipipedului, deoarece aria bazei fiecăreia dintre piramide, este egală cu jumătatea ariei bazei paralelipipedului, iar înălţimea ei este egală cu înălţimea paralelipipedului. Prin urmare, cele patru piramide reprezintă împreună 2/3 din volumul paralelipipedului, iar tetraedrului dat îi revine o treime. Aşadar, volumul paralelipipedului este de trei ori mai mare decît volumul tetraedrului considerat.

551. După cum s-a demonstrat în soluţia exerciţiului 550, volumul tetraedrului $ABCD$ este egal cu o treime din volumul paralelipipedului $AC'BD'B'DA'C$ (fig. 98). Însă înălţimea acestui paralelipiped, adică distanţa dintre planele paralele $AC'BD'$ şi $B'DA'C$, este egală cu cea mai mică distanţă dintre muchiile AB şi CD ale tetraedrului $ABCD$. Mai departe, aria bazei $AC'BD'$ a paralelipipedului este egală cu jumătatea ariei paralelogramului $KLMN$ (fig. 118), ale cărui laturi KL şi LM sînt respectiv paralele şi egale cu muchiile AB şi CD ale tetraedrului.

De aici obţinem expresia indicată în enunţul problemei pentru volumul tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

552. *Prima soluție.* Dacă muchia AB a tetraedrului $ABCD$ (fig. 116) se deplasează pe dreapta care o conține, nu se schimbă (muchia CD rămînînd fixă) nici aria feței ABC, nici înălțimea corespunzătoare, adică distanța de la punctul D la planul ABC. Prin urmare, nu se schimbă nici volumul tetraedrului. În virtutea aceleași considerații, volumul tetraedrului nu se schimbă, nici dacă muchia CD se deplasează pe dreapta care o conține (muchia

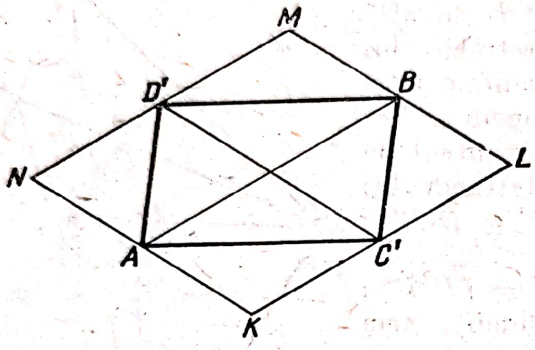


Fig. 118

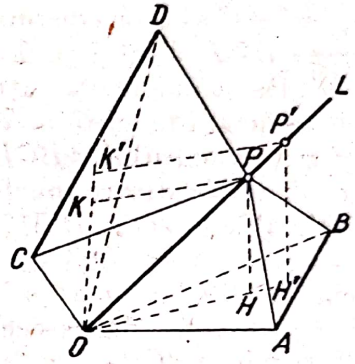


Fig. 119

AB rămînînd fixă). De aici rezultă că volumul tetraedrului nu se schimbă, nici dacă ambele muchii AB și CD se deplasează pe dreptele care le conțin.

A doua soluție. Propoziția de demonstrat rezultă direct din expresia volumului tetraedrului, dată la exercițiul 551.

553. Fie OP una dintre dreptele L care trec prin punctul O (fig. 119), dat în spațiu. În primul rînd, vom observa că raportul dintre volumele tetraedrelor despre care este vorba nu depinde de alegerea muchiei lor comune pe dreapta L. În adevăr, volumele celor două tetraedre nu variază dacă muchia comună se deplasează fără a-și schimba lungimea în lungul dreptei L (ex. 552); de aceea, putem alege punctul dat O drept una dintre extremitățile acestei muchii. Mai departe, raportul dintre volumele tetraedrelor $OABP$ și $OCDP$ nu depinde de alegerea celei de-a doua extremități P a muchiei comune pe dreapta L. În adevăr, să notăm cu P' un punct arbitrar al dreptei L, distinct de O și de P, cu PH, PK, $P'H'$ și $P'K'$ înălțimile tetraedrelor $OABP$, $OCDP$, $OABP'$, și $OCDP'$. Tetraedrele $OABP$ și $OABP'$ au baza OAB comună, iar tetraedrele $OCDP$ și $OCDP'$ au baza OCD comună. Înălțimile acestor tetraedre satisfac condiția $PH : P'H' = OP : OP' = PK : P'K'$. De aici rezultă că vol. $OABP$: vol. $OCDP$ = vol. $OABP'$: vol. $OCDP'$.

Deoarece vol. $OABP$: vol. $OCDP$ = (aria $OAB \cdot PH$) : (aria $OCD \cdot PK$), obținem $PH : PK$ = (vol. $OABP$: vol. $OCDP$) × (aria OCD : aria OAB) = = const. Așadar, locul geometric al punctelor P, adică al dreptelor L, care trec prin punctul O, este totodată locul geometric al punctelor care au raportul distanțelor la două plane date OAB și OCD constant. Acest loc geometric este, cum se vede ușor o pereche de plane care trec prin intersecția celor două plane date (compară cu nr. **157**).

Fie acum segmentele AB şi CD situate în acelaşi plan; în acest caz, putem stabili locul geometric al dreptelor L *care trec printr-un punct dat în spaţiu* (soluţia de mai sus a problemei rămîne valabilă), şi, în acelaşi timp, să stabilim poziţia tuturor dreptelor L în spaţiu.

Să presupunem că segmentele AB şi CD se află în acelaşi plan (fig. 120). Deoarece volumele tetraedrelor $OABP$ şi $OCDP$ nu variază, cum am arătat mai sus, dacă segmentul OP se deplasează pe dreapta L, putem alege ca punct O intersecţia dreptei L considerate cu planul care conţine segmentele AB şi CD. În acest caz, ambele tetraedre vor avea aceeaşi înălţime, anume perpendiculara coborîtă din punctul P pe acest plan. Prin urmare, raportul dintre volumele celor două tetraedre va fi egal cu raportul dintre ariile triunghiurilor OAB şi OCD, adică vol. $OABP$: vol. $OCDP$ = = aria OAB : aria $OCD = (AB \cdot OH) : (CD \cdot OK)$, unde OH şi OK sînt perpendicularele coborîte din punctul O pe dreptele AB şi CD. De aici obţinem $OH : OK =$ (vol. $OABP$: vol. $OCDP$) $\cdot (CD : AB) =$ const. (1) De aceea, locul geometric al punctelor O este, totodată, locul geometric al punctelor din plan care au raportul distanţelor la dreptele AB şi CD egal cu o valoare dată. Acest loc geometric este format (**157**) de perechea de drepte Δ şi Δ', care trec prin intersecţia S a dreptelor AB şi CD sau sînt paralele cu ele, (şi o singură dreaptă Δ, dacă segmentele AB şi CD sînt paralele, iar raportul $OH : OK$ este egal cu unu). Aşadar, dreapta L trebuie considerată să taie una dintre aceste două drepte. Se vede uşor că, şi reciproc, dacă o dreaptă L, taie una dintre dreptele Δ sau Δ', raportul dintre volumele tetraedrelor despre care este vorba va avea o valoare dată.

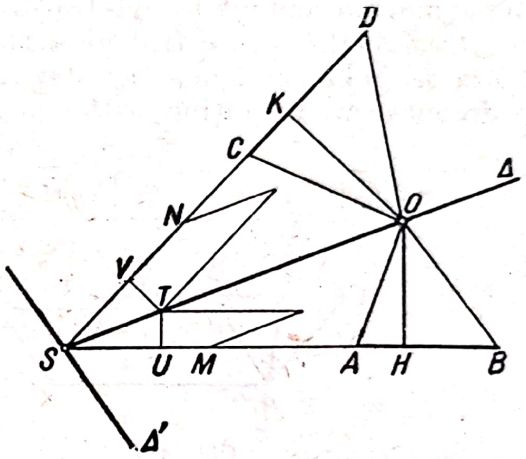


Fig. 120

Considerînd cazul segmentelor AB şi CD, situate în acelaşi plan, am presupus, pînă acum, că dreapta L taie acest plan într-un punct O. Dacă dreapta L este paralelă cu acelaşi plan, iar dreptele AB şi CD se taie într-un punct S, vom construi segmentul ST, egal şi paralel cu muchia comună OP a tetraedrelor $OABP$ şi $OCDP$. Mai departe, construim pe dreptele AB şi CD segmentele SM şi SN, respectiv egale cu AB şi cu CD. Deoarece distanţele cele mai mici dintre dreapta OP şi fiecare dintre dreptele AB şi CD sînt egale (ambele sînt egale cu distanţa dreptei OP la planul $ABCD$), raportul dintre volumele tetraedrelor $OABP$ şi $OCDP$ va fi egal (cf. ex. 551) cu raportul dintre ariile a două paralelograme, dintre care primul are ca laturi segmentele SM şi ST, iar al doilea segmentele SN şi ST. Notînd acum cu TU şi cu TV înălţimile acestor două paralelograme, vom avea vol. $OABP$: vol. $OCDP$ = $= (SM \cdot TU) : (SN \cdot TV) = (AB \cdot TU) : (CD \cdot TV)$, de unde $TU : TV =$ (vol. $OABP$: vol. $OCDP$) $\cdot (CD : AB) =$ const. Compararea acestei egalităţi cu egalitatea (1) arată că segmentul ST se află pe una dintre dreptele Δ şi Δ', considerate mai sus.

Așadar, *dacă dreptele AB și CD sînt concurente, vor fi drepte L toate dreptele care taie cel puțin una dintre cele două drepte determinate Δ și Δ', și de asemenea toate dreptele paralele cu una dintre ele.* Dreptele Δ și Δ' sînt situate în același plan cu dreptele AB și CD și trec prin intersecția lor.

În mod analog, putem examina și ultimul caz, cînd dreptele AB și CD sînt paralele, iar dreapta L este paralelă cu planul care le conține.

554. Dacă dreapta EF taie planul $ABCD$, atunci muchia comună EF a tetraedrelor $ABEF$, $ACEF$ și $ADEF$ poate fi deplasată (ex. 552) — fără a schimba volumele acestor tetraedre — pe dreapta care o conține, astfel ca vîrful E să fie în planul $ABCD$. În acest caz, cele trei tetraedre vor avea ca înălțime comună distanța punctului F la planul $ABCD$. Aria bazei EAD a tetraedrului $ADEF$ va fi egală cu suma sau cu diferența ariilor bazelor EAB și EAC ale celorlalte două tetraedre, în virtutea exercițiului 296, 2° din Geometria plană. De aceea, vom avea aceeași dependență și între volumele lor.

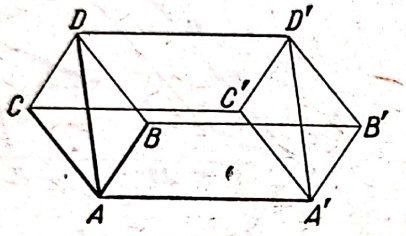


Fig. 121

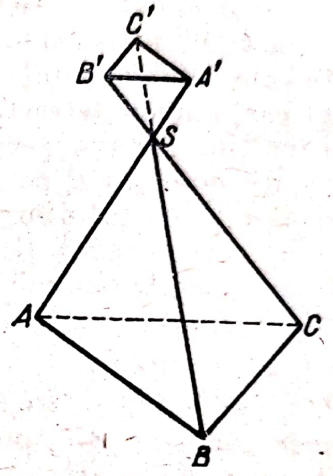


Fig. 122

Dacă acum muchia comună EF a celor trei tetraedre este paralelă cu planul $ABCD$, construim în acesta segmentele AA', BB', CC' și DD' (fig. 121), care sînt fiecare paralele și egale cu segmentul EF. Volumele celor trei tetraedre vor fi egale (ex. 551) cu a șasea parte din produsele dintre distanțele dreptei EF la planul $ABCD$, respectiv cu ariile paralelogramelor $ABB'A'$, $ACC'A'$, sau $BDD'B'$ și $ADD'A'$. Deoarece însă paralelogramele $ABB'A'$, $BDD'B'$ și $ADD'A'$ au bazele egale, $AA' = BB'$, iar înălțimea ultimului este egală cu suma sau cu diferența înălțimilor primelor două, va avea loc aceeași dependență și între ariile celor trei paralelograme, deci și între volumele tetraedrelor $ABEF$, $ACEF$ și $ADEF$. Așadar, propoziția care ne interesează este valabilă în toate cazurile.

555. Fie de calculat suma volumelor celor două piramide $SABC$ și $SA'B'C'$ (fig. 122), care au ariile bazelor ABC și $A'B'C'$ respectiv egale cu B și cu B', iar distanța dintre planele bazelor egală cu h. Notînd cu x și cu y înălțimile piramidelor $SABC$ și $SA'B'C'$, vom avea $x + y = h$ și (cf. nr. **393** nota), $x : y = \sqrt{B} : \sqrt{B'}$. De aici obținem $x = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}+\sqrt{B'}}$; $y = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B}+\sqrt{B'}}$, astfel că

$$\text{vol. } SABC + \text{vol. } SA'B'C' = \frac{1}{3}(Bx + B'y) = \frac{1}{3}h(B + B' - \sqrt{BB'}).$$

PROBLEMELE LA CARTEA A ȘASEA

556. Să presupunem că secțiunea unui tetraedru $ABCD$ printr-un plan care nu taie (pentru a fixa ideile) muchiile BC și AD este paralelogramul $KLMN$ (fig. 123). Deoarece dreptele KL și MN sînt paralele, planele fețelor BCD și ABC, care trec prin ele, se intersectează după dreapta BC, care va fi paralelă (**327**) cu dreptele KL și MN. De aici rezultă că planul $KLMN$ este paralel cu dreapta BC. Analog, din faptul că dreptele LM și NK sînt paralele, rezultă că planul $KLMN$ este paralel cu dreapta AD. Reciproc, dacă un plan paralel cu două muchii opuse ale unui tetraedru, de exemplu BC și AD, taie celelalte muchii ale lui, atunci secțiunea este un paralelogram.

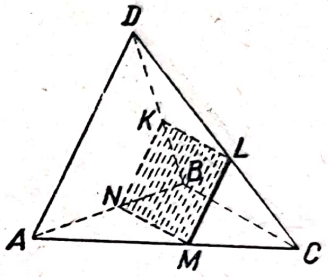


Fig. 123

Așadar, orice plan care taie un tetraedru după un paralelogram este paralel cu două oarecare dintre muchiile sale opuse. Deoarece tetraedrul are trei perechi de muchii opuse, există trei direcții pe care le poate lua planul ce intersectează tetraedrul după un paralelogram.

Dacă planul secant se deplasează paralel cu el însuși, unghiurile paralelogramului $KLMN$ nu se schimbă. De aici rezultă că ariile paralelogramului $KLMN$ și paralelogramului analog $K'L'M'N'$ sînt în același raport ca produsele a două laturi consecutive $KL \cdot LM$ și $K'L' \cdot L'M'$. Deci, aria paralelogramului va fi maximă dacă produsul

$$y = KL \cdot LM \tag{1}$$

va fi maxim. Însă din asemănarea celor două perechi de triunghiuri DKL, DBC și CLM, CDA, avem

$$KL : BC = DL : CD;\ LM : AD = CL : CD, \tag{2}$$

de unde

$$\frac{KL}{BC} + \frac{LM}{AD} = \frac{DL + CL}{CD} = 1. \tag{3}$$

Scriind acum expresia (1) sub forma

$$y = BC \cdot AD \cdot \frac{KL}{BC} \cdot \frac{LM}{AD} \tag{4}$$

și observînd că segmentele BC și AD nu variază în cazul deplasării planului secant, putem aplica ultimilor doi factori din membrul al doilea al egalității (4) următoarea teoremă: produsul a doi factori pozitivi a căror sumă este constantă este maxim, dacă cei doi factori sînt egali (compară cu nr. **155**, constr. 7). De aici rezultă că aria paralelogramului $KLMN$ va fi maximă cu condiția ca $KL : BC = LM : AD$, sau, în virtutea relației (3), $KL = \frac{1}{2} BC$ și $LM = \frac{1}{2} AD$. Așadar, *aria paralelogramului $KLMN$ va fi maximă, dacă planul secant este*

dus prin mijlocul muchiilor (K este mijlocul muchiei BD, L mijlocul muchiei CD etc.).

Pentru ca paralelogramul $KLMN$ să fie romb, adică să avem egalitatea $KL = LM$, este necesar și suficient, în baza relației (2), să avem $CL : DL = BC : AD$. Așadar, *pentru ca paralelogramul $KLMN$ să fie romb, muchia CD trebuie împărțită în raportul $BC : AD$, măsurînd de la punctul C* (iar muchiile CA, BD și BA să fie împărțite în același raport, pornind de la prima extremitate a fiecărei muchii). Lungimea laturii rombului se obține din ecuația (3) care, pentru $KL = LM$, ne dă

$$KL = \frac{BC \cdot AD}{BC + AD}.$$

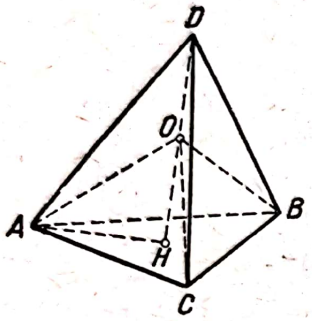


Fig. 124

557. Fie O mijlocul înălțimii DH a tetraedrului regulat $ABCD$ (fig. 124), a cărui muchie este egală cu a. Deoarece $AH = a/\sqrt{3}$, iar $DH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ex. 544, prima soluție), avem $OH = \frac{1}{2} DH = a/\sqrt{6}$, de unde deducem $OA = OB = OC = \sqrt{AH^2 + OH^2} = a/\sqrt{2}$. De aici rezultă imediat că $OA^2 + OB^2 = a^2 = AB^2$, astfel că unghiul AOB este drept. Din aceeași cauză, unghiurile BOC și COA vor fi deasemenea drepte.

558. Să presupunem că muchiile unui tetraedru dat satisfac condiția

$$AB + CD = BC + DA. \tag{1}$$

În primul rînd, vom arăta că, în aceste condiții, există un punct egal depărtat de toate laturile patrulaterului strîmb $ABCD$ și de dreapta AC.

Să notăm cu H centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar cu I, K și L punctele lui de contact cu laturile CA, AB și BC ale triunghiului (fig. 103). În acest caz, vom avea (ex. 90 *bis*) $2AI = CA + AB - BC$. Înlocuind aici, în baza relației (1), diferența $AB - BC$ prin diferența egală $DA - CD$, obținem $2AI = AC + DA - CD$. Această egalitate arată că punctul I este, în același timp, punctul de contact cu latura CA al cercului înscris în triunghiul CDA (iarăși cf. ex. 90 *bis*). Să notăm cu M și cu N punctele de contact ale acestui cerc cu laturile CD și DA ale triunghiului, iar cu F centrul său. Deoarece dreptele IF și IH sînt ambele perpendiculare pe muchia CA, perpendicularele ridicate respectiv în punctele F și H pe planele CDA și ABC se vor intersecta într-un punct O. Din egalitățile $HI = HK = HL$ și $FI = FM = FN$, obținem $OI = OK = OL = OM = ON$.

Să notăm acum cu E și cu G picioarele perpendicularelor coborîte din punctul O pe fețele BCD și DAB; vom avea patru perechi de triunghiuri dreptunghice egale (triunghiurile din fiecare pereche au ipotenuzele egale și cîte o catetă comună) OKH și OLH, OLE și OME, OMF și ONF, ONG și OKG. Din egalitatea acestor triunghiuri, rezultă egalitatea unghiurilor

$$\widehat{HKO} = \widehat{OHL}\ ;\ \widehat{ELO} = \widehat{EMO};\ \widehat{FMO} = \widehat{FNO};\ \widehat{GNO} = \widehat{GKO}.$$

Evident, punctul O este interior teraedrului, cel puţin dacă alegem notaţiile astfel ca diedrul de muchie AC să fie mai mic decît diedrul de muchie BD. În acest caz, unghiul plan GKH al diedrului de muchie AB din tetraedru va fi egal cu suma unghiurilor GKO şi HKO etc. Suma diedrelor de muchii AB şi CD ale tetraedrului are ca măsură suma unghiurilor lor plane, egală cu $\widehat{GKH} + \widehat{EMF} = \widehat{GKO} + \widehat{HKO} + \widehat{EMO} + \widehat{FMO}$; analog, suma diedrelor de muchii BC şi DA are ca măsură suma $\widehat{HLE} + \widehat{FNG} = \widehat{HLO} + \widehat{ELO} + \widehat{FNO} + \widehat{GNO}$. Însă ultimele două sume sînt egale, în virtutea egalităţii (2), de unde rezultă propoziţia pe care trebuia s-o demonstrăm.

Observaţie. Punctul O, pe care l-am folosit în demonstraţia noastră, este, cum se vede uşor (v. soluţia ex. 441) punctul comun a patru plane, anume planul P care trece prin bisectoarea unghiului DAB şi este perpendicular pe planul acestuia, precum şi cele trei plane analoge Q, R şi S, corespunzătoare unghiurilor ABC, BCD şi CDA. Să demonstrăm că, *dacă este satisfăcută condiţia* (1), *atunci planele* P, Q, R *şi* S *au un punct comun şi, în plus, sînt secante după aceeaşi dreaptă.*

Punctele K, L, M şi N de pe laturile patrulaterului strîmb $ABCD$ satisfac condiţiile $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$ şi $AN = AK$. De aceea, punctele K, L, M şi N sînt situate în acelaşi plan, în virtutea teoremei reciproce considerate la problema 505. Însă planul P este perpendicular pe segmentul NK, (pentru că $AN = AK$), deci şi perpendicular pe planul $KLMN$. Planele Q, R şi S sînt şi ele perpendiculare, din motive analoge, pe planul $KLMN$. Deoarece planele P, Q, R şi S au un punct comun O şi sînt perpendiculare pe planul $KLMN$, ele trec prin aceeaşi dreaptă.

559. Fie $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ două tetraedre date. Dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile A şi B ale primului tetraedru respectiv pe feţele $B'C'D'$ şi $C'D'A'$ ale celui de-al doilea se intersectează într-un punct O, ele se află în acelaşi plan. Acest plan ABO este perpendicular pe planul $B'C'D'$, deoarece trece prin perpendiculara AO pe acest plan, şi perpendiculară pe planul $C'D'A'$, din acelaşi motiv. Prin urmare, planul ABO va fi perpendicular şi pe intersecţia $C'D'$ a celor două plane şi, de aceea, dreapta AB va fi tot perpendiculară pe $C'D'$. De aici rezultă că, *dacă perpendicularele coborîte din toate vîrfurile tetraedrului* $ABCD$ *pe feţele corespunzătoare ale celui de-al doilea tetraedru* $A'B'C'D'$ *sînt concurente atunci muchiile* BC, CA, AB, AD, BD *şi* CD *ale primului tetraedru sînt respectiv perpendiculare pe muchiile* $A'D'$, $B'D'$, $C'D'$, $B'C'$, $C'A'$ *şi* $A'B'$ *ale celui de-al doilea.*

Deoarece muchia $A'D'$ a celui de-al doilea tetraedru este perpendiculară pe muchia BC a primului, putem duce prin $A'D'$ un plan perpendicular pe dreapta BC; în acest plan, vor fi conţinute perpendicularele coborîte din vîrfurile A' şi D' ale celui de-al doilea tetraedru, respectiv pe feţele BCD şi ABC ale primului tetraedru. Deoarece aceste două perpendiculare nu pot fi paralele, ele se taie într-un punct. În acelaşi mod, demonstrăm că în general, orice pereche de perpendiculare coborîte din vîrfurile celui de-al doilea tetraedru pe feţele celui dintîi, sînt concurente. Dat fiind că aceste patru perpendiculare nu se află în acelaşi plan, obţinem (cu ajutorul ex. **423**) propoziţia pe care trebuia s-o demonstrăm: *perpendicularele coborîte din vîrfurile celui de-al doilea tetraedru pe feţele celui dintîi sînt toate concurente.*

Scanned with OKEN Scanner

560. Dacă muchiile AB și CD ale tetraedrului $ABCD$ sînt perpendiculare, atunci fața $AC'BD'$, a paralelipipedului $AC'BD'B'DA'C$ (fig. 98) va fi un romb, deoarece diagonalele ei AB și $C'D'$ sînt perpendiculare.

Acum, dacă tetraedrul $ABCD$ are muchii ortogonale (în sensul ex. 535), toate fețele paralelipipedului $AC'BD'B'DA'C$ vor fi romburi, astfel că toate muchiile sale vor fi egale.

561. Dacă vom lua ca bază comună a tetraedrelor $SABC$ și $SOBC$ (fig. 125) fața SBC, atunci înălțimile lor, deci și volumele lor vor fi în același raport

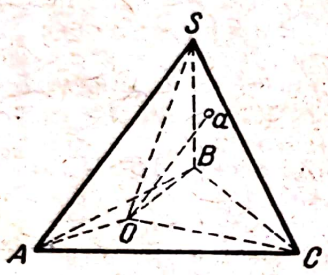


Fig. 125

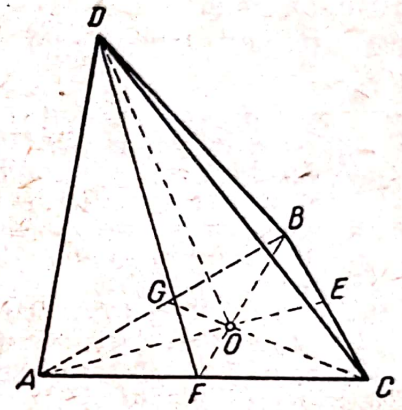


Fig. 126

ca SA și Oa, dică $Oa : SA =$ vol. $SOBC$: vol. $SABC$. Din această egalitate, împreună cu celelalte două analoge, obținem egalitatea cerută

$$\frac{Oa}{SA} + \frac{Ob}{SB} + \frac{Oc}{SC} = \frac{\text{vol. } SOBC + \text{vol. } SOCA + \text{vol. } SOAB}{\text{vol. } SABC} = 1.$$

562. *Prima soluție.* Fie ADE (fig. 126) planul bisector al diedrului de muchie AD în tetraedrul $ABCD$. Dacă vom lua ca bază a tetraedrelor $ABDE$ și $ACDE$ respectiv fețele ABD și ACD, cele două tetraedre vor avea înălțimi egale, deoarece punctul E din planul bisector este egal depărtat de planele ABD și ACD. Prin urmare,

$$\text{vol. } ABDE : \text{vol. } ACDE = \text{aria } ABD : \text{aria } ACD. \qquad (1)$$

Dacă luăm însă ca bază comună a acelorași tetraedre fața ADE, raportul dintre înălțimile lor va fi, evident, egal cu raportul $EB : EC$, astfel că vom avea

$$\text{vol. } ABDE : \text{vol. } ACDE = EB : EC. \qquad (2)$$

Din egalitățile (1) și (2), rezultă relația căutată

$$EB : EC = \text{aria } ABD : \text{aria } ACD.$$

A doua soluție. Fie ADE (fig. 127,) iarăși planul bisector al diedrului de muchie AD în tetraedrul $ABCD$; A_0, B_0, C_0 și E_0 proiecțiile respective ale punctelor A (și D), B, C și E pe un plan P, perpendicular pe muchia AD. Deoarece unghiul $B_0A_0C_0$ este unghiul plan al diedrului cu muchia AD în tetraedrul considerat, A_0E_0 va fi bisectoare în triunghiul $A_0B_0C_0$. Ținînd seama de aceasta, avem

$$EB : EC = E_0B_0 : E_0C_0 = A_0B_0 : A_0C_0. \qquad (3)$$

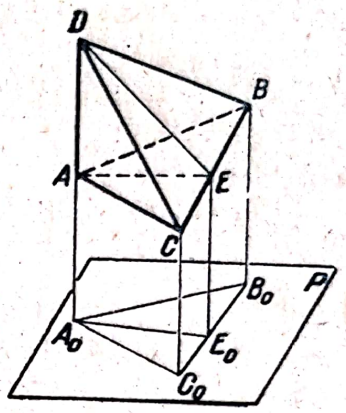


Fig. 127

Segmentele A_0B_0 și A_0C_0, perpendiculare pe AA_0, sînt respectiv egale cu înălțimile triunghiurilor ABD și ACD, duse din vîrfurile B și C. De aceea,

$$A_0B_0 : A_0C_0 = \text{aria } ABD : \text{aria } ACD. \qquad (4)$$

Relația cerută rezultă din egalitățile (3) și (4).

563. Fie ADE planul bisector al diedrului de muchie AD în tetraedrul $ABCD$ (fig. 126), BDF și CDG planele bisectoare ale diedrelor cu muchiile BD și CD. Aceste trei plane bisectoare se intersectează după dreapta DO (ex. 479). Am demonstrat mai sus egalitatea

$$EB : EC = \text{aria } ABD : \text{aria } ACD$$

(v. soluția ex. 562). Totodată are loc proporția

$$EB : EC = \text{aria } ABO : \text{aria } ACO; \qquad (1)$$

în adevăr, dacă luăm latura AO ca bază comună a triunghiurilor ABO și ACO, raportul dintre înălțimile lor va fi egal cu $EB : EC$. Din cele două egalități pe care le-am scris, avem

$$\text{aria } ABO : \text{aria } ACO = \text{aria } ABD : \text{aria } ACD.$$

Tot astfel, demonstrăm că

$$\text{aria } BCO : \text{aria } BAO = \text{aria } BCD : \text{aria } BAD.$$

Să notăm respectiv cu S_1, S_2 și S_3 ariile triunghiurilor BCD, CDA și DAB; putem atunci scrie egalitățile de mai sus sub forma

$$\text{aria } BCO : \text{aria } CAO : \text{aria } ABO = S_1 : S_2 : S_3. \qquad (2)$$

Mai departe, avem aria OBE : aria $OCE = EB : EC$ sau, în baza relației (1),

$$\text{aria } OBE : \text{aria } OCE = S_3 : S_2. \qquad (3)$$

În același mod, obținem celelalte două egalități analoge

$$\text{aria } OCF : \text{aria } OAF = S_1 : S_3; \qquad (4)$$

$$\text{aria } OAG : \text{aria } OBG = S_2 : S_1. \qquad (5)$$

Egalitățile (2) — (5) ne permit să aflăm raportul dintre ariile triunghiurilor OBE, OCE,..., În adevăr, egalitățile (3) — (5) ne permit să punem

$$\text{aria } OBE = \alpha S_3;\ \text{aria } OCE = \alpha S_2;$$
$$\text{aria } OCF = \beta S_1;\ \text{aria } OAF = \beta S_3;$$
$$\text{aria } OAG = \gamma S_2;\ \text{aria } OBG = \gamma S_1,$$

unde α,β și γ sînt factori de proporționalitate. De aici deducem aria OBC = = aria OBE + aria $OCE = \alpha\ (S_2 + S_3)$ și analog aria $OCA = \beta(S_3 + S_1)$; aria $OAB = \gamma(S_1 + S_2)$. Introducînd aceste valori în egalitatea (2) obținem

$$\alpha\ (S_2 + S_3) : \beta\ (S_3 + S_1) : \gamma\ (S_1 + S_2) = S_1 : S_2 : S_3,$$

de unde

$$\alpha = \frac{\rho S_1}{S_2 + S_3};\ \beta = \frac{\rho S_2}{S_3 + S_1};\ \gamma = \frac{\rho S_3}{S_1 + S_2},$$

iar în definitiv

$$\text{aria } OBE : \text{aria } OCE : \text{aria } OCF : \ldots = \frac{S_1 S_3}{S_2 + S_3} : \frac{S_1 S_2}{S_2 + S_3} : \frac{S_1 S_2}{S_3 + S_1} : \ldots$$

564. Fie M punctul de intersecție al dreptelor BF și CE (fig. 128), K punctul de intersecție al dreptelor BC și SM. Vom folosi următoarea proprietate a trapezului: *dreapta care unește punctul de intersecție al laturilor neparalele cu punctul de intersecție al diagonalelor, taie laturile paralele ale trapezului în părți egale*. Această proprietate a trapezului se obține ușor din exercițiul 129. În adevăr, fie S punctul de intersecție al laturilor neparalele BE și CF în trapezul $BCFE$ (fig. 129), M punctul de intersecție al diagonalelor BF și

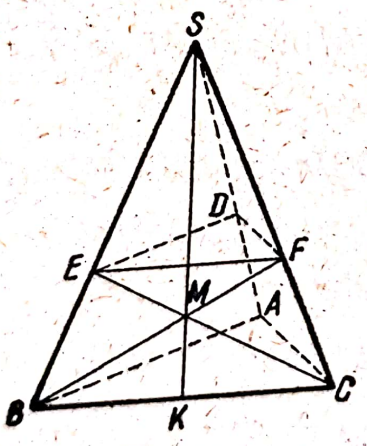


Fig. 128

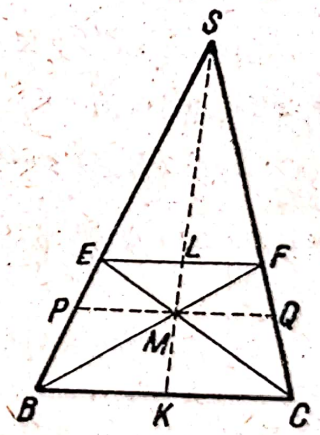


Fig. 129

CE, K și L intersecțiile dreptei SM cu bazele BC și EF ale trapezului. Dacă dreapta care trece prin punctul M și este paralelă cu baza trapezului taie laturile neparalele în punctele P și Q, avem $MP = MQ$ și, deci (**121**) $KB : KC = LE : LF = MP : MQ = 1$, de unde $KB = KC$; $LE = LF$.

1° Intersecția planelor BFD și CDE, adică dreapta DM, se află, în virtutea celor de mai sus, în planul care trece prin muchia SA și prin mijlocul K

al muchiei BC. De aceea, se va găsi în același plan și punctul de intersecție al celor trei plane AEF, BFD și CDE. Din motive analoge, același punct de intersecție trebuie să fie conținut și în planul care trece prin muchia SB și prin mijlocul muchiei CA, precum și în planul care trece prin muchia SC și prin mijlocul muchiei AB (compară cu ex. 528). Deoarece punctul de intersecție al celor trei plane AEF, BFD și CDE este întotdeauna interior piramidei considerate, rezultă că *locul geometric căutat este un segment având ca extremități punctul S și centrul de greutate al triunghiului ABC* (se constată ușor că *orice* punct al acestui segment aparține locului geometric considerat).

2° Deoarece planele CAE și ABF se taie după dreapta AM, situată și în planul SAK, aceleași raționamente vor fi aplicabile și punctelor de intersecție ale planelor BCD, CAE și ABF, iar locul geometric al punctului de intersecție al acestor trei plane va fi același segment, ca și în primul caz.

565. Să ducem, prin fiecare muchie a unui poliedru dat (cu excepția muchiilor paralele cu dreapta dată, dacă poliedrul dat are astfel de muchii), cîte un plan paralel cu dreapta dată D, sau, mai exact, partea din acest plan care se va obține dacă vom duce drepte, paralele cu cea dată, prin toate punctele muchiei considerate. Aceste părți de plane formează, evident, un număr finit de suprafețe prismatice (în sensul indicat la nr. **387**).

Să considerăm partea P din domeniul interior al poliedrului dat care se situează în interiorul uneia oarecare dintre aceste suprafețe poliedrale. Această parte P va fi și ea un poliedru, mărginit de fețele suprafeței prismatice considerate, precum și de fețe sau de părți ale fețelor poliedrului inițial. Deoarece planele paralele cu dreapta D au fost duse prin *toate* muchiile poliedrului dat, rezultă că toate muchiile noului poliedru P sînt situate în fețele suprafeței prismatice (fac excepție cazurile asemănătoare cu cel reprezentat în fig. 130, cînd o anumită suprafață prismatică „este închisă" dintr-o parte de două sau mai multe fețe), iar poliedrul P este un trunchi de prismă.

Așadar, poliedrul dat va fi descompus într-un număr finit de trunchiuri de prismă, analoge cu P.

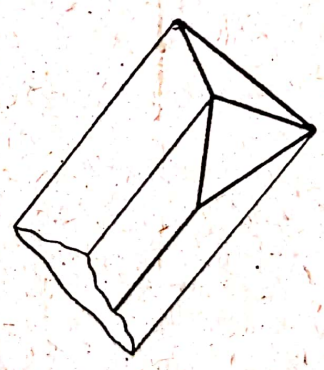


Fig. 130

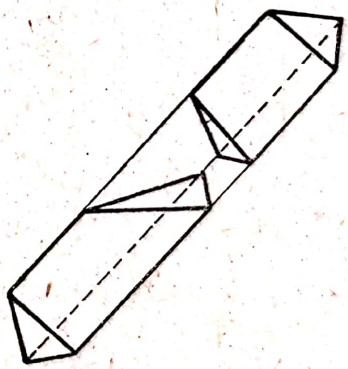


Fig. 131

Observații. 1) Dacă poliedrul dat nu este convex, interiorul suprafeței prismatice considerate poate conține și mai mult decît un singur trunchi de prismă, care formează poliedrul dat (fig. 131).

2) O descompunere analogă a unui poligon plan în trapeze (dintre care unele pot degenera în triunghiuri) se obține dacă ducem prin fiecare vîrf al poligonului dat drepte paralele cu o dreaptă dată. Am folosit o astfel de descompunere, de exemplu, la rezolvarea exercițiului 321.

566. Fie dată o prismă, de exemplu, prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ (fig. 132); numărul laturilor bazei nu joacă nici un rol în expunerea care urmează), care este intersectată de planul $A''B''C''$, paralel cu bazele. Unind prin

drepte un punct arbitrar S' al bazei superioare cu punctele A'', B'' și C'', căpătăm piramida $S'A_0B_0C_0$,

Să presupunem că dreapta dusă prin punctul S' paralel cu muchiile laterale ale prismei taie planul bazei inferioare în punctul S. În acest caz, punctele A_0, B_0 și C_0 sînt situate respectiv pe dreptele SA, SB și SC. Mai departe, laturile omoloage ale triunghiurilor ABC și $A_0B_0C_0$ sînt paralele, deoarece ambele drepte BC și B_0C_0 sînt paralele cu $B''C''$, iar celelalte două perechi de laturi omoloage au o situație analogă. Prin urmare, triunghiurile ABC și $A_0B_0C_0$ sînt omotetice în raport cu centrul de asemănare S.

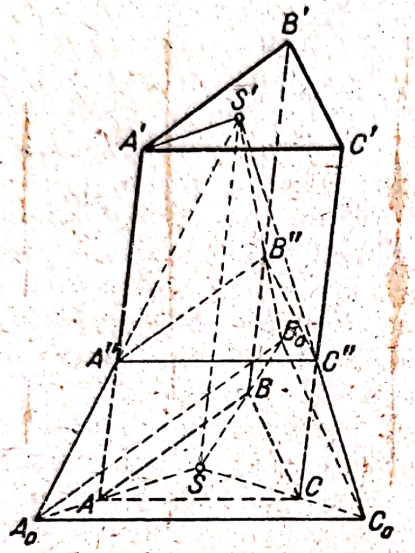


Fig. 132

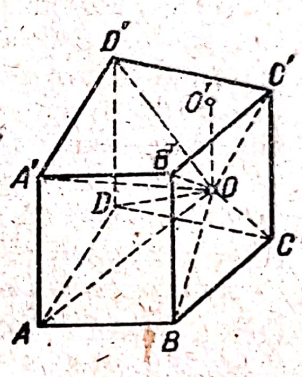


Fig. 133

Deoarece prisma $ABCA'B'C'$ și piramida $S'A_0B_0C_0$, care au înălțimea comună, trebuie să fie echivalente, conform enunțului problemei, înseamnă că vom avea egalitatea aria $A_0B_0C_0 = 3 \cdot$aria ABC, de unde deducem raportul de asemănare al triunghiurilor ABC și $A_0B_0C_0$:

$$SA_0 : SA = \sqrt{3}.$$

Din asemănarea celor două triunghiuri $S'A'A''$ și A_0SS', găsim $A'A'' : A'A = A'A'' : S'S = A'S' : SA_0 = SA : SA_0 = 1 : \sqrt{3}$. Egalitatea $A'A'' : A'A = 1 : \sqrt{3}$ determină complet poziția punctului A'' pe muchia AA', adică determină poziția planului secant $A''B''C''$.

567. Fie O un punct arbitrar interior unei prisme date, de exemplu interior prismei patrulatere $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 133; numărul laturilor bazei nu joacă nici un rol în cele ce urmează). Să notăm cu O' punctul de intersecție cu planul bazei superioare $A'B'C'D'$ al dreptei duse din punctul O, paralel cu muchiile laterale ale prismei. În acest caz, piramidele $OABB'A'$ și $O'ABB'A'$ (aceasta din urmă nu este reprezentată în figură) vor fi echivalente, deoarece au baza $ABB'A'$ comună și înălțimi egale; din aceeași cauză, vor fi echivalente piramidele $OBCC'B'$ și $O'BCC'B'$ etc.

Notînd cu h înălțimea prismei date, vom avea vol. $OABB'A'$ + vol. $OBC'BC'$ + + vol. $OCDD'C'$ + vol. $ODAA'D'$ = vol. $O'ABB'A'$ + ... + vol. $O'DAA'D'$ =

$= \text{vol. } ABCDA'B'C'D' - \text{vol. } O'ABCD = h \cdot \text{aria } ABCD - \frac{1}{3} h \times$
$\times \text{aria } ABCD = \frac{2}{3} h \cdot \text{aria } ABCD = \frac{2}{3} \text{vol. } ABCDA'B'C'D',$

Așadar, suma volumelor piramidelor despre care este vorba în enunțul problemei este constantă și egală cu două treimi din volumul prismei date.

568. Să presupunem că planul secant $EFGH$ (fig. 134) trece, pentru a fixa ideile, prin mijloacele E și F ale muchiilor AB și CD ale tetraedrului $ABCD$, astfel că

$$EA = EB;\ FC = FD \qquad (1)$$

și taie în punctele G și H muchiile BD și CA.

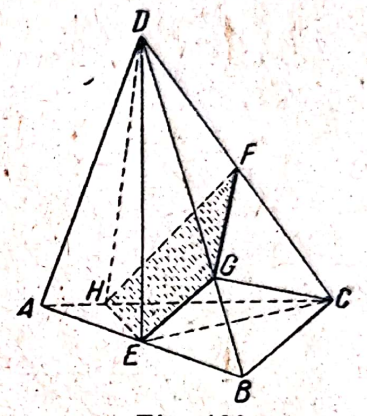


Fig. 134

Poliedrul $ADEGFH$ este format din piramida patrulateră $DEGFH$ și din tetraedrul $ADEH$; poliedrul $BCEGFH$, din piramida patrulateră $CEGFH$ și din tetraedrul $BCEG$. Piramidele patrulatere $DEGFH$ și $CEGFH$ au baza $FGFH$ comună; înălțimile lor sînt de asemenea egale, dată fiind egalitatea segmentelor FD și FC. Prin urmare, aceste piramide sînt echivalente. Pentru a demonstra că planul $EGFH$ împarte în părți egale volumul tetraedrului, este suficient să demonstrăm echivalența tetraedrelor $ADEH$ și $BCEG$. Aceasta se poate realiza în modul următor.

În virtutea exercițiului 545, avem vol. $ADEH$: vol. $ABCD = (AE \times$ $\times AH \cdot AD) : (AB \cdot AC \cdot AD) = AH : 2AC$ și, analog,

$$\text{vol. } BCEG : \text{vol. } ABCD = BG : 2BD.$$

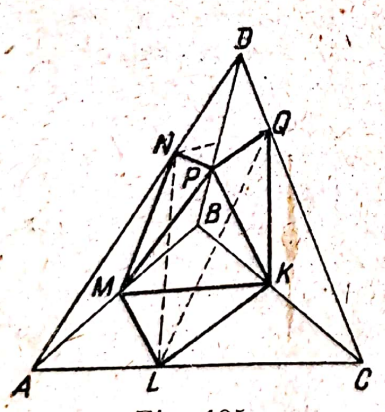


Fig. 135

În consecință,

$$\text{vol. } ADEH : \text{vol. } BCEG = (AH \cdot BD) : (AC \cdot BG). \qquad (2)$$

Aplicînd acum patrulaterului strîmb $ABDC$ și planului secant $EGFH$ propoziția considerată la problema 505, avem $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{GB}{GD} \cdot \frac{FD}{FC} \cdot \frac{HC}{HA} = 1$. În virtutea relației (1), obținem de aici $GB : GD = HA : HC$ sau $BG : BD = AH : AC$ și, deci, vol. $ADEH =$ vol. $BCEG$, în virtutea lui (2). Teorema este demonstrată.

569. Să presupunem că am ales pe muchiile BC, CA, AB, DA, DB și DC ale tetraedrului $ABCD$ (fig. 135) punctele K, L, M, N, P și Q, pentru care $BK : BC = \alpha$; $CL : CA = \beta$; $AM : AB = \gamma$; $DN : DA = \lambda$; $DP : DB = \mu$ și $DQ : DC = \nu$, unde α, β, γ, λ, μ și ν sînt numere pozitive, toate mai mici decît 1. Trebuie să exprimăm raportul dintre volumul V' al octaedrului $KLMNPQ$ și volumul V al tetraedrului $ABCD$.

Volumul V' al octaedrului poate fi scris sub forma diferenței $V' = V$ — vol. $ALMN$ — vol. $BKMP$ — vol. $CKLQ$ — vol. $DNPQ$. Să punem acum, pentru prescurtare, $\alpha' = 1 - \alpha = CK : CB$ și analog $\beta' = 1 - \beta$, $\gamma' = 1 - \gamma$, $\lambda' = 1 - \lambda$, $\mu' = 1 - \mu$ și $\nu' = 1 - \nu$. Avem (ex. 545) vol. $ALMN = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AL}{AC} \cdot \frac{AN}{AD} \cdot V = \gamma\beta'\lambda' \cdot V$; vol. $BKMP = \alpha\gamma'\mu' \cdot V$; vol. $CKLQ = \beta\alpha'\nu' \cdot V$; vol. $DNPQ = \lambda\mu\nu \cdot V$, de unde, în cele din urmă, obținem

$$V' = V(1 - \gamma\beta'\lambda' - \alpha\gamma'\mu' - \beta\alpha'\nu' - \lambda\mu\nu).$$

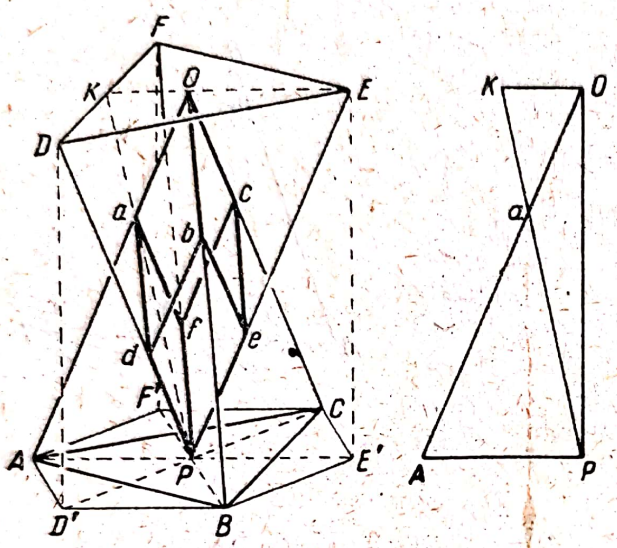


Fig. 136

570. Fie triunghiurile ABC și DEF (fig. 136), dispuse cum se arată în enunț: punctele A, B, C și proiecțiile D', E' și F' ale punctelor D, E și F pe planul ABC formează exagonul regulat $AD'BE'CF'$. Să considerăm cele două piramide regulate $OABC$ și $PDEF$, unde O și P sînt centrele triunghiurilor DEF și ABC. Muchia OA a primei piramide taie fața PFD a celei de-a doua în punctul a, situat pe apotema PK a acestei fețe. Analog, muchiile OB și OC ale primei piramide taie fețele PDE și PEF ale celei de-a doua, în punctele b și c, iar muchiile PD, PE și PF ale celei de-a doua taie respectiv fețele OAB, OBC și OCA ale primei piramide în punctele d, e și f. Partea comună a celor două piramide este mărginită de șase plane, anume fețele laterale ale celor două piramide. Deoarece aceste șase plane sînt paralele două cîte două (planul OAB este paralel cu PEF, deoarece dreapta AB este paralelă cu dreapta EF, iar dreapta OA cu dreapta PE, etc.), partea comună celor două piramide va fi paralelipipedul $Oadbcfe$. Considerînd secțiunea celor două piramide prin planul AOP, vom avea două triunghiuri asemenea OKa și APa. De aici avem $Oa : Aa = OK : AP$. Însă segmentul OK este, evident, egal cu jumătatea lui AP, deoarece distanța de la centrul unui triunghi echilateral la latura sa este jumătatea distanței de la centru la vîrf. Așadar, avem $Oa : Aa = 1 : 2$, de unde $Oa = Ob = Oc = Pd = Pe = Pf = \frac{1}{3}OA$. Totodată, $\widehat{aOb} = \widehat{bOc} = \widehat{cOa}$, ca unghiuri la vîrf ale unei piramide regulate. Prin urmare, partea comună a celor două piramide este un romboedru (**390** *bis*), adică un paralelipiped mărginit de șase romburi egale.

Volumul acestui romboedru se poate determina în modul următor. Volumul piramidei $Oabc$, tăiat din romboedru de planul abc, care trece prin extremitățile a trei muchii duse din același punct, este egal cu o șesime din volumul romboedrului (v. soluția ex. 550). Pe de altă parte, volumul piramidei $Oabc$ este egal (compară cu ex. 549) cu 1/27 din volumul piramidei

$OABC$, în virtutea egalităților $Oa : OA = Ob : OB = Oc : OC = 1 : 3$. De aici rezultă că volumul romboedrului este de $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ din volumul fiecăreia dintre piramidele $OABC$ și $PDEF$.

571. Fie $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 137) paralelipipedul P dat. Ducem, prin centrul său O, trei drepte paralele cu muchiile. Planul care trece prin vîrful B' și este paralel cu planul $A'BC'$ taie aceste trei drepte în puncte pe care le vom nota cu L, M și N. Planul LMN taie planul feței $A'B'C'D'$ a paralelipipedului P după dreapta $FB'G$, paralelă cu $A'C'$ și astfel că $FB' = B'G$

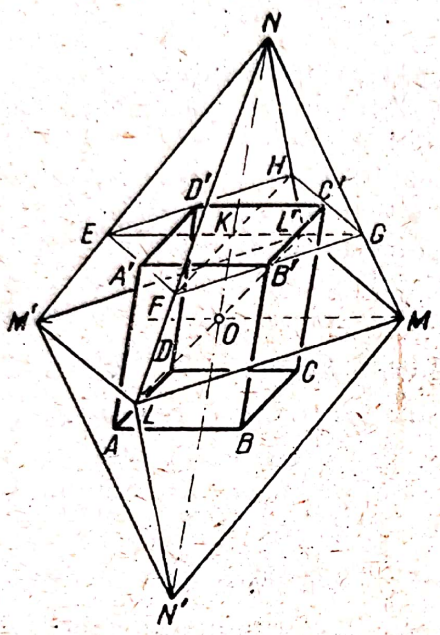


Fig. 137

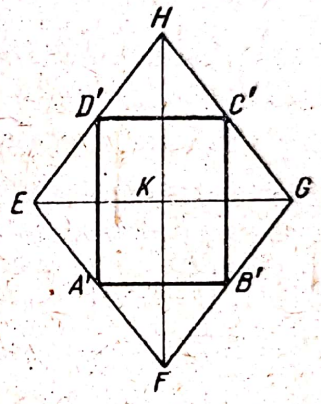


Fig. 138

(fig. 138). Deoarece dreapta FG va fi paralelă cu LM, iar punctul B' împarte segmentul FG în părți egale, dreapta NB' va fi mediană în triunghiul LMN. Din considerații analoge, rezultă că punctul B' se află și pe celelalte două mediane ale triunghiului LMN și coincide deci cu centrul său de greutate. Dacă vom nota cu K intersecția dreptei ON cu fața $A'B'C'D'$, vom deduce de aici cu ușurință că $OM : KG = NM : NG = 3 : 2$. Deoarece $KG = A'B'$ (v. fig. 138), rezultă că $OM = \frac{3}{2} A'B'$; analog, $OL = \frac{3}{2} B'C'$; $ON = \frac{3}{2} BB'$.

Așadar, planul LMN, deci fiecare dintre cele șapte plane analoge, determină pe fiecare dintre dreptele OL, OM și ON (pornind din punctul O) un segment de 1,5 ori mai mare decît muchia paralelipipedului P, paralelă cu dreapta respectivă.

De aici rezultă că poliedrul S despre care este vorba are șase vîrfuri, anume punctele L, M și N și cele trei puncte L', M' și N' de pe dreptele OL, OM și ON pentru care $OL = OL'$; $OM = OM'$; $ON = ON'$. El este mărginit de opt triunghiuri LMN, $LM'N$... și este un octaedru.

De aici mai rezultă că, pentru a construi paralelipipedul P, este suficient să luăm ca vîrfuri ale sale centrele de greutate ale fețelor octaedrului S.

Trecem la determinarea volumului poliedrului S. Potrivit teoremei referitoare la ariile secțiunilor unei piramide (393, Cor), avem aria $LML'M' =$ $=$ aria $EFGH \cdot \left(\frac{NM}{NG}\right)^2 = \frac{9}{4}$ aria $EFGH = \frac{9}{2}$ aria $A'B'C'D'$. Mai departe, de-

oarece, potrivit celor demonstrate, $ON = \frac{3}{2} BB'$, înălțimea piramidei $NLML'M'$ este de 1,5 ori mai mare decît înălțimea paralelipipedului P. Prin urmare, vol. $NLML'M' = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2}$ vol. $ABCDA'B'C'D' = \frac{9}{4}$ vol. $ABCDA'B'C'D'$, deci volumul octaedrului S este de 4,5 ori mai mare decît volumul paralelipipedului P.

Dacă paralelipipedul P va fi dreptunghic, atunci paralelogramul $EFGH$ va fi un romb (fig. 138); prin urmare, $LML'M'$ va fi de asemenea un romb, astfel că $LM = ML' = L'M' = M'L$. Analog, $LN = NL' = L'N' = N'L$ și $MN = NM' = M'N' = N'M$. De aici rezultă că, în acest caz, toate fețele octaedrului S vor fi egale (avînd cele trei laturi respectiv egale).

Fie acum P un romboedru. Dacă unghiurile plane egale ale fețelor sale se vor întîlni, pentru a fixa ideile, în vîrful B', atunci diagonalele $A'C'$, $C'B$ și BA' ale fețelor sale vor fi egale. De aci rezultă că și segmentele LM, NL și MN vor fi egale (deoarece $LM = \frac{3}{2} FG = \frac{3}{2} A'C'$ etc.), astfel că fața LMN a poliedrului S va fi un triunghi echilateral. Din aceeași cauză, va fi un triunghi echilateral și fața $L'M'N'$. Mai departe, în acest caz, vor fi egale și celelalte diagonale ale fețelor paralelipipedului P, anume $B'D' = B'A = B'C = DB = DC' = DA'$, de unde $LM' = M'N = NL' = L'M = MN' = N'L$ (deoarece $LM' = \frac{3}{2} EF = \frac{3}{2} B'D$ etc.). Așadar, dacă P este un romboedru, atunci două fețe ale octaedrului S sînt triunghiuri echilaterale, iar celelalte șase, triunghiuri isoscele.

În sfîrșit, dacă paralelipipedul P este un cub, el va fi totodată paralelipiped dreptunghic și romboedru. Toate fețele octaedrului S vor fi triunghiuri echilaterale (octaedrul „regulat", v. nr. **714**).

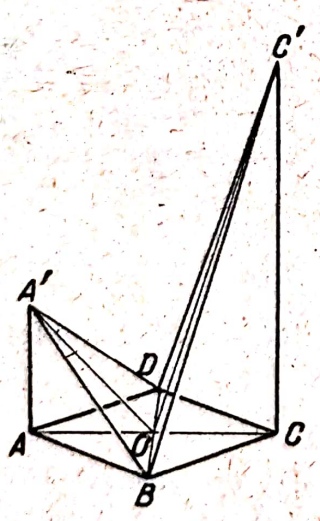


Fig. 139

572. Fie O centrul pătratului $ABCD$ (fig. 139). Deoarece, prin ipoteză, $OA' = AB = a$ și, totodată, $OA = a/\sqrt{2}$, avem

$$AA' = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a/\sqrt{2}.$$

Mai departe, prin ipoteză, $A'C' = 2a$ și, totodată, $A'C'^2 = AC^2 + (CC' - AA')^2$, de unde $(CC' - AA')^2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$ și $CC' - AA' = a\sqrt{2}$, astfel că

$$CC' = AA' + a\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} = \frac{3}{2} a\sqrt{2}.$$

1° Avem $OC'^2 = OC^2 + CC'^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{9}{2} a^2 = 5a^2$. Așadar, $OA' = a$; $OC' = a\sqrt{5}$; $A'C' = 2a$. Aceste egalități arată că $OA'^2 + A'C'^2 = OC'^2$, astfel că dreptele OA' și $A'C'$ sînt perpendiculare. Totodată, dreapta BD este perpendiculară pe planul $ACC'A'$; de aceea, ea este perpendiculară și pe

dreapta $A'C'$. Dreapta $A'C'$, perpendiculară pe OA' şi pe BD, este perpendiculară şi pe planul $A'BD$.

2° Se găseşte uşor că vol. $A'ABD = \frac{1}{3}$ aria $ABD \cdot AA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a^3/6\sqrt{2}$; mai departe, vol. $C'BCD = \frac{1}{3}$ aria $BCD \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \times \frac{2}{3} a\sqrt{2} = a^3/2\sqrt{2}$ şi vol. $C'A'BD = \frac{1}{3}$ aria $A'BD \cdot A'C' = \frac{1}{6} BD \cdot OA' \times A'C' = \frac{1}{6} a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2a = a^3\sqrt{2}/3$.

573. Să presupunem că planul secant taie în punctele D,E şi F muchiile laterale AA', BB' şi CC' ale prismei triunghiulare $ABCA'B'C'$ (fig. 140). Să presupunem că rapoartele în care planul secant împarte cele trei muchii laterale sînt date de mărimile: aria $BCFE$:aria $BCC'B' = \lambda$; aria $CADF$: :aria $CAA'C' = \mu$; aria $ABED$:aria $ABB'A' = \nu$. Alegînd în mod corespunzător notaţiile pentru vîrfurile prismei, putem presupune că

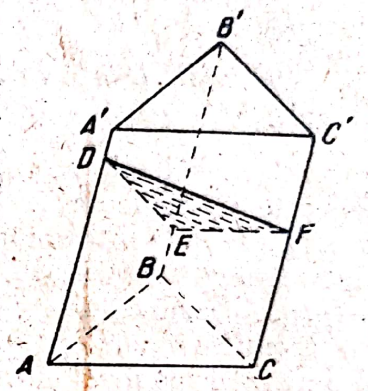


Fig. 140

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant 1. \qquad (1)$$

Introducem acum următoarele notaţii: $AD/AA' = \alpha$; $BE/BB' = \beta$; $CF/CC' = \gamma$. În acest caz, vom avea $\lambda =$ aria $BCFE$: aria $BCC'B' = \frac{1}{2}(BE + CF) : BB' = \frac{1}{2}(\beta \cdot BB' + \gamma \cdot CC') : BB' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ şi, analog, $\mu = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$, $\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Rezolvînd aceste trei ecuaţii în raport cu α, β şi γ, obţinem

$$\alpha = \mu + \nu - \lambda;\ \beta = \nu + \lambda - \mu;\ \gamma = \lambda + \mu - \nu. \qquad (2)$$

Deoarece fiecare dintre rapoartele α,β şi γ trebuie să fie cuprins între 0 şi 1, valorile λ,μ şi γ trebuie să satisfacă condiţiile

$$0 \leqslant \mu + \nu - \lambda \leqslant 1;\ 0 \leqslant \nu + \lambda - \mu \leqslant 1;\ 0 \leqslant \lambda + \mu - \nu \leqslant 1. \qquad (3)$$

Aşadar, rapoartele λ,μ şi ν, pe care le-am introdus mai sus, satisfac neapărat condiţiile (3). Totodată, aceste inegalităţi sînt şi suficiente pentru existenţa planului secant corespunzător valorilor date λ,μ,ν. În adevăr, dacă condiţiile (3) sînt satisfăcute, valorile lui α, β şi γ, date de egalităţile (2), sînt cuprinse între 0 şi 1 şi determină complet poziţiile punctelor D,E şi F pe muchiile prismei.

Dacă numerele λ,μ şi ν sînt alese în conformitate cu (1), atunci inegalităţile (3) pot fi înlocuite prin următoarele două:

$$0 \leqslant \lambda + \mu - \nu;\ \mu + \nu - \lambda \leqslant 1, \qquad (3')$$

deoarece toate celelalte inegalități (3) rezultă din (1) și din (3′).

Avem, mai departe,

$$\text{vol. } ABCDEF : \text{vol. } ABCA'B'C' = \frac{1}{3}(AD + BE + CF) : AA' =$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{3}(\lambda + \mu + \nu),$$

de unde

$$\text{vol. } ABCDEF : \text{vol. } A'B'C'DEF = \text{vol. } ABCDEF : (\text{vol. } ABCA'B'C' -$$
$$- \text{vol. } ABCDEF) = (\lambda + \mu + \nu) : (3 - \lambda - \mu - \nu).$$

Dacă valorile λ, μ și ν sînt date, pentru a fixa ideile, sub forma unor rapoarte de segmente, $\lambda = l' : l''$, $\mu = m' : m''$ și $\nu = n' : n''$, aceste rapoarte pot fi prezentate totdeauna sub forma $\lambda = l/p$, $\mu = m/p$ și $\nu = n/p$, unde l, m, n și p sînt segmente cunoscute. În virtutea egalităților (2), avem $\alpha = (m + n - l) : p$. Această egalitate ne permite să construim punctul D pe muchia AA', iar celelalte două egalități analoge determină punctul E pe muchia BB' și punctul F pe muchia CC'. Prin aceasta este construit și planul secant DEF.

574. Fie O un punct al secțiunii mediane a unui poliedru dat (fig. 141). Unindu-l cu toate vîrfurile poliedrului, căpătăm două piramide cu vîrful în O și ale căror baze sînt respectiv fețele $ABCDE$ și $KLMN$ ale poliedrului (raționamentele care urmează nu depind de numărul de laturi al bazelor) și un număr de piramide triunghiulare cu vîrful în același punct O și ale căror baze sînt situate în fețele laterale ale poliedrului considerat (de ex. $OKAB$); dacă fața laterală este un patrulater, atunci îi corespund două astfel de piramide (de ex., fetei $BCLK$ îi corespund piramidele $OBCK$ și $OCLK$, sau piramidele $OBCL$ și $OBKL$).

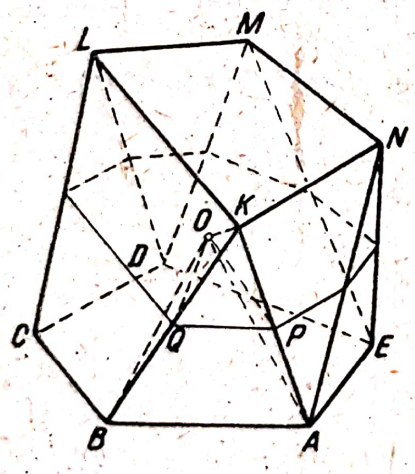


Fig. 141

Volumele piramidelor avînd ca baze baza superioară și baza inferioară ale poliedrului sînt respectiv egale cu $\frac{1}{6}hB$ și cu $\frac{1}{6}hB'$. Volumul fiecăreia dintre piramidele laterale, să zicem volumul piramidei $OKAB$, se poate afla astfel: deoarece aria $KAB = 4 \cdot$ aria KPQ, rezultă că vol. $OKAB = 4$ vol. $OKPQ = 4 \cdot \frac{1}{6}h \cdot$ aria OPQ. Adunarea volumelor tuturor piramidelor laterale ne dă, de aceea, $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot hB''$. De aici obținem formula generală

$$V = \frac{1}{6}h(B + B' + 4B'') \qquad (1)$$

pentru volumul poliedrului considerat.

Un caz particular al poliedrelor de forma considerată este trunchiul de piramidă. Dacă notăm cu x distanța de la planul bazei sale superioare pînă la punctul comun de intersecție al tuturor prelungirilor muchiilor laterale, vom avea (cf. nr. **393**, Cor.)

$$x : \left(x + \frac{1}{2}h\right) : (x + h) = \sqrt{B'} : \sqrt{B''} : \sqrt{B}$$

sau

$$(\sqrt{B} + \sqrt{B'}) : \sqrt{B''} = (2x + h) : \left(x + \frac{1}{2}h\right) = 2,$$

de unde $4B'' = (\sqrt{B} + \sqrt{B'})^2$. Substituind în membrul al doilea al formulei (1) această valoare pentru $4B''$, căpătăm expresia obișnuită

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

pentru volumul trunchiului de piramidă.

575. *Prima soluție.* Volumul poliedrului considerat se poate afla după formula dedusă în exercițiul 574. În cazul de față, avem $B = ab$; $B' = a'b'$; $4B'' = (a + a')(b + b')$, de unde obținem pentru volum expresia $\frac{1}{6}h(2ab + ab' + a'b + 2a'b')$.

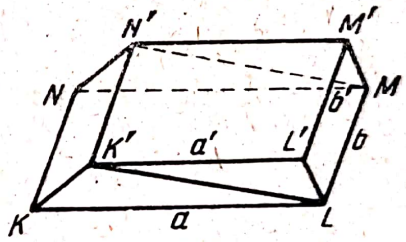


Fig. 142

A doua soluție. Volumul poliedrului dat $KLMNK'L'M'N'$ se poate afla ca sumă a volumelor celor două trunchiuri de prismă $KLK'NMN'$ și $K'LL'N'MM'$ (fig. 142). Ariile secțiunilor lor drepte sînt respectiv egale cu $\frac{1}{2}ah$ și $\frac{1}{2}a'h$; lungimile muchiilor laterale ale primei prisme sînt egale cu b, deci iarăși b și b'; lungimile muchiilor laterale ale celei de-a doua prisme sînt egale cu b', deci tot b' și b. De aici, conform nr. **409**, Cor., avem următoarea expresie pentru volumul căutat: $\frac{1}{6}ah(2b + b') + \frac{1}{6}a'h(b + 2b') =$

$= \frac{1}{6}h(2ab + ab' + a'b + 2a'b')$.

CARTEA A ȘAPTEA

DEPLASĂRI. SIMETRII. ASEMĂNARE.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL I

577. Dat fiind că în problemă este vorba numai despre direcțiile dreptelor, putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că dreptele D, D' și D'' sînt concurente într-un punct O.

Să notăm cu α unghiul dintre dreptele D și D', care este cel mult egal cu un unghi drept, și cu α' unghiul dintre dreptele D' și D'', de asemenea cel mult egal cu un unghi drept. Oricum am alege cele două unghiuri de rotație în jurul axelor D și D', unul dintre unghiurile β, formate de dreptele D și D'', va satisface condițiile

$$|\alpha - \alpha'| \leqslant \beta \leqslant \alpha + \alpha'. \qquad (1)$$

Dacă unghiul ascuțit dintre dreptele D și D_0 va fi mai mic decît $|\alpha - \alpha'|$, iar unghiul obtuz dintre aceleași drepte mai mare decît $\alpha + \alpha'$, atunci dreapta D'' nu va putea deveni paralelă cu D_0, oricare ar fi unghiurile de rotație.

Să presupunem acum că cel puțin unul dintre unghiurile β, formate de dreptele D și D_0 (sau ambele unghiuri), va satisface inegalitățile (1). În acest caz, vom duce prin punctul O dreapta D_0'', paralelă cu D_0, și vom nota cu D_0' o dreaptă care va face ca unul dintre triedrele formate de dreptele D, D_0' și D_0'' să aibă unghiurile plane egale cu α, α' și β, unde α să fie unghiul dintre muchiile D și D_0', α' unghiul dintre muchiile D_0' și D_0'', β unghiul dintre muchiile D_0 și D_0''. În acest caz, dreapta D_0' există, în virtutea condițiilor $\alpha \leqslant 1$ dr, $\alpha' \leqslant 1$ dr și a inegalităților (1), deoarece condițiile suficiente pentru existența unui triedru cu unghiurile plane date (**376** *bis*) sînt aici îndeplinite.

Unghiul primei rotații în jurul axei D va trebui acum astfel ales încît, după prima rotație, dreapta D' să coincidă cu dreapta D_0'. Această alegere este evident posibilă, deoarece dreapta D formează cu dreapta D' și cu dreapta D_0' un unghi egal cu α. Unghiul celei de-a doua rotații în jurul axei D', în noua ei poziție, adică în jurul axei D_0', va trebui apoi astfel ales, încît dreapta D'' să coincidă, după a doua rotație, cu dreapta D_0''. Evident, această alegere este posibilă, dat fiind că dreapta D_0' formează un unghi egal cu α' atît cu dreapta D'' (în poziția ei de după prima rotație), cît și cu dreapta D_0''. Așadar, după ambele rotații, dreapta D'' va coincide cu D_0'' și va fi, deci paralelă cu D_0.

Problema are soluţie pentru o dreaptă D_0 dată *arbitrar*, dacă inegalităţile (1) nu impun efectiv nici un fel de restricţii unghiului β, format de dreptele D şi D_0, adică dacă $\alpha = \alpha' = 1$ dr. Aşadar, axa D' trebuie să fie perpendiculară pe axa D, iar dreapta D'' perpendiculară pe axa D', pentru ca, cu ajutorul a două rotaţii consecutive în jurul axelor D şi D', dreapta D'' să poată deveni paralelă cu o dreaptă arbitrară D_0.

578. Deoarece în problemă este vorba numai despre *direcţiile* dreptelor, putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că dreptele D, D' şi D'' sînt concurente.

Să notăm cu α unghiul dintre dreptele D şi D', cel mult egal cu un unghi drept, iar cu α' unghiul dintre dreptele D' şi D'', de asemenea cel mult egal cu un unghi drept. Fie, mai departe, dreapta D_0 care, în figura dată S_0'', corespunde lui D'', ca dreaptă a figurii S''.

Din soluţia exerciţiului 577, reies următoarele rezultate: dacă unghiul ascuţit dintre dreptele D şi D_0 este mai mic decît $|\alpha - \alpha'|$, iar unghiul obtuz dintre aceleaşi drepte este mai mare decît $\alpha + \alpha'$, atunci, oricare ar fi unghiul de rotaţie în jurul axelor D şi D', dreapta D'' a figurii S'' nu poate deveni paralelă cu dreapta D_0 din figura S_0''; dacă însă unul dintre unghiurile β, formate de dreptele D şi D_0 (sau de ambele unghiuri), satisface condiţiile

$$|\alpha - \alpha'| \leqslant \beta \leqslant \alpha + \alpha', \tag{1}$$

atunci unghiurile de rotaţie în jurul axelor D şi D' pot fi astfel alese, încît dreapta D'' a figurii S'' să devină paralelă cu dreapta D_0 a figurii S_0''.

Alegînd unghiurile de rotaţie în jurul axelor D şi D' aşa cum s-a arătat mai sus, putem alege, evident, unghiul celei de-a treia rotaţii în jurul lui D'' (în noua poziţie a acestei drepte) astfel ca o anumită dreaptă L'' a figurii S'', distinctă de D'', să devină paralelă cu omoloaga ei L_0 din figura S_0''. În adevăr, dat fiind că figura S'' este egală cu figura S_0'', unghiul dintre dreptele D'' şi L'' este egal cu unghiul dreptelor D_0 şi L_0.

Aşadar, după trei rotaţii alese în mod corespunzător, cele două drepte D'' şi L'' ale figurii S'' vor fi paralele cu omoloagele lor D_0 şi L_0 din figura S_0''. Evident, în aceste condiţii, toate dreptele figurii S'' vor fi paralele cu dreptele care le corespund în figura S_0'', egală cu figura S''.

Problema are soluţie pentru o poziţie *arbitrară* a figurii S_0'' în spaţiu, dacă condiţiile (1) nu impun efectiv nici un fel de restricţii pentru direcţia dreptei D_0, adică dacă $\alpha = \alpha' = 1$ dr.

579. Fie de aflat rotaţia care transformă două puncte date A şi B respectiv în alte două puncte date A' şi B' (avem $AB = A'B'$). Să considerăm întîi cazul general, în care punctul A este distinct de A', punctul B de B', iar dreptele AA' şi BB' nu sînt paralele.

Să demonstrăm că, în acest caz, există o rotaţie care transformă punctul A în punctul A' şi punctul B în punctul B'. Pentru aceasta, ducem prin dreapta AA' un plan paralel cu dreapta BB' şi coborîm din punctul B şi B' perpen-

dicularele BC și $B'C'$ pe acest plan (fig. 143). În aceste condiții, vom avea egalități $BC = B'C'$ (deoarece dreapta BB' este paralelă cu planul construit) și $AC = A'C'$ (în virtutea egalității triunghiurilor dreptunghice ABC și $A'B'C'$). Segmentele AA' și CC' nu vor fi paralele, deoarece, altfel, ar fi paralele și segmentele AA' și BB'. În planul $AA'CC'$, găsim centrul O al rotației (**102**) care transformă punctele A și C respectiv în punctele A' și C'. Rotația în jurul dreptei care trece prin punctul O și este perpendiculară pe planul $AA'CC'$, care transformă punctul A în A', va fi tocmai rotația căutată. În adevăr, în virtutea alegerii punctului O, ea transformă și punctul C în punctul C', deci și punctul B în punctul B'. (Aceste construcții se simplifică, dacă dreptele AA' și BB' sînt situate în același plan: punctul C coincide cu punctul B, iar C' cu B'.)

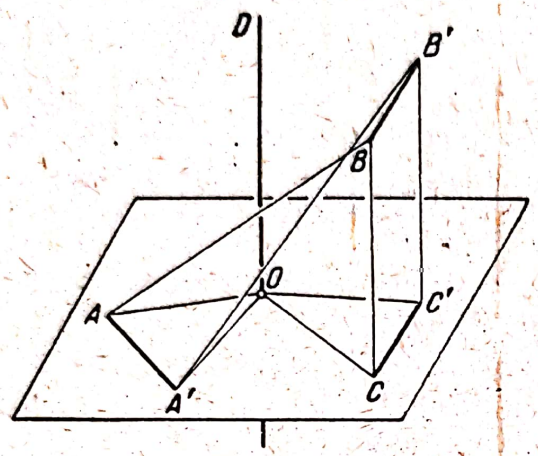


Fig. 143

Așadar, *dacă punctul A este distinct de A', iar B de B' și dreptele AA' și BB' nu sînt paralele* (însă $AB = A'B'$), *atunci există o rotație care transformă punctul A în A' și punctul B în B'.*

Pentru a demonstra unicitatea acestei rotații și, totodată, pentru a construi pe o cale mai simplă axa ei D, vom raționa în modul următor. Deoarece punctele A și A' sînt situate într-un plan perpendicular pe axa căutată și la distanțe egale de această axă, rezultă că toate punctele axei căutate D sînt egal depărtate de punctele A și A'. În consecință, axa D trebuie să fie situată în planul P, perpendicular prin mijlocul segmentului AA'. În virtutea aceleiași considerații, axa D trebuie să fie situată și în planul Q, perpendicular pe segmentul BB', prin mijlocul acestuia. Deoarece, prin ipoteză, dreptele AA' și BB' nu sînt paralele, planele P și Q au o dreaptă de intersecție perfect determinată, iar axa rotației căutate, care poate fi astfel ușor construită, poate fi numai această intersecție; unghiul de rotație este determinat de condiția ca rotația căutată să ducă punctul A în punctul A'.

Trecem acum la cazul în care segmentele AA' și BB' sînt paralele (și $AB = A'B'$). Aici sînt posibile următoarele trei ipoteze:

1) Segmentele egale AB și $A'B'$ nu sînt paralele (fig. 144 și 145). În acest caz, planele P și Q, despre care a fost vorba mai sus, coincid. Rotația care transformă punctul A în A' și punctul B în B' lasă fixă intersecția O a dreptelor AB și $A'B'$ (deoarece $OA = OA'$ și $OB = OB'$). Prin urmare, axa rotației căutate trebuie să treacă prin punctul O și să fie situată în planul P (care coincide cu Q). Reciproc, orice dreaptă satisfăcînd aceste două condiții va fi axa uneia dintre rotațiile căutate (deoarece ea este egal înclinată față de dreptele OA și OA'). Așadar, în acest caz, problema va fi nedeterminată.

Evident, aici putem introduce și cazul eliminat înainte din analiza noastră, cînd punctul A coincide cu A' și punctul B cu B'.

2) Segmentele egale AB și $A'B'$ sînt și paralele, iar unghiurile paralelogramului $AA'B'B$ nu sînt drepte. În acest caz, planele P și Q, despre care a fost vorba mai sus, sînt paralele, și problema nu are soluții.

3) Segmentele egale AB și $A'B'$ sînt iarăși paralele, însă paralelogramul $AA'B'B$ este un dreptunghi. În acest caz, planele P și Q, despre care a fost vorba mai sus, coincid. Axa oricărei rotații care transformă punctul A în A' și punctul B în B' trebuie să fie paralelă cu dreptele AB și $A'B'$. În adevăr, dacă A_0 este piciorul comun al perpendicularelor coborîte din punctele A și A' pe axa rotației căutate, iar B_0 piciorul comun al perpendicularelor coborîte din B și din B' pe aceeași axă, atunci $AA_0 = A'A_0$, $BB_0 = B'B_0$, $\widehat{AA_0A'} = \widehat{BB_0B'}$. Deoarece, în afară de aceasta, $AA' = BB'$, triunghiurile isoscele A_0AA' și B_0BB' sînt egale, de unde obținem $AA_0 = BB_0 = A'A_0 = B'B_0$. De aici rezultă că dreapta A_0B_0 este paralelă cu dreptele AB și $A'B'$. Așadar, axa rotației căutate trebuie să fie situată în planul P (care coincide cu Q) și să fie paralelă cu dreptele AB și $A'B'$. Reciproc, orice dreaptă care satisface aceste două condiții va fi, evident, axa uneia dintre rotațiile căutate. Prin urmare, în acest caz, problema va fi nedeterminată.

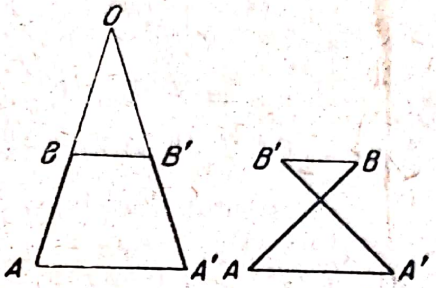


Fig. 144

Fig. 145

580. Deoarece axa rotației căutate trebuie să formeze unghiuri egale cu semidreptele OA și OA', ea trebuie să fie situată în planul P, care trece prin bisectoarea unghiului AOA' și este perpendicular pe planul acestui unghi. Dintr-un motiv analog, axa rotației căutate trebuie să se afle și în planul Q, care trece prin bisectoarea unghiului BOB' și este perpendiculară pe planul acestui unghi.

Dacă planele P și Q se intersectează după o dreaptă OM, această dreaptă va fi, după cum vom arăta mai jos, axa rotației căutate. În adevăr, triedrele $OMAB$ și $OMA'B'$ vor fi, în acest caz, egale sau simetrice (dată fiind egalitatea celor trei unghiuri plane). Prin urmare, vor fi egale și diedrele $A \cdot OM \cdot B$ și $A' \cdot OM \cdot B'$. Totodată, aceste diedre au același sens; în adevăr, dacă ele ar fi de sensuri contrare, diedrele $A \cdot OM \cdot A'$ și $B \cdot OM \cdot B'$ ar avea un plan bisector comun, și acest plan bisector comun ar coincide atît cu planul P, cît și cu planul Q (în virtutea egalităților $\widehat{MOA} = \widehat{MOA'}$; $\widehat{MOB} = \widehat{MOB'}$), astfel încît planele P și Q ar coincide.

Deoarece diedrele $A \cdot OM \cdot B$ și $A' \cdot OM \cdot B'$ sînt egale și au același sens, diedrele $A \cdot OM \cdot A'$ și $B \cdot OM \cdot B'$ vor fi de asemenea egale și de același sens. Totodată, în virtutea celor arătate mai sus, $\widehat{MOA} = \widehat{MOA'}$; $\widehat{MOB} = \widehat{MOB'}$, din care cauză rotația în jurul axei OM cu unghiul $A \cdot OM \cdot A'$ și avînd același sens suprapune efectiv semidreapta OA peste OA' și semidreapta OB peste OB'.

Pînă acum, am presupus că planele P și Q se taie după o dreaptă OM. Fie acum planele P și Q confundate. În acest caz, axa OM a rotației căutate trebuie, ca și înainte, să fie situată în planul P (care coincide cu Q). Vom arăta

că, în aceste condiții, planul P trece prin intersecția planelor OAB și $OA'B'$. Să notăm cu OK și cu OL bisectoarele unghiurilor plane AOA' și BOB', ambele situate în planul P (fig. 146). Triedrele $OBKL$ și $OB'KL$ sînt simetrice ($\widehat{KOL}$ comun, $\widehat{BOL} = \widehat{B'OL}$, $K\widehat{OL}\cdot B = K\widehat{OL}\cdot B' = 1$ dr), de unde $\widehat{KOB} = \widehat{KOB'}$ și $L\widehat{OK}\cdot B = L\widehat{OK}\cdot B'$. Mai departe, triedrele $OKAB$ și $OKA'B'$ sînt de asemenea simetrice ($\widehat{KOB} = \widehat{KOB'}$, $\widehat{KOA} = \widehat{KOA'}$, $A\widehat{OK}\cdot B = \text{dr} - L\widehat{OK}\cdot B = 1\text{ dr} - L\widehat{OK}\cdot B' = A'\widehat{OK}\cdot B'$), de unde obținem $K\widehat{OA}\cdot B = K\widehat{OA'}\cdot B'$.

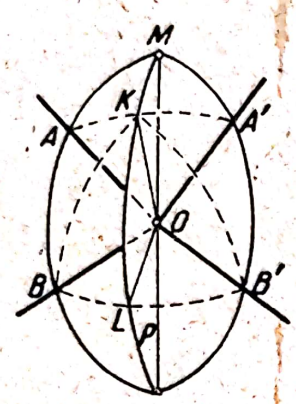


Fig. 146

Dacă vom nota acum cu OM intersecția planului P cu planul OAB, și cu OM' intersecția aceluiași plan P cu planul $OA'B'$ (nereprezentat în figură), vom avea două triedre simetrice $OKAM$ și $OKA'M'$ ($\widehat{KOA} = \widehat{KOA'}$; $\widehat{A\cdot OK\cdot M} = \widehat{A'\cdot OK\cdot M'} = 1$ dr, $\widehat{K\cdot O\cdot A\cdot M} = 180° - \widehat{K\cdot OA\cdot B} = 180° - \widehat{K\cdot OA'\cdot B'} = \widehat{K\cdot OA\cdot M'}$), de unde avem $\widehat{KOM} = \widehat{KOM'}$ și $\widehat{MOA} = \widehat{M'OA'}$. Egalitatea $\widehat{KOM} = \widehat{KOM'}$ arată că dreapta OM' coincide cu OM, deoarece dreapta de intersecție a planelor OAB și $OA'B'$, se situează în planul P.

Egalitatea $\widehat{MOA} = \widehat{M'OA'}$, adică $\widehat{MOA} = \widehat{MOA'}$, și egalitatea $\widehat{MOB} = \widehat{MOB'}$, care rezultă din ea (în baza condiției $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$), arată că rotația în jurul axei OM cu un unghi egal cu $A\widehat{OM}\cdot A'$ și de același sens duce semidreapta OA în OA' și semidreapta OB în OB'.

În consecință, dacă planele P și Q, despre care a fost vorba mai sus, coincid, atunci axa rotației căutate este dreapta de intersecție a planelor OAB și $OA'B'$.

În acest din urmă caz, nu există alte drepte ale planului P, distincte de OM, care să poată servi ca axe ale rotației căutate. În adevăr, pentru o dreaptă ON, situată în planul P și distinctă de OM, unghiurile $A\cdot ON\cdot A'$ și $B\cdot ON\cdot B'$ nu pot fi egale ca mărime și de același sens.

581. Fie A un punct al figurii F; A' omologul său din figura F'; F'' figura obținută din F cu ajutorul translației T, care transformă punctul A în A'. Deoarece punctul A' al figurii F'' coincide, evident, cu omologul său din figura F', rezultă că, prin ipoteză figura F' se obține din F'' cu ajutorul unei rotații în jurul unei axe D. Dreptelor paralele cu D din figura F le corespund, în figura F'', drepte de asemenea paralele cu D (deoarece F'' se obține din F printr-o translație), iar acestor din urmă drepte le corespund, în figura F', iarăși drepte paralele cu axa de rotație D. Așadar, dreptele figurii F, paralele cu dreapta D, sînt paralele cu omoloagele lor din figura F'.

Fie acum P un plan al figurii F, perpendicular pe dreapta D. Planul P', care îi corespunde în figura F', este de asemenea perpendicular pe dreapta D,

Scanned with OKEN Scanner

şi, deci, paralel cu planul P. Notînd cu f partea din figura F situată în planul P şi cu f' partea figurii F', situată în planul P', proiectăm figura f' pe planul P într-o nouă figură f_0. Figurile f' şi f_0 vor fi egale, deoarece planele P şi P', care conţin aceste figuri, sînt paralele. Prin urmare, figurile f şi f_0 sînt de asemenea egale, deoarece figurile f şi f' sînt egale.

Figurile f şi f_0 nu sînt numai egale, ci au şi acelaşi sens de rotaţie. În adevăr, figura f şi figura f'', obţinută din ea prin translaţia T, despre care a fost vorba mai sus, au acelaşi sens de rotaţie. Figurile f'' şi f' au de asemenea acelaşi sens de rotaţie, deoarece prima se transformă în a doua printr-o rotaţie în jurul dreptei D. În sfîrşit, şi figurile f' şi f_0 au acelaşi sens de rotaţie. De aici rezultă că figurile f şi f_0 au acelaşi sens de rotaţie.

Două figuri egale f şi f_0, situate în acelaşi plan P, se obţin una din cealaltă, în cazul general, printr-o rotaţie în jurul unui punct O al acestui plan (**102**), sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, printr-o rotaţie în jurul unei axe D_0, care trece prin punctul O şi este perpendiculară pe planul P. Figurile f_0 şi f' se obţin una din cealaltă printr-o proiecţie ortogonală, adică printr-o translaţie după direcţia dreptei D_0. Aşadar, figura f' se obţine din figura f printr-o deplasare elicoidală de axă D_0.

Deoarece deplasarea în spaţiu a unei figuri este complet determinată de deplasarea în spaţiu a trei dintre punctele ei necoliniare (**410**), înseamnă că deplasarea elicoidală care transformă figura f în f' transformă şi figura dată F în F'.

Am presupus mai sus că figura f_0 se obţine din f printr-o rotaţie. Dacă figura f_0 s-ar obţine din f printr-o translaţie, atunci şi figura f' s-ar obţine din f cu ajutorul unei translaţii, deoarece figura f' se obţine întotdeauna din f_0 printr-o translaţie, iar deplasarea rezultantă a două translaţii este tot o translaţie. Prin urmare, şi figura F' se obţine din F printr-o translaţie, care este un caz particular al deplasării elicoidale.

582. La o translaţie, rămîn pe loc numai dreptele paralele cu direcţia translaţiei. La o rotaţie cu un unghi diferit de 180°, precum şi la o deplasare elicoidală dinstinctă de o translaţie şi de o rotaţie, rămîn pe loc numai axa de rotaţie sau axa deplasării elicoidale. În sfîrşit, la o transpoziţie (rotaţia în jurul unei axe cu 180°), rămîn pe loc, în afara axei, şi toate dreptele care intersectează axa sub un unghi drept.

De aici rezultă imediat că deplasările care lasă pe loc o dreaptă dată vor fi toate deplasările elicoidale avînd ca axă dreapta dată, inclusiv toate rotaţiile în jurul ei şi toate translaţiile în direcţia ei, precum şi toate transpoziţiile în raport cu drepte care intersectează dreapta dată sub un unghi drept.

583. În soluţia exerciţiului 579, s-a arătat că, în general, există o singură rotaţie care transformă două puncte date A şi B în două puncte date arbitrare A' şi B', care satisfac condiţia $AB = A'B'$. Aceste rotaţii nu există, numai dacă segmentele egale AB şi $A'B'$ sînt paralele între ele şi de acelaşi sens, iar unghiurile paralelogramului $AA'B'B$ nu sînt drepte. În alte cîteva cazuri, există o infinitate de astfel de rotaţii.

Să alegem acum pe două drepte date D şi D' cîte un punct A şi A'. Să luăm apoi, pe prima dreaptă, segmentul arbitrar AB, iar pe a doua (în acelaşi sens sau în celălalt) segmentul $A'B'$ luat din punctul A' şi egal cu AB. Rota-

Scanned with OKEN Scanner

ția care transformă punctul A în A' și punctul B în B' va fi tocmai una dintre rotațiile căutate. Vom avea o infinitate de astfel de rotații, deoarece, lăsînd pe loc punctul A și variind poziția punctului A', vom obține, evident, rotații diferite (în cazul în care dreptele D și D' sînt paralele, iar segmentele AB și $A'B'$ luate în același sens, punctul A' nu poate fi ales arbitrar, deoarece segmentul AA' trebuie să fie perpendicular pe dreptele D și D'; și în acest caz însă, există o infinitate de rotații din cele căutate; compară cu ex. 579).

Axele acestor rotații coincid cu dreptele pe care, în exercițiul 454, le-am notat cu G_1 și cu G_2; în adevăr, atît unele, cît și celelalte se determină exact în același mod. Fiecare dreaptă de acest fel este intersecția unui plan perpendicular pe segmentul AA' și care trece prin mijlocul său, cu un plan analog construit pentru segmentul BB' (v. soluțiile ex. 454 și ex. 579).

Transpozițiile care transformă dreptele date D și D' una în cealaltă se găsesc ușor în mod direct, pe baza următoarelor considerații. Perpendiculara comună dreptei D și axei A a transpoziției căutate va fi, totodată, perpendiculară comună pentru dreapta D' și pentru axa A a transpoziției. Distanțele cele mai mici ale axei A a transpoziției la dreptele D și D' sînt egale. Altfel spus, axa A a transpoziției căutate taie sub un unghi drept perpendiculara comună a dreptelor D și D', în mijlocul acesteia. Totodată, dreptele D și D' formează unghiuri egale cu axa A.

De aici rezultă următoarea construcție a axelor transpozițiilor căutate. Prin mijlocul perpendicularei comune dreptelor D și D', ducem drepte paralele cu ele; bisectoarele Δ_1 și Δ_2 ale unghiurilor formate de aceste din urmă drepte vor fi tocmai axele celor două transpoziții căutate. Dacă alegem pe fiecare dintre cele două drepte D și D' un anumit sens pozitiv, transpoziția în raport cu una dintre aceste drepte, să zicem în raport cu Δ_1, transformă sensul pozitiv de pe dreapta D în sensul pozitiv de pe dreapta D', iar transpoziția în raport cu Δ_2 transformă sensul pozitiv de pe dreapta D în sensul negativ de pe dreapta D'.

Dacă dreptele date se taie, axele celor două transpoziții vor fi bisectoarele unghiurilor formate de ele. În sfîrșit, dacă dreptele date D și D' sînt paralele, atunci toate cele arătate mai sus se pot aplica (cu mici modificări) fiecăreia dintre perpendicularele lor comune. Axele transpozițiilor care transformă două drepte paralele D și D' una în cealaltă va fi dreapta D_0, situată în același plan cu dreptele D și D' și egal depărtată de ele, precum și toate dreptele care intersectează dreapta D_0 și sînt perpendiculare pe planul care conține dreptele D și D'.

Observație. Din soluția de mai sus a problemei noastre rezultă următoarea precizare a enunțului problemei:

Există o infinitate de rotații care transformă o dreaptă dată D într-o altă dreaptă D', astfel ca un sens dat pe dreapta D să se transforme într-un sens dinainte fixat pe dreapta D'. Printre aceste rotații există, în general, o transpoziție.

Rezultă din faptul că segmentul $A'B'$, despre care este vorba în soluție, poate fi luat pe dreapta D' de o parte sau de cealaltă a punctului A'.

584. Să admitem, pentru a fixa ideile, că am ales pe fiecare dintre dreptele date D și D' un sens pe care-l vom numi *pozitiv*.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că deplasarea elicoidală avînd ca axă o dreaptă A_1 (sau A_2) transformă dreapta dată D în cealaltă dreaptă dată D', astfel ca sensul pozitiv al dreptei D să se transforme în sensul pozitiv al dreptei D' (sau, respectiv în sensul negativ al acesteia). Deoarece axa A_1 (sau A_2) rămîne pe loc (şi-şi păstrează orientarea) în această deplasare, unghiul format de sensul pozitiv al dreptei D şi de oricare dintre sensurile axei A_1 (sau A_2) este egal cu unghiul dintre sensul pozitiv (respectiv negativ) al dreptei D' şi acelaşi sens al axei A_1 (sau A_2).

Aşadar, axa A_1 formează unghiuri egale cu sensurile pozitive ale dreptelor D şi D', iar axa A_2 unghiuri egale cu sensul pozitiv al dreptei D şi cu sensul negativ al dreptei D'. Dacă *aceste unghiuri egale nu sînt drepte*, atunci axa A_1 este paralelă (compară soluţia ex. 454, Obs.) cu una dintre dreptele G_1, iar axa A_2 cu una dintre dreptele G_2, despre care este vorba la ex. 454. În virtutea celor arătate în soluţia exerciţiului 583, axa deplasării elicoidale considerate este paralelă cu axa uneia dintre rotaţiile considerate acolo.

Însă axa A a deplasării elicoidale considerate poate forma şi unghiuri drepte cu cele două drepte date D şi D'. În adevăr, putem alege ca axă A, de exemplu, perpendiculara comună acestor drepte. În acelaşi timp, în cazul în care dreptele D şi D' nu sînt nici concurente nici paralele, nici o *rotaţie* în jurul unei axe perpendiculare pe ambele drepte nu va putea să le suprapună una peste cealaltă, deoarece, în cazul acestor rotaţii, ambele drepte date rămîn în două plane determinate, perpendiculare pe axa rotaţiei.

Aşadar, axa uneia dintre deplasările elicoidale care transformă dreapta D în dreapta D' nu este paralelă cu nici una dintre axele rotaţiilor despre care a fost vorba la exerciţiul 583, dacă ea este perpendiculară pe ambele drepte date şi dacă aceste drepte nu sînt situate în acelaşi plan.

Trecem la aflarea locului geometric al acelora dintre axele A ale deplasărilor elicoidale considerate, care au o direcţie dată.

1) Să găsim direct locul geometric al axelor A_1, paralele cu o dreaptă G_1 dată (consideraţii analoge se aplică şi axelor paralele cu una dintre dreptele G_2). Fie axa A_1, care intersectează un plan P, perpendicular pe această axă în punctul O. Să notăm cu d şi cu d' proiecţiile dreptelor D şi D' pe planul P şi să alegem ca sens pozitiv pe dreptele d şi d' proiecţiile sensurilor pozitive ale dreptelor D şi D'. Perpendicularele comune ale axei A_1 cu fiecare dintre dreptele date D şi D' sînt egale. Pe planul P, aceste două perpendiculare se proiectează în mărime naturală, şi anume în drepte respectiv perpendiculare pe d şi pe d' (deoarece un unghi drept se proiectează pe un plan paralel cu una dintre laturile sale de asemenea sub un unghi drept; compară nr. **363**). De aici rezultă că punctul O este egal depărtat de dreptele d şi d' şi, de aceea, este situat pe una dintre bisectoarele δ ale unghiurilor formate de aceste drepte. Dat fiind că o deplasare elicoidală de axă A_1 face să coincidă sensul pozitiv al dreptei D cu sensul pozitiv al dreptei D', rotaţia cu un unghi corespunzător în planul P în jurul punctului O va face să coincidă sensul pozitiv al dreptei d cu sensul pozitiv al dreptei d', astfel că bisectoarea δ taie în părţi egale unghiul format de sensul pozitiv al uneia dintre dreptele d şi d' cu sensul negativ

al celeilalte (fig. 147). Reciproc, din faptul că rotația cu un unghi ales în mod corespunzător în jurul unui punct O al dreptei δ duce dreapta d în dreapta d', astfel ca sensul pozitiv al dreptei d să coincidă cu sensul pozitiv al dreptei d', rezultă existența unei deplasări elicoidale determinate, a cărei axă este perpendiculara în punctul O pe planul P și care transformă dreapta D în dreapta D'.

Așadar, locul geometric al axelor deplasărilor elicoidale având o direcție dată, anume paralele cu dreptele G_1, este un plan, care trece prin dreapta δ și este paralel cu o dreaptă G_1 dată. Avem o proprietate analogă și pentru axele paralele cu una dintre dreptele G_2.

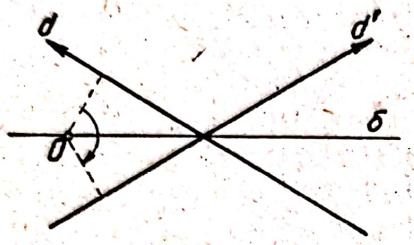


Fig. 147

Acest raționament necesită o anumită modificare, dacă căutăm locul geometric al axelor paralele cu perpendiculara comună celor două drepte. În adevăr, perpendiculara comună celor două drepte formează atît unghiuri egale cu sensurile pozitive ale dreptelor D și D' (analog cu dreptele G_1), cît și unghiuri egale cu sensul pozitiv al uneia dintre aceste drepte și cu sensul negativ al celeilalte. Cu ajutorul deplasării elicoidale având ca axă perpendiculara comună celor două drepte date, putem face să coincidă, evident, sensul pozitiv al dreptei D atît cu sensul pozitiv al dreptei D', cît și cu sensul ei negativ. Alegînd una dintre aceste două ipoteze și reluînd raționamentul de mai sus, vom obține ca loc geometric al axelor deplasărilor elicoidale considerate un plan.

Așadar, locul geometric al axelor deplasărilor elicoidale considerate, care sînt paralele cu perpendiculara comună celor două drepte date, este o pereche de plane: axele situate în unul dintre cele două plane aparțin deplasărilor elicoidale care transformă sensul pozitiv al unei drepte în sensul pozitiv al celeilalte; celălalt plan conține axele deplasărilor elicoidale care transformă sensul pozitiv al primei drepte în sensul negativ al celeilalte.

2) Putem ajunge la aceleași rezultate, folosind și descompunerea deplasării elicoidale în două transpoziții.

Fie A_1 iarăși axa uneia dintre deplasările elicoidale care transformă dreapta D în dreapta D' și sensul pozitiv al dreptei D în sensul pozitiv al dreptei D'. Să descompunem această deplasare elicoidală în două transpoziții, luînd ca axă a primei transpoziții perpendiculara comună dreptelor D și A_1; prin aceasta, axa celei de-a doua transpoziții este determinată (**416**).

Transpoziția în raport cu prima dintre aceste axe, care taie dreapta D sub un unghi drept, transformă această dreaptă în ea însăși (ex. 582), sensul pozitiv trecînd în cel negativ. Prin urmare, a doua transpoziție transformă dreapta D în dreapta D', astfel că sensul pozitiv al dreptei D trece în sensul negativ al dreptei D'. Din soluția exercițiului 583, rezultă că axa celei de-a doua transpoziții va fi dreapta notată acolo cu Δ_2. Însă axa A_1 a deplasării elicoidale; considerate taie axele ambelor transpoziții, deci și dreapta Δ_2, sub un unghi drept. Reciproc, dacă o dreaptă A_1 taie sub un unghi drept dreapta Δ_2, există o deplasare elicoidală de axă A_1, care transformă dreapta D în dreapta D' și sensul pozitiv al dreptei D în sensul pozitiv al dreptei D'.

Scanned with OKEN Scanner

Această deplasare elicoidală va fi rezultanta a două transpoziţii: una în raport cu perpendiculara comună dreptelor D şi A_1 şi una în raport cu dreapta Δ_2.

Aşadar, axele tuturor deplasărilor elicoidale care transformă dreapta D în dreapta D', astfel ca sensul pozitiv al dreptei D să treacă în sensul pozitiv al dreptei D', intersectează dreapta Δ_2 sub un unghi drept. Analog, axele deplasărilor elicoidale pentru care sensul pozitiv al dreptei D este transformat în sensul negativ al dreptei D' taie sub un unghi drept dreapta Δ_1 (ex. 583).

De aici se obţin direct rezultatele date mai sus, referitoare la axele considerate avînd o direcţie dată.

585. Să presupunem că, în oricare dintre deplasările considerate, unui punct dat A îi corespunde un alt punct dat A'. Să notăm cu P un plan perpendicular pe direcţia axelor deplasărilor elicoidale considerate, iar cu A_0 şi cu B_0 proiecţiile punctelor A şi B pe planul P. Dacă O este punctul de intersecţie al uneia dintre axele considerate cu planul P, trebuie să avem $OA_0 = OB_0$.

Din ultima egalitate, rezultă că locul geometric al punctelor O din planul P este o dreaptă perpendiculară pe segmentul A_0B_0 şi care trece prin mijlocul său, iar locul geometric al axelor considerate este planul perpendicular pe mijlocul segmentului A_0B_0.

586. Fie de construit axa unei deplasări elicoidale cunoscînd un punct O al ei, mărimea t a translaţiei şi două puncte A şi A', care se corespund în această translaţie. Să notăm cu A_0 proiecţia punctului A' pe planul care trece prin punctul A şi este perpendicular pe axa căutată. Segmentul l, egal cu AA_0, poate fi construit ca o catetă a triunghiului dreptunghic avînd ipotenuza AA' şi cealaltă catetă $A'A_0 = t$.

Punctul A_0 aparţine locului geometric al punctelor situate la distanţa l de punctul A şi la distanţa t de punctul A'. Acest loc geometric este, evident, un cerc C avînd centrul pe dreapta AA' şi situat într-un plan P, perpendicular pe AA'. Atît planul P, cît şi cercul C se pot construi uşor. În acest scop, construim, într-un plan arbitrar care trece prin dreapta AA', un triunghi dreptunghic avînd ca ipotenuză segmentul AA' şi catetele l şi t (cateta t porneşte din vîrful A'); prin vîrful unghiului drept al acestui triunghi, ducem un plan P, perpendicular pe dreapta AA' etc.

Mai departe, punctul A_0 se află la distanţa OA de punctul O, deoarece punctele A şi A_0 sînt situate într-un plan perpendicular pe axa căutată şi la distanţe egale de aceasta. Prin urmare, punctul A_0 aparţine cercului C', locul geometric al punctelor planului P avînd distanţa OA de punctul O (compară cu nr. **344**)[1]. Acest loc geometric se construieşte de asemenea fără dificultate.

Dacă locurile geometrice C şi C' există (ceea ce va fi cazul dacă segmentul t este mai mic decît segmentul AA', iar distanţa OA mai mare decît distanţa punctului O la planul P), problema are două soluţii, cu condiţia ca cercurile C şi C' să fie secante, şi o singură soluţie, dacă cercurile sînt tangente. Problema are o singură soluţie şi în cazul în care cercul C' se reduce la un punct (distanţa OA este egală cu distanţa punctului O la planul P) şi acest punct se află pe cercul C. În celelalte cazuri, problema nu are soluţii.

[1]) Folosind noţiunea de sferă, putem spune, evident, că punctul A_0 căutat se determină ca punct de intersecţie a trei sfere, anume sfera cu raza l şi centrul A, sfera cu raza t şi centrul A' şi sfera cu raza OA şi centrul O.

Scanned with OKEN Scanner

Am presupus că mărimea t a translației este diferită de zero; dacă $t = 0$, deplasarea elicoidală se reduce la o rotație. În aceste condiții, problema nu are soluții pentru $OA \neq OA'$ și are o infinitate de soluții pentru $OA = OA'$; în acest din urmă caz, va fi axă de rotație orice dreaptă care trece prin punctul O și este perpendiculară pe segmentul AA'.

587. Să presupunem că o deplasare dată trebuie descompusă în două rotații, dintre care prima să aibă ca axă o dreaptă AB dată. Să notăm cu A și cu B două puncte arbitrare ale acestei drepte, cu C un punct arbitrar exterior dreptei, iar cu A', B' și C' punctele omoloage lui A, B și C în deplasarea considerată.

Deoarece punctele A și B sînt situate pe axa primei rotații căutate, ele rămîn pe loc în cadrul acestei rotații. Prin urmare, a doua rotație transformă punctele A și B în punctele A' și B'. Prin această proprietate, a doua rotație este, în general, pe deplin determinată (compară cu soluția ex. 579). Să notăm, mai departe, cu C_0 punctul care se transformă în punctul C', găsit în a doua rotație. Deoarece triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt egale, ca și triunghiurile $A'B'C_0$ și $A'B'C'$, rezultă că și triunghiurile ABC și ABC_0 vor fi egale. De aceea, există o rotație în jurul axei AB, care transformă punctul C în punctul C_0. Această rotație va fi prima dintre rotațiile căutate.

Se verifică ușor că deplasarea rezultantă a celor două rotații astfel aflate coincide efectiv cu cea dată; în adevăr, prima rotație transformă punctele A, B și C în punctele A, B și C_0, iar a doua, punctele A, B și C_0 în punctele A', B' și C'. Deplasarea rezultantă transformă punctele A, B și C în punctele A', B' și C'. Deoarece același lucru se întîmplă și cu deplasarea inițială, cele două deplasări coincid (compară cu **410**).

Teorema va admite o excepție, dacă nu există o rotație care să transforme punctele A și B în punctele A' și B' (aceasta nu depinde de alegerea arbitrară a diverselor puncte A și B pe axa dată a primei rotații), adică dacă patrulaterul $ABB'A'$ este un paralelogram fără unghiuri drepte (v. soluția ex. 579). În acest caz, deplasarea considerată nu poate fi descompusă în două rotații, dintre care prima să aibă ca axă dreapta dată.

Dacă deplasarea considerată este o translație, excepția va avea loc, cu condiția ca axa dată să nu fie perpendiculară pe direcția translației. Dacă deplasarea considerată este o rotație, teorema este adevărată fără nici o excepție. În sfîrșit, dacă deplasarea considerată este elicoidală, fără a se reduce nici la o translație, nici la o rotație, teorema nu este adevărată pentru dreptele AB paralele cu axa deplasării elicoidale.

În unele cazuri, descompunerea cerută se poate realiza într-o infinitate de moduri. Aceasta se va întîmpla atunci cînd există o infinitate de rotații care transformă punctul A în A' și punctul B în B' (compară cu soluția ex.579).

588. Deplasarea elicoidală dată, a cărei axă o vom nota cu D, poate fi descompusă (**416**) în două transpoziții în raport cu axele D_1 și D_2, care taie axa D sub un unghi drept. În aceste condiții, una dintre cele două axe D_1 și D_2, să zicem D_2, poate fi aleasă de altfel arbitrar. Analog, orice translație T, paralelă cu o dreaptă dată D', poate fi descompusă în două transpoziții în raport cu axele D_1' și D_2', paralele între ele și perpendiculare pe dreapta D', una dintre axele D_1' și D_2' — să zicem D_1' — putînd fi aleasă și ea de altfel arbitrar.

Să alegem acum astfel axa D_2, încît ea să taie dreapta D sub un unghi drept şi, în acelaşi timp, să fie perpendiculară pe dreapta D', şi să luăm această dreaptă D_2 ca axă D_1'. Transpoziţiile în raport cu dreptele D_2 şi D_1', care coincid, dau o identitate, şi rezultanta deplasării elicoidale date şi a translaţiei T va fi echivalentă cu două transpoziţii consecutive în raport cu axele D_1' şi D_2'. Ambele drepte vor fi perpendiculare pe dreapta D, prima în virtutea celor spuse mai sus, a doua ca dreaptă paralelă cu D_2, perpendiculară pe D. Deoarece axa deplasării rezultante a celor două transpoziţii în raport cu axele D_1 şi D_2' este perpendiculara comună a acestor două drepte, axa considerată va fi întotdeauna paralelă cu dreapta D.

Dacă variem mărimea translaţiei T, dreapta D_1 va rămîne pe loc. În consecinţă, locul geometric al axelor deplasărilor rezultante va fi planul care trece prin dreptele D şi D_1 (îl vom obţine ducînd, prin toate punctele dreptei D_1, paralele la axa D).

Deplasarea rezultantă va fi o rotaţie, dacă axele D_1 şi D_2' vor fi concurente. Deoarece, cînd mărimea translaţiei T variază, axa D_1 rămîne pe loc, iar dreapta D_2' se deplasează paralel cu ea însăşi în planul P, care trece prin dreapta D_1' (care coincide cu D_2) şi este paralel cu dreapta D', intersecţia dreptelor D_1 şi D_2' va avea loc, în general, numai într-un singur caz, anume dacă dreapta D_2' trece prin intersecţia dreptei D_1 cu planul P. Aşadar, în general, printre deplasările rezultante vom avea o rotaţie.

Raţionamentele de mai sus îşi pierd valabilitatea, dacă dreapta D' este paralelă cu D. În acest caz însă, axa deplasării rezultante coincide cu D, oricare ar fi valoarea translaţiei T.

589. Să presupunem că o rotaţie dată în raport cu axa D se compune cu o rotaţie în jurul axei date D', care intersectează axa D în punctul O. Să descompunem prima rotaţie în două transpoziţii faţă de axele D_1' şi D_2, care trec prin punctul O, iar a doua în două transpoziţii faţă de axele D_1' şi D_2', de asemenea concurente în punctul O. Atît ca axă D_2, cît şi ca axă D_1' vom lua perpendiculara în punctul O pe dreptele D şi D'. În acest caz, transpoziţiile în raport cu axele coincidente D_2 şi D_1' dau identitatea, iar transpoziţiile în raport cu axele D_1 şi D_2' dau o rotaţie rezultantă în raport cu o nouă axă D_0, perpendiculară pe aceste două axe şi care trece prin punctul O.

Dacă facem să varieze unghiul celei de-a doua rotaţii, dreapta D_1 rămîne pe loc, pe cînd dreapta D_2' descrie un plan perpendicular pe dreapta D'. În aceste condiţii, dreapta D_0 descrie un plan perpendicular pe dreapta D_1 (şi care trece, de aceea, prin dreapta D). Acest plan va fi tocmai locul geometric căutat.

590. Să notăm cu D axa rotaţiei date, cu D' axa celei de-a doua rotaţii şi cu O intersecţia lor. Să descompunem fiecare dintre cele două rotaţii în cîte două transpoziţii, aşa cum am procedat la exerciţiul 589.

Pentru ca deplasarea rezultantă a celor două rotaţii date, adică rezultanta celor două transpoziţii în raport cu axele D_1 şi D_2', să fie o transpoziţie, este necesar ca axele D_1 şi D_2' să se taie sub un unghi drept în punctul O. Deoarece axa D_2' trebuie să fie, totodată, perpendiculară pe axa D', poziţia axei D_2' este complet determinată. Axele D_1' (care coincide cu perpendiculara comună dreptelor D şi D') şi D_2' determină unghiul celei de-a doua rotaţii.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul mai general, cînd unghiul rotației rezultante trebuie să aibă o mărime dată, axa D_2' trebuie să satisfacă următoarele condiții: să fie situată în planul perpendicular pe dreapta D' în punctul O, să treacă prin acest punct O și să formeze cu dreapta D_1 un unghi egal cu jumătatea unghiului de rotație dat. Construcția acestei drepte este dată în soluția exercițiului 465. Axele D_1' și D_2' determină unghiul celei de-a doua rotații.

591. Să notăm cu D axa deplasării elicoidale date și cu D' axa dată a celei de-a doua deplasări. Să descompunem deplasarea noastră elicoidală în două transpoziții în raport cu axele D_1 și D_2, luînd ca axă D_2 perpendiculara comună dreptelor D și D'. A doua deplasare se poate obține, în acest caz, ca deplasare rezultantă a transpoziției în raport cu axa D_2 și a transpoziției în raport cu o nouă axă D_3, care taie pe D' sub un unghi drept. Deplasarea rezultantă a celor două deplasări considerate va fi echivalentă, în acest caz, cu două transpoziții succesive în raport cu axele D_1 și D_3.

Pentru ca deplasarea rezultantă să fie o transpoziție, axele D_1 și D_3 trebuie să se taie sub un unghi drept. Cu alte cuvinte, trebuie să alegem ca axă D_3 perpendiculara comună dreptelor D_1 și D'. Poziția dreptelor D_2 și D_3 determină complet cea de-a doua deplasare.

592. Fie D și D' axele celor două rotații, nesituate în același plan, M și N punctele de intersecție ale acestor drepte cu perpendiculara lor comună. Să descompunem prima rotație în două transpoziții în raport cu o axă D_1, care trece prin punctul M, și în raport cu axa MN, iar a doua în două transpoziții în raport cu axa MN și în raport cu o axă D_2, care trece prin punctul N. În acest caz, axele D_1 și D_2 vor fi respectiv perpendiculare pe dreptele D și D'. Nici una dintre aceste două drepte nu va coincide cu MN, deoarece ambele unghiuri de rotație sînt diferite de zero. Dreptele D_1 și D_2 nu se află în același plan, deoarece, altfel, axele D și D' ar fi paralele.

Rezultanta celor două rotații va fi, totodată, rezultanta celor două transpoziții în raport cu axele D_1 și D_2; ea nu poate fi o rotație, deoarece axele celor două transpoziții nu sînt situate în același plan.

593. La o translație T, rămîn fixe numai planele paralele cu direcția acestei translații; celelalte plane se transformă în plane paralele cu cele inițiale.

La o rotație R, de unghi diferit de 0 și de 180°, rămîn pe loc numai planele perpendiculare pe axă; celelalte plane se transformă în plane neparalele cu primele.

Să descompunem acum deplasarea elicoidală dată într-o translație T, după direcția axei, și într-o rotație R față de această axă. Prin ipoteză, mărimea translației T va fi diferită de zero, iar unghiul rotației R va fi diferit de zero și de 180°.

Planul P, perpendicular pe axa deplasării elicoidale, este transformat de translația T într-un nou plan P', de asemenea perpendicular pe axă, iar acest din urmă plan P' rămîne pe loc în cadrul rotației R. Planul Q, neperpendicular pe axa deplasării elicoidale, este transformat de translația T, fie în el însuși, fie într-un plan Q', paralel cu Q; rotația R transformă apoi planul Q sau Q' într-un nou plan, care nu mai este paralel cu Q. De aici rezultă că nici un plan nu rămîne pe loc în cadrul deplasării elicoidale considerate.

Observație. Dacă unghiul de rotație al mișcării elicoidale este de 180°, rămîn pe loc toate planele care trec prin axă.

Scanned with OKEN Scanner

594. Fie de dus, printr-un punct M, două drepte D şi D', astfel ca o deplasare dată să trasforme dreapta D în D'.

Deoarece punctul M se află pe dreapta D, punctul M', omologul lui M în deplasarea considerată, este situat pe dreapta D'. De aceea, dreapta D' coincide cu dreapta MM'; prin aceasta, dreapta D este determinată.

Dacă punctul M' coincide cu M, problema devine nedeterminată: putem alege ca dreaptă D orice dreaptă care trece prin M.

595. Fie de aflat, într-un plan P dat, două drepte D şi D', astfel ca o deplasare dată să transforme dreapta D în D'.

Deoarece dreapta D este situată în planul P, dreapta D' va fi situată în planul P', care corespunde planului P în deplasarea considerată. De aceea, dreapta D' este intersecţia planelor P şi P'; astfel, dreapta D este determinată.

Dacă planul P' este paralel cu planul P, problema nu are soluţii. Dacă P' coincide cu P, problema devine nedeterminată; putem alege ca dreaptă D orice dreaptă din planul P.

596. Fie de construit, de exemplu, un unghi poliedru cu cinci feţe $SABCDE$, ştiind că bisectoarele unghiurilor sale plane ASB, BSC, CSD DSE şi ESA sînt respectiv dreptele date Sa, Sb, Sc, Sd şi Se (soluţia noastră nu depinde de numărul de feţe ale unghiului poliedru căutat).

Transpoziţia în raport cu dreapta dată Sa transformă muchia SA a unghiului poliedru căutat în muchia SB; transpoziţia în raport cu a doua dreaptă dată Sb transformă muchia SB în SC etc. De aici rezultă că, supunînd semidreapta SA consecutiv la cinci transpoziţii în raport cu axele Sa, Sb, Sc, Sd şi Se, trebuie să obţinem aceeaşi semidreaptă SA. Altfel spus, semidreapta SA trebuie să rămînă pe loc la efectuarea rotaţiei care este rezultanta acestor cinci transpoziţii (efectuate în ordinea enumerării lor). Acest din urmă fapt va avea loc şi în cazul în care semidreapta SA va aparţine axei acestei deplasări rezultante. Axa poate fi construită, folosind cele arătate la nr. **416 — 417**.

În cazul general, problema va avea două soluţii, deoarece putem alege ca muchie SA oricare dintre cele două semidrepte în care punctul S împarte axa rotaţiei rezultante.

Problema va fi nedeterminată, dacă rotaţia rezultantă va avea un unghi de rotaţie nul, adică se va transforma într-o identitate. Şi în acest din urmă caz însă, una dintre muchiile unghiului poliedru căutat, de exemplu SA, nu poate fi aleasă cu totul arbitrar: ea trebuie astfel aleasă, încît semidreptele SB, SC, SD şi SE să se obţină din SA cu ajutorul unor transpoziţii consecutive în raport cu axele Sa, Sb, Sc şi Sd, să formeze un unghi cu cinci feţe. (Cele cinci semidrepte trebuie să fie toate distincte şi nici o pereche dintre ele nu trebuie să fie una în prelungirea celeilalte etc.)

Ca exemplu pentru un caz de nedeterminare poate servi următoarea problemă: să se construiască un triedru, ştiind că bisectoarele unghiurilor sale plane sînt trei drepte date, *perpendiculare două cîte două*: în urma efectuării consecutive a celor trei transpoziţii în raport cu cele trei drepte date, obţinem o identitate.

Fie date acum bisectoarele Sa, Sb şi Sc ale celor trei unghiuri plane ASB, BSC şi CSD ale unghiului solid cu cinci feţe $SABCDE$ şi bisectoarele Sd şi Se ale unghiurilor plane DSE şi ESA, astfel alese încît problema construirii unghiului poliedru cu cinci feţe să devină nedeterminată. În acest

caz, ca rezultat al efectuării primelor trei transpoziții succesive în raport cu axele Sa, Sb și Sc, iar apoi a încă două transpoziții în raport cu axele Sd, și Se, trebuie să căpătăm o rotație de unghi nul. Evident, pentru aceasta, rotația rezultantă a primelor trei transpoziții și rotația rezultantă a ultimelor două trebuie să aibă axa D comună și unghiuri egale, dar de sensuri contrare. Însă pentru ca rotația rezultantă a celor două transpoziții în raport cu dreptele Sd și Se să aibă ca axă o dreaptă D dată, cele două drepte Sd și Se trebuie să fie perpendiculare pe dreapta D. De aici rezultă că, dacă sînt date bisectoarele tuturor unghiurilor plane ale unghiului solid căutat, în afară de bisectoarele a două unghiuri plane vecine, și problema trebuie să fie nedeterminată, atunci locul geometric al ultimelor două bisectoare este planul care trece prin punctul S și este perpendicular pe axa rotației rezultante a transpozițiilor în raport cu toate bisectoarele date (efectuate în ordinea cuvenită).

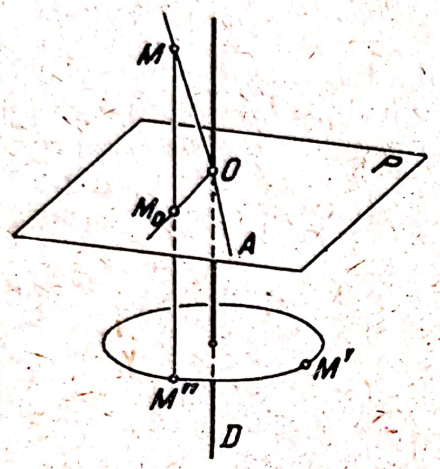


Fig. 148

597. Fie de aflat locul geometric al punctelor M' care se obțin dintr-un punct dat M, prin transpoziții în raport cu drepte concurente într-un punct dat O și situate într-un plan dat P (fig. 148). Să notăm cu M_0 proiecția punctului M pe planul P și să luăm pe prelungirea segmentului MM_0 dincolo de punctul M_0 segmentul $M_0M'' = MM_0$.

Deoarece efectuarea de două ori a unei transpoziții în raport cu o dreaptă dă identitatea, transpoziția în raport cu orice dreaptă OA din planul P poate fi considerată ca rezultantă a trei transpoziții în raport cu axa OM_0, iarăși în raport cu axa OM_0 și în raport cu axa OA. Prima dintre aceste trei transpoziții transformă punctul M în M''. A doua și a treia transpoziție, efectuate consecutiv, au ca rezultantă o rotație în jurul perpendicularei D pe planul P în punctul O. Unghiul de rotație este egal cu dublul unghiului M_0OA și poate lua, de aceea, orice valoare cînd dreapta OA se rotește în jurul punctului O din planul P. Așadar, punctul M' se obține din M'' printr-o rotație cu un unghi arbitrar în jurul axei D.

În consecință, locul geometric este un cerc cu centrul pe dreapta D, situat în planul perpendicular pe această dreaptă și care trece prin punctul M''.

598. Să notăm cu (R), (S) și (S') respectiv axele celor două rotații date R și S și axa rotației căutate (S'). Punctul de intersecție O al axelor (R) și (S) rămîne pe loc, atît la rotația R, cît și la rotația S. Prin urmare, el va rămîne fix și la rotația S', astfel că și axa (S') va trece prin punctul de intersecție O al axelor (R) și (S).

Fie acum rotația S descompusă în două transpoziții în raport cu axele D și D_0, perpendiculare pe dreapta (S) și trecînd prin punctul O, ca axă D_0 fiind luată dreapta perpendiculară atît pe axa (S), cît și pe axa (S'). Fie, mai departe, a doua rotație S' descompusă tot în două transpoziții în raport cu aceeași dreaptă D_0 și în raport cu o dreaptă D', care va trece și ea prin punctul O și va fi perpendiculară pe (S'). În acest caz, rotația dată R va fi rezultanta celor două transpoziții în raport cu axele D și D' și, deci

axa (R) va fi perpendiculară pe cele două axe D şi D'. Aşadar, dreapta D este perpendiculară pe (R) şi pe (S), dreapta D' pe (R) şi pe (S'), dreapta D_0 pe (S) şi pe (S').

Dat fiind că unghiurile rotaţiilor S şi S' sînt, prin ipoteză, egale, unghiul format de dreapta D_0 cu dreapta D este egal cu unghiul dreptelor D_0 şi D'. Aşadar, dreptele D, D' şi D_0 (mai exact, semidrepte alese în mod corespunzător pe ele), formează un triedru isoscel.

Deoarece fiecare dintre dreptele (R), (S) şi (S') este perpendiculară pe două dintre dreptele D, D' şi D_0, semidreptele alese în mod corespunzător pe dreptele (R), (S) şi (S') formează triedrul suplementar celui menţionat mai sus, care va fi, de aceea, tot isoscel. De aici rezultă că *dreptele (S) şi (S') formează cu (R) unghiuri egale.*

Mai departe, unghiul dreptelor D şi D' este egal cu jumătatea unghiului rotaţiei R şi de acelaşi sens cu el. Altfel spus, rotaţia în jurul axei (R) cu un unghi egal cu jumătatea unghiului rotaţiei R şi de acelaşi sens suprapune dreapta D peste D'; prin urmare, aceeaşi rotaţie suprapune şi planul P, perpendicular pe dreapta D, în care se află dreptele (R) şi (S), cu planul P', perpendicular pe D', care conţine dreptele (R) şi (S'). Aşadar, *planul P', care conţine axele (R) şi (S'), se obţine din planul P, care trece prin axele (R) şi (S) printr-o rotaţie în raport cu axa (R) cu un unghi egal cu jumătatea unghiului rotaţiei R şi avînd acelaşi sens cu el.*

Folosind cele de mai sus, obţinem un plan P' pe deplin determinat, care trece prin axa (R) şi conţine axa căutată a celei de-a doua rotaţii, iar în acest plan, *două* drepte (S') şi (S''), înclinate sub acelaşi unghi faţă de axa (R) ca şi axa (S). Se demonstrează uşor că *ambele* drepte astfel găsite pot juca rolul axei căutate a celei de-a doua rotaţii. Pentru aceasta, este suficient, să construim axa D perpendiculară pe (R) şi pe (S), axa D', perpendiculară pe (R) şi pe (S') sau pe (S''), şi axa D_0, perpendiculară pe (S) şi pe (S') sau pe (S) şi pe (S''); ca primă rotaţie, trebuie aleasă rezultanta transpoziţiilor în raport cu axele D şi D_0, ca a doua rotaţie, rezultanta transpoziţiilor în raport cu axele D_0 şi D' etc.

Procedeul pentru construcţia axei căutate (S') sau (S'') a celei de-a doua rotaţii poate fi prezentat şi într-o formă întrucîtva diferită. Putem spune că rotaţiei date R, îi corespund două unghiuri de rotaţie avînd ca sumă $360°$ şi de sensuri contrare. Rotind axa (S) în jurul axei (R) cu un unghi egal cu jumătatea fiecăruia dintre aceste unghiuri şi de acelaşi sens cu ele, vom obţine cele două poziţii posibile (S') şi (S'') ale axei celei de-a doua rotaţii. De aici rezultă că, dacă axa (S) descrie un plan, atunci axele (S') şi (S'') vor descrie şi ele cîte un plan.

598 *bis.* Să începem prin a descompune deplasarea elicoidală dată în două deplasări elicoidale *arbitrare* S şi S', dintre care prima S are ca axă dreapta (S) dată. În acest scop, vom nota cu D perpendiculara comună dreptei (S) şi axei deplasării date (sau una dintre perpendicularele comune celor două drepte, dacă ele sînt paralele). Deplasarea elicoidală dată va apărea, în acest caz (**416** Rec.), ca deplasare rezultantă a transpoziţiei în raport cu dreapta D şi a transpoziţiei în raport cu o a doua dreaptă D''. Prima dintre deplasările

căutate va fi, în acest caz, evident, rezultanta a două transpoziții: în raport cu dreapta D și în raport cu o dreaptă *oarecare* D', care taie pe (S) sub un unghi drept; a doua deplasare S' va fi rezultanta a două transpoziții: în raport cu dreapta D' și în raport cu dreapta D''.

Să mai punem acum condiția ca *unghiurile de rotație ale celor două deplasări să fie egale*. În acest caz, dreapta D' nu va mai putea fi aleasă arbitrar dintre dreptele care taie pe (S) sub un unghi drept: dreapta D' trebuie să formeze unghiuri egale cu dreptele D și D''. În virtutea celor arătate la soluția exercițiului 442, orice dreaptă care formează unghiuri egale cu dreptele D și D'', deci și dreapta D' despre care este vorba, trebuie să fie paralelă cu unul dintre cele două plane perpediculare P și $\overline{P}$, care se pot construi ușor, cunoscînd dreptele D și D'' (excludem din analiza noastră cazul particular în care dreptele D și D'' sînt paralele, astfel că deplasarea elicoidală considerată se reduce la o translație). Deoarece dreapta D' trebuie să fie, totodată, perpendiculară pe dreapta (S), ea trebuie să fie paralelă cu una dintre cele două drepte după care un plan arbitrar perpendicular pe dreapta S intersectează planele P și $\overline{P}$.

De aici rezultă următoarea propoziție. *Pentru ca deplasările S și S' să aibă unghiuri egale, iar axa deplasării S să fie dreapta (S), trebuie ca dreapta D', despre care a fost vorba mai sus, să taie dreapta (S) sub un unghi drept și să fie situată în unul dintre cele două plane Q și $\overline{Q}$, care trec prin această dreaptă.*

Să ne mărginim la analiza cazului în care dreapta D' este situată în planul Q; pentru celălalt caz, cînd dreapta D' se află în planul $\overline{Q}$, putem relua aceleași raționamente. Păstrînd toate condițiile pe care le-am pus, vom mai cere ca *translațiile corespunzătoare deplasărilor S și S' să fie egale*. În acest caz, dreapta D', situată în planul Q, va trebui (**416**) astfel aleasă, încît distanța cea mai mică dintre dreptele D și D' să fie egală cu distanța dintre dreptele D' și D''.

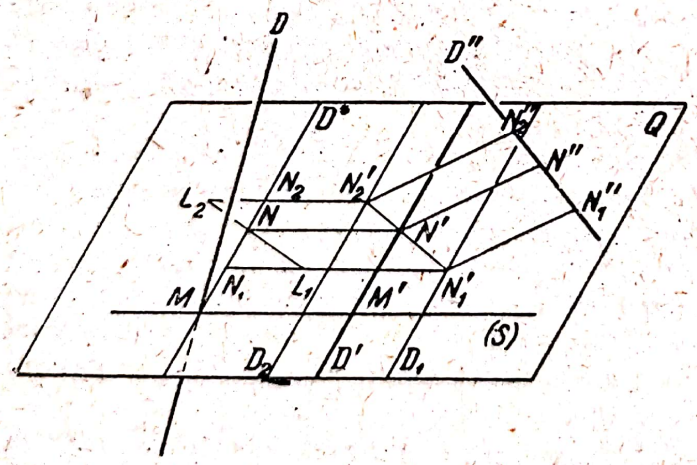


Fig. 149

Această alegere se poate efectua în baza următoarelor considerații. Fie D^* (fig. 149) proiecția dreptei D pe planul Q. Deoarece dreptele D și D' sînt ambele perpendiculare pe (S), dreptele D^* și D' vor fi paralele. Distanța cea mai mică MM' dintre dreptele strîmbe D și D' este, în același timp, distanța $MM' = NN' = \ldots$ dintre dreptele paralele D^* și D'. Dacă $N'N''$ este distanța cea mai mică dintre dreptele D' și D'', iar N este piciorul perpendicularei coborîte din N' pe dreapta D^*, va trebui să avem egalitatea $NN' = N'N''$. Să considerăm acum, în planul Q, două drepte arbitrare D_1 și D_2, perpendicu-

lare pe (S). Fie $N_1'N_1''$ distanţa cea mai mică dintre dreptele D_1 şi D'', iar N_1 piciorul perpendicularei coborîte din N_1' pe dreapta D^*. Segmentul $N_1'N_2''$ şi punctul N_2 au aceeaşi semnificaţie pentru dreapta D_2. Perpendicularele comune $N'N''$, $N_1'N_1''$ şi $N_2'N_2''$ pe dreapta D'' şi pe fiecare dintre dreptele paralele D', D_1 şi D_2 sînt paralele şi sînt deci situate în acelaşi plan; prin urmare, punctele N', N_1' şi N_2' sînt coliniare. Să luăm pe semidreptele $N_1'N_1$ şi $N_2'N_2$, pornind din punctele N_1' şi N_2', segmentele $N_1'L_1$ şi $N_2'L_2$, respectiv egale cu $N_1'N_1''$ şi cu $N_2'N_2''$. Aplicînd trapezelor $N_1'N_1''N_2''N_2'$ şi $N_1'L_1L_2N_2'$ teorema de la exerciţiul 130 $(m : n = N'N_1' : N'N_2')$ şi folosind egalităţile $N_1'N_1'' = N_1'L_1$, $N_2'N_2'' = N_2'L_2$ şi $N'N'' = N'N$, demonstrăm uşor că punctul N se află pe dreapta L_1L_2.

De aici rezultă metoda pentru construcţia dreptei căutate D'. Construim, în planul Q, două drepte arbitrare D_1 şi D_2, perpendiculare pe (S), după care aşa cum s-a arătat mai sus, construim segmentele $N_1'N_1''$ şi $N_2'N_2''$ şi punctele L_1 şi L_2. Prin punctul de intersecţie N al dreptelor D^* şi L_1L_2, ducem o dreaptă paralelă cu (S). Dreapta care trece prin punctul de intersecţie N' al acestei drepte cu dreapta $N_1'N_2'$ şi este perpendiculară pe (S) va fi tocmai dreapta D' căutată.

În acelaşi mod construim, în planul $\overline{Q}$, dreapta analogă $\overline{D'}$.

Pentru a satisface acum toate condiţiile problemei puse, mai rămîne *s-o alegem pe aceea dintre dreptele (sau pe acelea dintre dreptele) D' şi $\overline{D'}$ pentru care deplasările S şi S' corespunzătoare vor fi ambele drepte sau ambele stîngi.*

599. Fie D_1, D_2 şi D_3 trei drepte date; D_{23}, D_{31} şi D_{12} perpediculareleor comune, luate două cîte două şi anume D_{23} perpendiculara comună dreptelor D_2 şi D_3 etc. (ne mărginim la cazul general, cînd între aceste drepte nu avem nici o pereche de paralele).

Să presupunem că prima dintre deplasările căutate, avînd ca axă dreapta D_1, este descompusă în două transpoziţii, astfel că axa celei *de-a doua* este dreapta D_{12}; în acest caz, axa primei transpoziţii va fi o dreaptă D, care taie pe D_1 sub un unghi drept. Analog, vom presupune că a doua deplasare căutată, avînd ca axă dreapta D_2, este descompusă în două transpoziţii, dintre care *prima* are ca axă dreapta D_{12}; axa celei de-a doua va fi o dreaptă D', care taie pe D_2 sub un unghi drept.

În aceste condiţii, deplasarea rezultantă a celor două deplasări căutate va fi, totodată, şi rezultanta celor două transpoziţii în raport cu axele D şi D' (întrucît cele două transpoziţii succesive în raport cu dreapta D_{12} dau identitatea). De aceea, axa deplasării rezultante va fi perpendiculara comună dreptelor D şi D'. Prin ipoteză însă, axa deplasării rezultante trebuie să fie dreapta D_3. Prin urmare, dreapta D taie sub unghiuri drepte, nu numai dreapta D_1 (cum s-a arătat mai sus), ci şi dreapta D_3, şi deci coincide cu D_{31}. Analog, dreapta D' coincide cu D_{23}.

În consecinţă, prima dintre deplasările căutate este rezultanta transpoziţiilor în raport cu dreptele D_{31} şi D_{12} (efectuate tocmai în această ordine), iar a doua, rezultanta celor două transpoziţii în raport cu dreptele D_{12} şi D_{23}.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL II

600. Fie cele două figuri F' și F'' simetrice cu o a treia figură F, respectiv în raport cu planele P' și P''. Să notăm cu M un punct arbitrar al figurii F, iar cu M' și cu M'' omoloagele acestuia în figurile F' și F''.

Dacă planele P' și P'' sînt secante (fig. 150), punctele M, M' și M'' nu sînt coliniare și determină planul Q, perpendicular pe dreapta de intersecție D a planelor P' și P''. În planul Q, punctele M și M' sînt simetrice în raport cu dreapta sa de intersecție D' cu planul P', iar punctele M și M'', în raport cu dreapta sa de intersecție D'' cu planul P''. De aici urmează că punctul M'' se obține din punctul M' printr-o rotație în planul Q, în jurul punctului său de intersecție O cu dreapta D, unghiul de rotație fiind dublul unghiului format de dreptele D' și D'' și avînd același sens cu el. Altfel spus, punctul M'' se obține din M' printr-o rotație (în spațiu) în jurul dreptei D cu un unghi egal cu dublul unghiului dintre planele P' și P'' și avînd același sens. Deoarece M' este un punct arbitrar al figurii F', rezultă că întreaga figură F'' se obține din F' prin aceeași rotație.

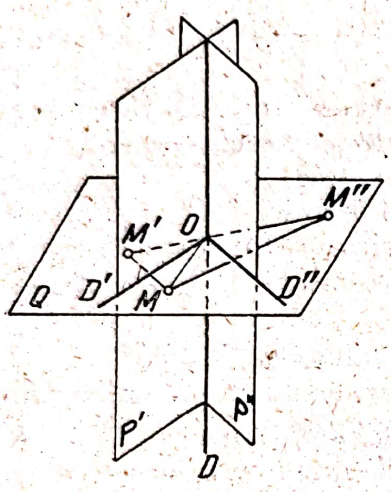


Fig. 150

Așadar, *două figuri simetrice cu o a treia în raport cu două plane secante se obțin una din cealaltă, printr-o rotație*; axa de rotație este dreapta de intersecție a celor două plane, iar unghiul rotației este egal cu dublul unghiului format de cele două plane și are același sens cu el.

Dacă planele P' și P'' sînt paralele, atunci punctele M, M' și M'' sînt coliniare, situîndu-se pe o perpendiculară pe aceste plane. Notînd cu m' și cu m'' punctele de intersecție ale dreptei MM' cu cele două plane, vom avea $M'M = M'm' + m'M = 2m'M$; $MM'' = Mm'' + m''M'' = 2Mm''$, de unde $M'M'' = M'M + MM'' = 2(m'M + Mm'') = 2m'm''$ (pentru ca aceste egalități să fie valabile în toate cazurile, trebuie să alegem pe dreapta dată un sens pozitiv și să considerăm segmentele ca mărime și ca semn). Deoarece M' este un punct arbitrar al figurii F', iar lungimea segmentului $m'm''$ (distanța dintre planele P' și P'') nu depinde de alegerea punctului M', ajungem la următoarea concluzie:

Două figuri simetrice cu o a treia în raport cu două plane paralele se obțin una din cealaltă printr-o translație; direcția translației este perpendiculară pe cele două plane și coincide cu sensul de la primul plan spre al doilea, iar mărimea ei este egală cu dublul distanței dintre cele două plane.

Observații. 1° Rezultatele obținute în soluția exercițiului de față pot fi, evident, enunțate sub forma următoarelor propoziții (compară cu nr. **102** *bis*):

a) *Două simetrii consecutive în raport cu plane secante sînt echivalente cu o rotație în jurul intersecției lor, cu un unghi egal cu dublul unghiului format de cele două plane și avînd același sens cu el.*

b) *Două simetrii consecutive în raport cu plane paralele sînt echivalente cu o translație în lungul unei drepte perpendiculare pe planele date: sensul translației coincide cu*

cel de la primul plan la al doilea, iar mărimea ei este egală cu dublul distanței dintre cele două plane.

De aici se obțin fără dificultate și următoarele propoziții (compară iarăși cu nr. **102** *bis*):

c) *Orice translație poate fi înlocuită prin două simetrii consecutive în raport cu două plane perpendiculare pe direcția translației, unul dintre aceste plane putînd fi ales arbitrar.*

d) *Orice rotație poate fi înlocuită prin două simetrii consecutive în raport cu două plane care trec prin axa de rotație, unul dintre aceste plane putînd fi ales arbitrar.*

e) *Dacă patru plane P, Q, P' și Q' se taie după aceeași dreaptă, iar unghiul dintre planele P și Q este egal cu unghiul dintre planele P' și Q' și are același sens, atunci două simetrii consecutive în raport cu planele P și Q sînt echivalente cu două simetrii consecutive în raport cu planele P' și Q'.*

2° Din aceste propoziții, rezultă următoarea metodă pentru construcția axei și a unghiului de rotație ale rezultantei celor două rotații în jurul unor axe *concurente*, diferită de cea dată la nr. **417** (compară și cu soluția ex. 93).

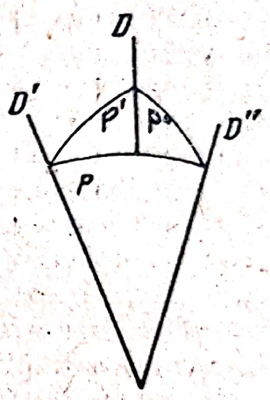


Fig. 151

Fie D' (fig. 151) axa primei rotații, iar D'' axa celei de-a doua. Să descompunem prima dintre aceste rotații în două simetrii față de planele P' și P, alegînd ca al doilea dintre aceste plane pe cel determinat de dreptele D' și D''. Unghiul dintre planele P' și P va fi egal cu jumătatea unghiului primei rotații și va avea același sens cu el. Analog, descompunem a doua rotație dată în două simetrii față de același plan P ca mai sus și față de un plan oarecare P''; unghiul dintre planele P și P'' se determină cum s-a arătat.

Succesiunea celor două rotații date în jurul axelor D' și D'' este echivalentă cu două simetrii consecutive în raport cu planele P' și P'' (deoarece efectuarea repetată a simetriei în raport cu planul P dă identitatea). De aici rezultă că axa rotației rezultante căutate va fi intersecția D a planelor P' și P'', iar unghiul de rotație corespunzător va fi egal cu dublul unghiului format de planele P' și P'' și de același sens cu el.

3° Orice număr par de simetrii consecutive în raport cu plane concurente într-un punct este echivalent cu o rotație a cărei axă și al cărei unghi se pot găsi în modul următor. Primele două dintre simetriile date sînt echivalente cu o rotație a cărei axă și al cărei unghi se determină cum s-a arătat la 1°, a). Același lucru este valabil și pentru a treia și a patra dintre simetriile date etc. Așadar, obținem rotații al căror număr total reprezintă jumătate din numărul simetriilor date. Rotația rezultantă a acestor rotații poate fi obținută folosind fie procedeul de la nr. **417**, fie pe cel de la Obs. 2°.

601. Fie figura F' simetrică cu F în raport cu planul P, iar figura F'' simetrică tot cu F, însă în raport cu un punct O, exterior planului P.

Să notăm cu O_1 proiecția punctului O pe planul P și cu F_1 simetrica lui F în raport cu punctul O_1. Deoarece figura F' este simetrică cu F în raport cu planul P, iar figura F_1 este simetrică cu F în raport cu punctul O_1, situat în planul P, figura F_1 se va obține din F cu ajutorul unei transpoziții în raport cu dreapta O_1O, perpendiculară pe planul P în punctul O_1 (**420**).

Mai departe, deoarece figura F_1 este simetrică cu F în raport cu punctul O_1, iar figura F'' simetrică cu F în raport cu punctul O, figura F'' se obține din F cu ajutorul unei translații avînd aceeași orientare ca segmentul O_1O, iar mărimea egală cu dublul lungimii segmentului.

Așadar, figura F_1 se obține din F' prin transpoziție în raport cu dreapta O_1O, iar figura F'' din figura F printr-o translație avînd același sens cu segmentul O_1O și egală cu dublul său. Prin urmare, figura F'' se obține din F',

printr-o deplasare elicoidală. Axa acestei deplasări este perpendiculara OO_1, coborîtă din punctul O pe planul P; unghiul de rotație este de 180°, iar translația are mărimea $2O_1O$ și sensul de la O_1 spre O.

602. Să presupunem că o figură arbitrară F are două centre de simetrie O' și O''. Să considerăm un punct A al figurii F. Punctul A', simetricul lui A în raport cu punctul O', aparține de asemenea figurii F. Mai departe va aparține aceleiași figuri și punctul A_1, simetricul lui A' în raport cu punctul O''. În acest caz, segmentul AA_1 este paralel cu segmentul $O'O''$, are același sens cu el și este de două ori mai mare (compară cu nr. **420**). Reluînd pentru noul punct A_1 aceleași raționamente pe care le-am aplicat punctului A, vom obține încă un punct A_2 al figurii date, situat pe prelungirea segmentului AA_1, dincolo de punctul A_1, astfel ca $AA_1 = A_1A_2$ etc. Așadar, vom obține un șir infinit de puncte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ ale figurii F, situate pe aceeași dreaptă și satisfăcînd condiția $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ Figura F nu va fi mărginită din toate părțile:

De aici rezultă imediat că o figură mărginită din toate părțile nu poate avea două centre de simetrie.

603. Orice segment de dreaptă care trece prin intersecția O a diagonalelor unui paralelipiped și este mărginit de două fețe opuse este împărțit de acest punct în părți egale (ex. 520). De aici rezultă că orice plan care trece prin punctul O împarte paralelipipedul în două părți simetrice în raport cu acest punct. Dat fiind că orice două poliedre simetrice sînt echivalente (**423**), vor fi echivalente și cele două părți în care este tăiat paralelipipedul.

604. 1° Să presupunem că dreapta dată taie planul P într-un punct X (fig. 152). Să construim, cum se arată în textul problemei, punctul A', simetricul oblic al unui punct arbitrar A de pe dreapta dată, și să notăm cu A_0 intersecția segmentului AA' cu planul P. Vom demonstra că *figura oblic simetrică cu dreapta AX este dreapta $A'X$.*

Pentru aceasta, vom duce printr-un punct arbitrar M al dreptei AX dreapta MM', paralelă cu AA' și deci situată în planul XAA'. Să presupunem că această dreaptă taie dreapta $A'X$ în punctul M', iar planul P (și totodată dreapta A_0X) în punctul M_0. Cele trei drepte XA, XA_0 și XA', care pornesc din același punct și sînt situate în același plan, determină pe paralele AA' și MM' segmente proporționale (**121**); prin urmare $A_0A : A_0A' = M_0M : M_0M'$. Deoarece $A_0A = A_0A'$ (cf. definiției simetriei oblice), vom avea și $M_0M = M_0M'$, adică M' este simetricul oblic al punctului M. Așadar, dreapta $A'X$ este simetrica oblică a dreptei AX.

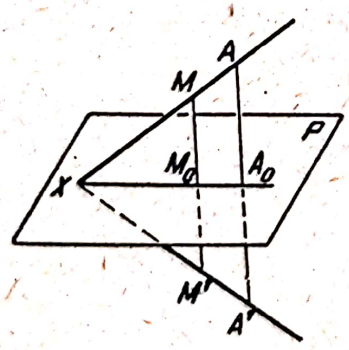


Fig. 152

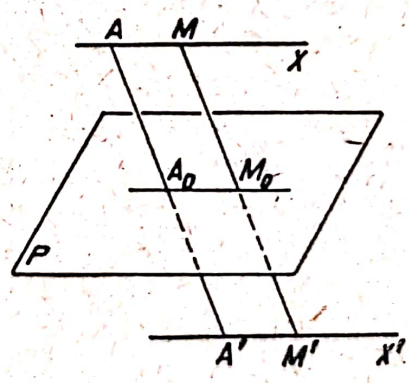


Fig. 153

Am presupus că dreapta dată taie planul P. Dacă dreapta dată AX este acum paralelă cu planul P (fig. 153), vom construi punctul A', simetricul

oblic al unui punct A de pe dreapta considerată, şi vom duce prin el dreapta $A'X'$, paralelă cu AX. Vom demonstra că *figura oblic simetrică cu dreapta AX este dreapta $A'X'$.*

Pentru aceasta, ducem din nou printr-un punct arbitrar M al dreptei AX dreapta MM', paralelă cu AA' şi deci situată în planul dreptelor paralele AX şi $A'X'$, şi notăm cu M' intersecţia ei cu dreapta $A'X'$. Notăm, mai departe, cu A_0 şi cu M_0 respectiv intersecţiile segmentelor AA' şi MM' cu planul P. Deoarece patrulaterele AMM_0A_0 şi $A'M'M_0A_0$ sînt paralelograme, avem $AA_0 = MM_0$ şi $A'A_0 = M'M_0$. Totodată $AA_0 = A'A_0$ (cf. definiţiei simetriei oblice), drept care avem $MM_0 = M'M_0$. De aici rezultă, de asemenea, că în cazul de faţă simetrica oblică a dreptei AX va fi dreapta $A'X'$.

2° Fie F' figura oblic simetrică cu planul dat F în raport cu planul P. Să considerăm două puncte arbitrare M' şi N' ale figurii F' şi omoloagele lor M şi N din planul F. Deoarece toate punctele dreptei MN sînt situate în planul F şi deoarece simetrica oblică a dreptei MN este, conform celor demonstrate, dreapta $M'N'$, dreapta $M'N'$ va aparţine în întregime figurii F'. Aşadar, figura F' are următoarea proprietate: o dreaptă care uneşte două puncte arbitrare ale acestei figuri îi aparţine în întregime. Există însă numai trei figuri care se bucură de această proprietate, şi anume dreapta, planul şi întreg spaţiul (cf. nr. **321** *bis*).

Figura F' nu poate fi o dreaptă, deoarece, în acest caz, şi figura F, simetrica oblică a figurii F', ar fi tot o dreaptă, după cum s-a demonstrat mai sus. Figura F' nu poate să conţină nici toate punctele spaţiului, deoarece, evident, figura F ar conţine, în acest caz, toate punctele spaţiului. În consecinţă, figura F' este un plan.

3° Să presupunem iniţial că poliedrul dat este o prismă triunghiulară sau un trunchi de prismă triunghiulară, avînd muchiile laterale paralele cu o dreaptă dată D. În acest caz, poliedrul care este simetricul oblic al celui dat va fi de asemenea o prismă triunghiulară sau un trunchi de prismă triunghiulară. Ambele prisme sau trunchiuri de prismă vor avea, evident, muchii laterale respectiv egale şi secţiuni drepte egale, din care cauză ele vor fi echivalente (**409** Cor.).

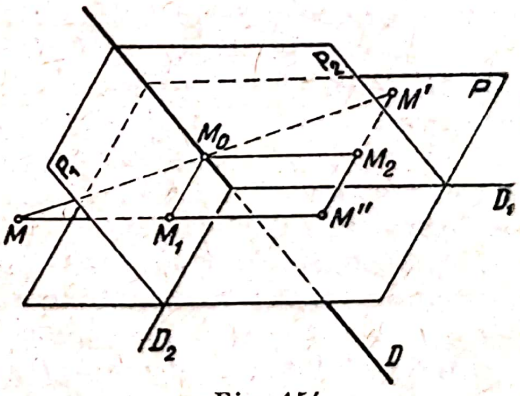


Fig. 154

Dat fiind că orice prismă sau orice trunchi de prismă poate fi descompus în prisme sau în trunchiuri de prismă triunghiulare prin plane care trec prin diagonalele bazelor şi prin muchiile laterale, proprietatea demonstrată va fi valabilă şi pentru orice prismă sau trunchi de prismă avînd muchiile laterale paralele cu dreapta dată D, şi nu numai pentru cazul unei prisme triunghiulare.

În sfîrşit, întrucît orice poliedru poate fi descompus în trunchiuri de prismă avînd toate muchiile laterale paralele cu o dreaptă dată D (ex. 565), orice pereche de poliedre oblic simetrice în raport cu un plan sînt echivalente.

605. *Prima soluţie.* Să ducem, prin dreapta dată D, două plane arbitrare P_1 şi P_2 (fig. 154) şi să notăm cu D_1 intersecţia planelor P_2 şi P, iar

cu D_2 intersecția planelor P_1 și P. Dacă punctul M' corespunde unui punct M, cum se arată în enunțul problemei, construim un punct M'', simetricul oblic al punctului M în raport cu planul P_1, ducînd dreapta MM'' paralelă cu dreapta D_1. Planul $MM'M''$ este paralel cu planul P, deoarece dreapta MM' este, prin ipoteză, paralelă cu planul P, iar dreapta MM'' este paralelă cu dreapta D_1, prin construcție. Prin urmare, dreptele M_1M_0 și M_2M_0 — unde M_0 este punctul de intersecție al segmentului MM' cu dreapta D, M_1 intersecția segmentului MM'' cu planul P_1, iar M_2 intersecția segmentului $M''M'$ cu planul P_2 — sînt respectiv paralele cu dreptele D_2 și D_1. Deoarece $M_1M = M_1M''$ (cf. definiției simetriei oblice) și $M_0M = M_0M'$ (prin ipoteză), dreapta $M''M'$ este paralelă cu dreapta M_1M_0 și deci cu dreapta D_2. Deoarece dreptele M_0M_2 și MM'' sînt ambele paralele cu D_1, iar $M_0M = M_0M'$, vom avea și $M_2M'' = M_2M'$. Așadar, punctul M' se obține din M'' printr-o simetrie oblică în raport cu planul P_2, dreapta $M''M'$ fiind paralelă cu dreapta D_2.

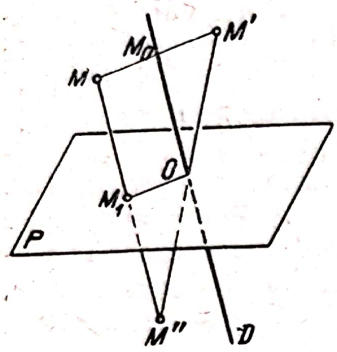


Fig. 155

Așadar, transformarea cu ajutorul căreia obținem punctul M' din punctul M se reduce la două simetrii oblice de tipul considerat la exercițiul 604.

Deoarece ambele simetrii oblice au toate trei proprietățile enunțate în exercițiul 604, transformarea de care ne ocupăm aici se va bucura de aceleași trei proprietăți.

A doua soluție. Dacă punctul M' este omologul unui punct M, așa cum se arată în enunțul problemei, construim punctul M'' (fig. 155), simetricul oblic al punctului M în raport cu planul P, ducînd dreapta MM'' paralel cu D. Să notăm cu O și cu M_1 intersecțiile planului P respectiv cu dreptele D și MM'', iar cu M_0 intersecția segmentului MM' cu dreapta D. Dat fiind că patrulaterul MM_0OM_1 este un paralelogram, avem $OM_0 = M_1M$; deoarece, totodată, $M_1M = M_1M''$ (cf. definiției simetriei oblice) și $M_0M = M_0M'$ (prin ipoteză), punctele M'', O și M' sînt coliniare, și $OM'' = OM'$. Așadar, punctele M'' și M' sînt simetrice în raport cu punctul O.

În consecință, transformarea prin care obținem punctul M' din M se reduce la o simetrie oblică de tipul considerat în exercițiul 604 și la o simetrie în raport cu punctul O.

Întrucît simetria oblică și simetria în raport cu un punct se bucură de cele trei proprietăți enumerate în exercițiul 604, înseamnă că și transformarea considerată are aceste trei proprietăți.

606. Să luăm ca dreaptă D, despre care este vorba în exercițiul 605, dreapta EF, care unește mijloacele E și F ale muchiilor AB și CD ale tetraedrului dat (v. fig. 134), iar ca plan P, planul paralel cu aceste muchii. La efectuarea transformării considerate la exercițiul 605, vîrfurile A și B se transformă unul în celălalt, ceea ce se întîmplă și cu vîrfurile C și D. De aici rezultă că, la această transformare, tetraedrul considerat trece în el însuși; întrucît aceeași proprietate are evident, orice plan care trece prin dreapta EF, cele două părți în care planul $EGFH$ taie tetraedrul se obțin de asemenea una din

cealaltă cu ajutorul transformării menţionate. Aceste două părţi sînt echivalente, în virtutea exerciţiului 605.

607. Fie A un punct arbitrar al figurii F şi A' omologul său în figura F'. Construim figura F'', simetrica lui F în raport cu planul P, perpendicular pe segmentul AA', prin mijlocul acestuia. Figura F'' este evident egală cu F'. Totodată, punctul A' al figurii F'' coincide cu omologul său din figura F'. De aceea, figura F'' poate fi suprapusă peste figura F' printr-o rotaţie în jurul unei axe care trece prin punctul A' (**418**). Aşadar, *figura F poate fi suprapusă peste F', printr-o simetrie în raport cu planul P, urmată de o rotaţie în jurul unei axe.*

Să descompunem acum această din urmă rotaţie în două simetrii în raport cu planele Q şi R, care trec prin axa de rotaţie (compară cu soluţia ex. 600, Obs. 1°), alegînd astfel planul Q încît să fie perpendicular pe planul P. Aşadar, *figura F' se obţine din F prin trei simetrii consecutive în raport cu planele P, Q şi R, planele P şi Q fiind perpendiculare între ele.*

Să înlocuim, mai departe, şirul de simetrii în raport cu planele P şi Q (echivalent cu transpoziţia în raport cu intersecţia lor) printr-o pereche de simetrii în raport cu alte două plane perpendiculare P' şi Q', care trec prin intersecţia planelor P şi Q. Vom alege astfel planul P', încît să fie perpendicular pe R. Figura F' se obţine din F prin trei simetrii consecutive în raport cu planele P', Q' şi R, atît planul Q', cît şi planul R fiind perpendiculare pe planul P'. Evident, ordinea în care se efectuează simetriile în raport cu planele P' şi Q' este indiferentă, deoarece aceste două simetrii, efectuate într-o ordine arbitrară, sînt echivalente cu o transpoziţie în raport cu intersecţia planelor. Aceasta fiind valabil şi pentru simetria în raport cu planele P' şi R, ajungem la următorul rezultat: *Figura F' se obţine din F prin trei simetrii consecutive în raport cu planele P', Q' şi R, ambele plane Q' şi R fiind perpendiculare pe P', iar cele trei simetrii putînd fi efectuate fie în ordinea $P'Q'R$ fie în ordinea $Q'P'R$, fie, în sfîrşit, în ordinea $Q'RP'$.*

În cele ce urmează, va trebui să considerăm separat două cazuri:

1) Dacă *planele Q' şi R sînt paralele*, succesiunea de simetrii în raport cu aceste două plane este echivalentă cu o translaţie T, perpendiculară pe planele Q' şi R, şi, deci, paralelă cu planul P'. Dacă vom efectua cele trei simetrii consecutive în ordinea $P'Q'R$ (sau în ordinea $Q'RP'$), simetria în raport cu planul P' va preceda translaţia T (sau, respectiv, îi va urma).

Aşadar, *în acest caz, figura F' se obţine din F printr-o translaţie T, precedată sau urmată de o simetrie în raport cu planul P', paralel cu direcţia translaţiei T.*

2) Dacă *planele Q' şi R sînt secante*, atunci succesiunea de simetrii în raport cu aceste două plane este echivalentă cu o rotaţie S în jurul dreptei lor de intersecţie D, perpendiculară pe planul P'. De aici rezultă, ca şi mai sus, că, *în acest caz, figura F' se obţine din F printr-o rotaţie S în jurul axei D, precedată sau urmată de o simetrie în raport cu planul P', perpendicular pe axa D.*

Pentru a obţine acum, în locul simetriei în raport cu un plan, o simetrie în raport cu un punct de pe axa de rotaţie D, vom proceda astfel. Supunem figura F întîi unei simetrii în raport cu planul P', apoi unei duble transpoziţii în raport cu axa D şi, în sfîrşit, rotaţiei S în jurul axei D, despre care a fost vorba mai sus; ca rezultat, obţinem iarăşi figura F'. Simetria în raport cu

planul P' și transpoziția în raport cu dreapta D, efectuate consecutiv, sînt echivalente cu simetria față de punctul de intersecție O al planului P' cu dreapta D. A doua transpoziție în raport cu axa D și rotația S, de aceeași axă, efectuate consecutiv, dau o nouă rotație S^* în jurul aceleiași axe D. Supunînd figura F întîi rotației S, apoi de două ori transpoziției în raport cu axa D și, în sfîrșit, unei simetrii în raport cu planul P' și reluînd raționamentele de mai sus, vom arăta că simetria în raport cu punctul O poate preceda rotația S^*, precum și să-i urmeze.

În consecință, *atunci cînd planele Q' și R sînt secante, figura F' se obține din F cu ajutorul unei rotații S^* în jurul axei D, căreia îi precede sau căreia îi urmează o simetrie în raport cu un punct oarecare de pe axa D.*

Observație. Din propoziția demonstrată, rezultă următorul corolar:

Orice număr impar de simetrii în raport cu plane concurente într-un punct O este echivalent cu o rotație în jurul unei axe care trece prin acest punct O, precedată sau urmată de o simetrie în raport cu un plan care trece prin același punct O și este perpendicular pe axa de rotație.

În adevăr, un număr impar de simetrii în raport cu plane care trec prin punctul O transformă orice figură F într-o figură F', egală cu o figură simetrică cu cea dată (deoarece un număr par de simetrii din acestea este echivalent cu o rotație; v. soluția ex. 600, Obs. 3°). Dat fiind că punctul O al figurii F coincide, în acest caz, cu omologul său din figura F', toate planele P, Q, R, P' și Q', despre care a fost vorba în soluție, vor fi concurente în punctul O. De aici rezultă propoziția enunțată.

608. Fie $SABCD$ un unghi poliedru dat, pentru a fixa ideile, cu patru fețe. Să presupunem că există un unghi poliedru cu patru fețe $Sabcd$ (fig. 156), înscris în el și avînd suma unghiurilor plane minimă. În acest caz, vom admite (cum se face în mod obișnuit pentru generalitatea raționamentelor; compară de exemplu, cu soluția ex. 155) nu numai unghiuri poliedre înscrise „în sensul propriu al cuvîntului", ale căror muchii sînt situate în interiorul unghiurilor plane ale unghiului poliedru dat, ci și unghiuri poliedre „înscrise" ale căror muchii se pot afla în planele fețelor unghiului poliedru dat, atît interior cît și exterior unghiurilor sale plane.

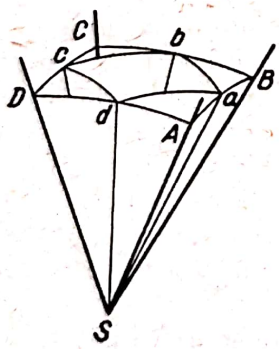


Fig. 156

Dacă planele dSa și aSb nu ar forma cu planul ASB diedre egale, atunci, lăsînd pe loc muchiile Sb, Sc și Sd ale unghiului poliedru înscris, am putea înlocui muchia sa Sa printr-o altă muchie Sa', de asemenea situată în planul ASB (și chiar oricît de apropiată de Sa), pentru care suma unghiurilor plane $\widehat{dSa'} + \widehat{a'Sb}$ ar fi mai mică decît suma celor două unghiuri plane $\widehat{dSa} + \widehat{aSb}$ (v. soluția ex. 506, Obs.). Unghiul poliedru $S \cdot a'bcd$ ar avea, în acest caz, o sumă a unghiurilor plane mai mică decît $S \cdot abcd$, ceea ce contrazice ipoteza noastră. Prin urmare, planele fețelor dSa și aSb ale unghiului poliedru înscris căutat, formează diedre egale cu planul ASB, ceea ce este, evident, cazul și pentru celelalte fețe.

Deoarece acest raționament nu depinde de numărul fețelor unghiului poliedru dat, problema considerată se reduce la următoarea:

Se dă un unghi poliedru $S \cdot ABC\ldots$; să se construiască un unghi poliedru $S \cdot abc\ldots$, pentru care planele ASB, BSC,... să fie planele bisectoare ale diedrelor de muchii respectiv Sa, Sb... sau ale suplementelor lor.

La rezolvarea acestei probleme, va trebui să ne ocupăm separat de cazul în care numărul feţelor este par şi impar.

Să începem cu cazul unui număr de feţe par. Fie feţele unghiului poliedru dat — vom presupune, pentru a fixa ideile, că este vorba de unghiul $S \cdot ABCDEF$ cu şase feţe — anume planele ASB, BSC,... şi FSA, planele bisectoare ale diedrelor de muchii respectiv Sa, Sb,... şi Sf ale unghiului poliedru $S \cdot abcdef$ căutat sau ale suplementelor acestor diedre.

Simetria în raport cu planul ASB transformă, evident, planul fSa căutat în planul aSb, simetria în raport cu planul BSC transformă planul aSb în planul bSc,... şi, în sfîrşit, simetria în raport cu planul FSA transformă planul eSf în planul fSa. Cu alte cuvinte, cele şase simetrii consecutive în raport cu planele ASB, BSC,... şi FSA transformă planul fSa în el însuşi. Însă aceste şase simetrii sînt echivalente cu o rotaţie, a cărei axă D şi al cărei unghi ştim să le aflăm (v. soluţia ex. 600, Obs. 3°). Aşadar, rotaţia rezultantă a celor şase simetrii consecutive în raport cu planele ASB, BSC,... şi FSA transformă planul căutat fSa în el însuşi.

În cazul general, cînd această rotaţie rezultantă este diferită de o transpoziţie şi de identitate (şi ne mărginim numai la acest caz general), rezultă de aici că planul căutat fSa este perpendicular pe axa D a rotaţiei definite mai sus. După ce a fost construit planul fSa, nu mai prezintă nici o dificultate. să construim celelalte feţe ale unghiului poliedru căutat $S \cdot abcdef$ şi să demonstrăm că unghiul poliedru construit se va bucura de proprietăţile menţionate mai sus.

Problema se rezolvă analog în cazul unui număr par arbitrar de feţe.

Să trecem la cazul unui număr de feţe impar. Fie feţele unghiului poliedru dat — vom presupune, pentru a fixa ideile, că este vorba de unghiul cu cinci feţe $S \cdot ABCDE$ — anume planele ASB, BSC,... şi ESA planele bisectoare ale diedrelor de muchii respectiv Sa, Sb,... şi Se ale unghiului poliedru căutat $S \cdot abcde$ sau ale suplementelor acestor diedre.

Simetria în raport cu planul ASB va transforma iarăşi planul căutat eSa în planul aSb etc. Aşadar, cele cinci simetrii succesive în raport cu planele ASB, BSC,... şi ESA transformă planul eSa în el însuşi. Însă aceste cinci simetrii consecutive sînt echivalente (cf. soluţiei ex. 607, Obs.) cu o rotaţie R în raport cu o axă perfect determinată D, care trece prin punctul S, urmată de o simetrie în raport cu planul P, perpendicular pe axa D şi trecînd de asemenea prin punctul S. Aşadar, rotaţia R în jurul axei D, împreună cu simetria în raport cu planul P, care îi urmează, transformă în el însuşi planul eSa căutat.

În cazul general, cînd rotaţia R este diferită de o transpoziţie şi de identitate (şi ne mărginim numai la acest caz general), adică atunci cînd cele cinci simetrii consecutive în raport cu planele date nu sînt echivalente cu o simetrie în raport cu un punct sau în raport cu un plan, singurul plan care se transformă în el însuşi în urma efectuării consecutive a rotaţiei R şi a simetriei în raport cu planul P este tocmai planul P. Prin urmare, planul căutat eSa coincide cu planul P, pe care ştim să-l construim (cum se arată în soluţia

ex. 607). După ce a fost construit planul eSa, nu mai prezintă greutate să construim și celelalte fețe ale unghiului poliedru căutat $S \cdot abcde$ și să demonstrăm că unghiul poliedru construit se va bucura de proprietățile indicate mai sus.

Problema se rezolvă analog oricare ar fi numărul impar de fețe.

Observație. La rezolvarea problemei noastre, *am presupus*, dar nu am demonstrat, existența unghiului poliedru înscris avînd suma unghiurilor plane minimă (compară cu probl. 366, observația la prima soluție). Nu vom insista asupra discuției ulterioare a problemei în cazul unui unghi poliedru cu un număr de fețe arbitrar, mai mare decît trei.

Să ne ocupăm acum în mod special și mai amănunțit de cazul triedrului.

Fie fețele BSC, CSA și ASB ale triedrului dat $S \cdot ABC$ planele bisectoare ale diedrelor de muchii Sa, Sb și Sc din triedrul căutat $S \cdot abc$ sau ale diedrelor lor suplementare.

Să considerăm întîi cazul general, cînd cele trei simetrii consecutive în raport cu planele BSC, CSA și ASB nu sînt echivalente cu o simetrie în raport cu punctul S sau în raport cu un plan care trece prin acest punct (de aceste din urmă două cazuri particulare ne vom ocupa mai jos). În acest caz, problema trebuie să aibă o singură soluție. Însă triedrul $S \cdot abc$, ale cărui muchii Sa, Sb și Sc sînt respectiv proiecțiile muchiilor SA, SB și SC pe planele fețelor opuse ale triedrului dat, satisface condițiile problemei (cf. ex. 483); prin urmare, acest triedru va fi cel căutat (compară cu rezultatul analog pentru triunghi, soluția problemei 362).

Dacă triedrul dat are trei diedre ascuțite sau un diedru ascuțit și două obtuze, atunci cele trei plane BSC, CSA și ASB vor fi, după cum arată o analiză mai amănunțită a problemei, planele bisectoare ale suplementelor diedrelor triedrului $S \cdot abc$ căutat. Dacă triedrul dat are două diedre ascuțite și unul obtuz sau trei diedre obtuze, atunci două dintre fețele triedrului dat vor fi planele bisectoare ale *diedrelor proprii* din triedrul căutat, iar a treia va fi planul bisector al diedrului suplementar cu cel de-al treilea. Dacă triedrul dat are unul sau două diedre drepte, atunci cele trei drepte Sa, Sb și Sc se află în același plan și problema nu are soluții. În sfîrșit, vom considera mai departe cazul triedrului cu cele trei unghiuri diedre drepte.

Vom presupune acum că cele trei simetrii consecutive în raport cu planele BSC, CSA și ASB sînt echivalente cu o simetrie în raport cu un plan P (care trece neapărat prin punctul S). În acest caz, cele patru simetrii consecutive în raport cu planele BSC, CSA, ASB și P dau identitatea; însă primele două dintre ele sînt echivalente cu o rotație în jurul intersecției SC a planelor BSC și CSA, iar ultimele două cu o rotație în jurul intersecției D a planelor ASB și P. Întrucît aceste două rotații efectuate consecutiv dau identitatea, axele celor două rotații trebuie să coincidă. Aceasta se poate întîmpla numai dacă planul ASB trece prin dreapta SC, ceea ce contrazice ipoteza, conform căreia planele BSC, CSA și ASB formează un triedru.

Mai rămîne să considerăm ultimul caz, cînd cele trei simetrii succesive în raport cu planele BSC, CSA și ASB sînt echivalente cu o simetrie în raport cu punctul S. În acest caz, cele patru simetrii consecutive în raport cu planele BSC, CSA, ASB și iarăși ASB sînt echivalente cu o simetrie în raport cu punctul S, urmată de o simetrie în raport cu planul ASB, adică sînt echivalente cu o transpoziție în raport cu dreapta care trece prin punctul S și este perpendiculară pe planul ASB. Pe de altă parte, aceleași patru simetrii sînt,

Scanned with OKEN Scanner

evident, echivalente cu două simetrii consecutive faţă de planele BSC şi CSA. Aşadar, două simetrii consecutive în raport cu planele BSC şi CSA sînt echivalente cu o transpoziţie în raport cu axa care trece prin punctul S şi este perpendiculară pe planul ASB. Aceasta ne arată că planele BSC şi CSA sînt perpendiculare şi, totodată, perpendiculare pe planul ASB. Aşadar, dacă cele trei simetrii consecutive în raport cu feţele BSC, CSA şi ASB ale triedrului $S{\cdot}ABC$ sînt echivalente cu o simetrie în raport cu punctul S, acest triedru are toate trei diedrele drepte; reciproca este evidentă.

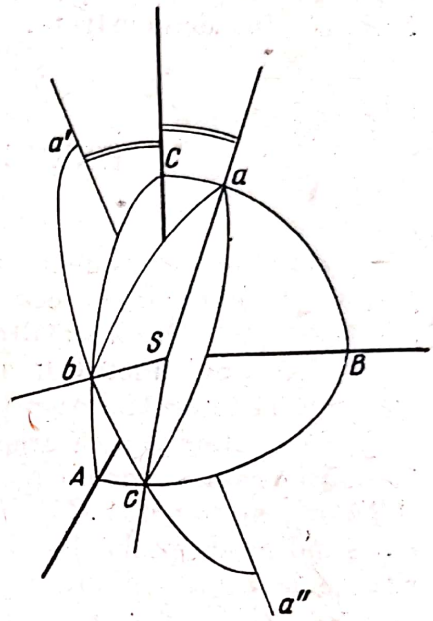


Fig. 157

Aşadar, în cazul cînd este dat un triedru tridreptunghic, metoda generală pentru rezolvarea problemei puse, indicată mai sus pentru cazul general al unui număr impar de feţe, se dovedeşte inaplicabilă, dat fiind că orice plan care trece prin vîrf este transformat în sine însuşi prin cele trei simetrii consecutive în raport cu planele feţelor; totodată, în acest caz, îşi pierde sensul noţiunea de proiecţie a unei muchii pe planul feţei opuse, la care am recurs mai sus, pentru cazul triedrului arbitrar.

Vom demonstra acum direct, pentru cazul triedrului tridreptunghic, următoarele propoziţii: *într-un triedru tridreptunghic, putem înscrie o infinitate de triedre*; *pentru fiecare dintre ele, planele BSC, CSA şi ASB sînt plane bisectoare ale diedrelor suplementare diedrelor sale*; *suma unghiurilor plane a oricăruia dintre aceste triedre înscrise este de 180°*; *suma unghiurilor plane ale oricărui alt triedru înscris în cel dat este mai mare de 180°*.

În adevăr, fie dat triedrul tridreptunghic $S{\cdot}ABC$ (fig. 157). Să considerăm un plan arbitrar care trece prin punctul S şi taie feţele CSA şi BSC (pentru a fixa ideile, feţele înseşi, nu prelungirile lor) respectiv după semidreptele Sb şi Sc. Să notăm acum cu $a'a''$ intersecţia planului ales bSc cu planul BSC şi cu Sa dreapta simetrică cu $a'a''$ în raport cu dreapta SB, deci şi în raport cu dreapta SC; notaţiile pot fi astfel alese, încît semidreapta Sa să fie interioară feţei BSC. În acest caz, triedrul $S{\cdot}abc$, înscris în $S{\cdot}ABC$ (în sensul propriu al cuvîntului), va avea (cum rezultă uşor din considerente de simetrie) planele BSC, CSA şi ASB ca plane bisectoare ale suplementelor diedrelor sale. În acelaşi timp, suma unghiurilor plane ale triedrului $S{\cdot}abc$ va fi $\widehat{aSb} + \widehat{bSc} + \widehat{cSa} = \widehat{a'Sb} + \widehat{bSc} + \widehat{cSa''} = 180°$.

Dacă planul ales nu ar intersecta chiar feţele CSA şi BSC ale triedrului, ci prelungirea uneia dintre aceste feţe sau a ambelor, am obţine un triedru „înscris" în cel dat, în sensul larg despre care a fost vorba la începutul soluţiei şi care are aceleaşi proprietăţi.

Fie acum $S{\cdot}a_0b_0c_0$ un triedru arbitrar, înscris în cel dat. Să lăsăm pe loc semidreptele Sb_0 şi Sc_0 şi să înlocuim semidreapta Sa_0 printr-o altă semidreapta Sa^*, care se obţine prin construcţia descrisă mai sus, dacă Sb_0 şi Sc_0

sînt date. Triedrul $Sa^*\ b_0c_0$ se va bucura de proprietățile enumerate mai sus, și deci $\widehat{a^*Sb_0} + \widehat{b_0Sc_0} + \widehat{c_0Sa^*} = 180°$. Deoarece avem, totodată, $\widehat{c_0Sa_0} + \widehat{+ a_0Sb_0} > \widehat{c_0Sa^*} + \widehat{a^*Sb_0}$ (compară cu soluția problemei 506), suma unghiurilor plane ale triedrului $S \cdot a_0b_0c_0$, distinct de $S \cdot a^*\ b_0c_0$, va fi mai mare de 180°. Toate proprietățile enunțate mai sus ale triedrului tridreptunghic $S \cdot ABC$ sînt demonstrate.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL III

609. Fie A un punct arbitrar al primei figuri, A' omologul său în a doua figură, B un punct oarecare al primei figuri, exterior dreptei AA', iar B' omologul său. Deoarece dreapta AB este, prin ipoteză, paralelă cu $A'B'$, rezultă că nici punctul B' nu va fi situat pe dreapta AA'. Dreptele AA' și BB' se află în același plan și, de aceea, ele vor fi ori concurente, ori paralele.

Să presupunem că dreptele AA' și BB' se intersectează într-un punct O. Să considerăm acum un punct arbitrar C al primei figuri, exterior planului $ABA'B'$, și punctul C', omologul său (de asemenea exterior acestui plan, dat fiind că dreptele AC și $A'C'$ sînt paralele). Punctele A, C, A' și C' sînt situate în același plan, în virtutea paralelismului dreptelor AC și $A'C'$ iar punctele B, C, B' și C' au aceeași proprietate. Planele $ACA'C'$ și $BCB'C'$ trec ambele prin intersecția O a dreptelor AA' și BB', deci și dreapta lor de intersecție CC' va trece prin acest punct. În sfîrșit, avem $OC : OC' = OA : OA'$, deoarece dreptele AC și $A'C'$ sînt paralele. Așadar, orice punct C' al celei de-a doua figuri, exterior planului $ABA'B'$, se obține din omologul său C în prima figură, printr-o omotetie cu centrul în O și care transformă punctul A în A'. Pentru punctele C și C' ale celor două figuri situate în planul $ABA'B'$, se obține același rezultat din paralelismul celor două perechi de drepte AC și $A'C'$, BC și $B'C'$.

Să presupunem acum că dreptele AA' și BB' sînt paralele. În acest caz, raționamente în totul analoge cu cele de mai sus ne vor duce la concluzia că segmentele AA', BB' și CC' sînt egale, paralele și de același sens. În acest caz, a doua figură se obține din prima printr-o translație care poate fi considerată drept un caz limită al omotetiei (cf. nr. **427**).

610. Să considerăm un triplet de puncte necoliniare A, B și C ale primei figuri date F și omoloagele lor A', B' și C' din a doua figură dată (de asemenea necoliniare, din cauza egalității unghiurilor BAC și $B'A'C'$). Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ vor fi asemenea, în virtutea egalității unghiurilor omoloage. Dată fiind asemănarea acestor triunghiuri, există o figură F'', asemenea cu prima figură dată F și avînd proprietatea că punctele A'', B'' și C'', omoloagele punctelor A, B și C, coincid respectiv cu punctele A', B' și C'.

Pentru a obține această figură F'', să considerăm în prealabil figura F_0, direct omotetică cu figura F în raport cu un punct, alegînd astfel raportul de asemănare, încît triunghiului ABC din figura F să-i corespundă, în figura F_0, un triunghi $A_0B_0C_0$,

egal cu $A'B'C'$. Mai departe, considerăm o figură egală cu F_0, în care punctelor A_0B_0 şi C_0 ale figurii F_0 le corespund punctele A', B' şi C' (compară cu nr. **410**); aceasta din urmă va fi tocmai figura căutată F''.

Să considerăm, mai departe, semidreapta AX a figurii F, dusă din punctul A şi perpendiculară pe planul ABC. Omoloaga ei $A'X'$ din figura F' va fi perpendiculară pe planul $A'B'C'$, deoarece $\widehat{B'A'X'} = \widehat{BAX} = 90°$ şi $\widehat{C'A'X'} = \widehat{CAX} = 90°$. Semidreapta $A'X''$ din figura F'', omoloaga aceleiaşi semidrepte AX, va fi de asemenea perpendiculară pe planul $A'B'C'$. Prin urmare, semidreptele $A'X'$ şi $A'X''$ vor coincide, sau se vor situa una în prelungirea celeilalte.

Să presupunem întîi că semidreptele $A'X'$ şi $A'X''$ coincid. În acest caz, considerăm un punct D al figurii F, exterior planului ABC, şi omoloagele sale D' şi D'' din figurile F' şi F''. Triedrul $ABCD$ din figura F va fi egal sau simetric cu triedrul $A'B'C'D'$ din figura F' (datorită egalităţii celor trei unghiuri plane), precum şi cu triedrul $A'B'C'D''$ din figura F''. Prin urmare, şi triedrele $A'B'C'D'$ şi $A'B'C'D''$ vor fi ori egale, ori simetrice. Pentru a stabili care dintre cele două cazuri are loc, vom considera unghiul XAD din figura F şi omoloagele sale $\widehat{X'A'D'}$ şi $\widehat{X'A'D''}$ din figurile F' şi F''. Unghiul XAD este egal atît cu unghiul $X'A'D'$, cît şi cu unghiul $X'A'D''$, deci unghiurile $X'A'D'$ şi $X'A'D''$ sînt egale. De aceea, semidreptele $A'D'$ şi $A'D''$ trebuie să fie situate de aceeaşi parte a planului $A'B'C'$ (cf. nr. **377**, lema). Prin urmare, triedrele $A'B'C'D'$ şi $A'B'C'D''$ nu pot fi simetrice, şi trebuie deci să fie egale. De aceea, semidreptele $A'D'$ şi $A'D''$ coincid, iar în virtutea egalităţii unghiurilor plane $A'B'D'$ şi $A'B'D''$ (ambele egale cu unghiul ABD), coincid şi punctele D' şi D''. Aşadar, orice punct al figurii F', exterior planului $A'B'C'$, coincide cu omologul său din figura F''. Se vede uşor că avem aceeaşi situaţie şi pentru punctele din planul $A'B'C'$. În consecinţă, dacă semidreptele $A'X'$ şi $A'X''$ coincid, atunci figura F' coincide cu F''. Deoarece figura F este asemenea cu F'', figura F va fi asemenea cu F'.

Să presupunem acum că semidreptele $A'X'$ şi $A'X''$ sînt situate de o parte şi de cealaltă a planului $A'B'C'$ şi una este în prelungirea celeilalte. În acest caz, semidreptele $A'D'$ şi $A'D''$ sînt situate de ambele părţi ale planului $A'B'C'$ (dată fiind egalitatea unghiurilor $X'A'D'$ şi $X''A'D''$). Triedrele $A'B'C'D'$ şi $A'B'C'D''$ nu vor fi egale, ci simetrice; semidreptele $A'D'$ şi $A'D''$, deci şi punctele D' şi D'' vor fi simetrice faţă de planul $A'B'C'$. În acest caz, figura F va fi asemenea cu figura F'', simetrica lui F' în raport cu planul $A'B'C'$.

611. Fie figura F asemenea (dar nu egală) cu figura F'. Să construim figura F_0, direct omotetică cu figura F' în raport cu un centru de omotetie arbitrar O şi, totodată, egală cu figura F. Pentru aceasta, este suficient să luăm ca raport de asemănare al figurii F_0 faţă de F' raportul dintre un segment arbitrar al figurii F şi omologul său în figura F'.

Dacă figura F_0 se obţine din figura F, egală cu ea, printr-o translaţie, atunci fiecare segment al figurii F este paralel cu segmentul care îi corespunde în figura F_0, deci şi în figura F', astfel că figurile F şi F' vor fi omotetice (ex. 609). Deoarece propoziţia demonstrată este, evident, valabilă pentru

Scanned with OKEN Scanner

două figuri omotetice (rotația corespunzătoare se reduce la o identitate), este suficient să considerăm cazul în care figura F_0 se obține din F printr-o deplasare elicoidală care nu este o translație (în particular, printr-o rotație).

Deoarece figura F_0 se obține din F printr-o deplasare elicoidală în raport cu o axă s_0, iar figura F' din F_0 printr-o omotetie *directă*, rezultă că oricărei drepte din figura F, paralelă cu s_0, îi va corespunde, în figura F', o dreaptă tot paralelă. Mai mult, oricărui segment din figura F, paralel cu s_0, îi va corespunde, în figura F', un segment paralel cu el și *de același sens* (nu de sens contrar). Sarcina noastră imediată va fi să găsim printre dreptele paralele cu s_0 o dreaptă p având următoarea proprietate: dacă această dreaptă este atribuită figurii F, atunci omoloaga ei în F' va fi aceeași dreaptă p. Este normal să-i dăm acestei drepte denumirea de *dreaptă dublă* a figurilor F și F'.

Pentru a stabili existența unei astfel de drepte duble, considerăm un plan arbitrar σ, perpendicular pe dreapta s_0. Fie S un punct arbitrar al planului σ. Prin punctul S trece o dreaptă s, paralelă cu s_0. Dacă vom atribui dreapta s figurii F, atunci îi va corespunde, în figura F', o dreaptă s', paralelă cu ea. Să notăm cu S' intersecția dreptei s' cu planul σ. Dacă fiecărui punct S din planul σ vom face să-i corespundă în acest mod un punct S' din același plan, vom obține o asemănare: figura formată de punctele S, S_1, ... din planul σ va fi asemenea cu figura formată de omoloagele lor S', S'_1,... din același plan (subliniem că, în general, punctului S, ca punct al figurii F, *nu* îi va corespunde punctul S' în figura F'). În adevăr, raportul dintre distanțele a două puncte S și S_1 și distanțele omoloagelor lor S' și S'_1 va fi evident egal cu raportul de asemănare al figurilor F și F', deoarece distanța SS_1 este egală cu distanța dintre dreptele s și s_1 ale figurii F, iar distanța $S'S'_1$ este egală cu distanța dintre omoloagele lor s' și s'_1 din figura F'.

De aici rezultă, în virtutea nr. **150** sau în virtutea exercițiului 161 din Geometria plană[1]), că în planul σ se va găsi un punct dublu al figurilor SS_1 ... și $S'S'_1$..., adică un punct P_0 care, în corespondența descrisă mai sus dintre punctele S și S', va avea ca omolog același punct P_0. Dreptei p, care trece prin punctul P_0 și este perpendiculară pe σ, ca dreaptă a figurii F, îi va corespunde, evident, aceeași dreaptă p în figura F'. Dreapta p va fi tocmai dreapta dublă a figurilor F și F'.

Să găsim, mai departe, pe dreapta p un punct P având următoarea proprietate: dacă atribuim punctul P figurii F, atunci îi va corespunde în figura F' același punct P. Este firesc ca acest punct să fie denumit *punct dublu* al figurilor F și F'.

Pentru a stabili existența unui astfel de punct dublu, să considerăm ca puncte ale figurii F două puncte oarecare M și N ale dreptei p și să notăm cu M' și cu N' omoloagele lor în figura F', de asemenea situate pe dreapta p. În acest caz, segmentul MN, care aparține figurii F și este paralel cu dreapta s_0, va avea același sens ca și segmentul $M'N'$, după cum am mai menționat

---

[1]) S-ar fi putut demonstra că figurile asemenea SS_1... și $S'S'_1$... au întotdeauna, în planul σ, același sens de rotație, astfel că, în realitate, este întotdeauna suficient să aplicăm cele de la nr. **150**.

(fig. 158). Să împărțim exterior segmentul MM' prin punctul P în raportul $MN : M'N'$; vom avea, ca mărime și ca semn, $PM : PM' = MN : M'N' = PN : PN'$ sau $PM : PN = PM' : PN'$. Punctului P al figurii F, care împarte exterior segmentul MN în raportul $PM : PN$, îi va corespunde, în figura F', punctul care împarte segmentul $M'N'$ în același raport ca mărime și ca semn, adică (cf. ultimei egalități) același punct P. În consecință, P va fi un punct dublu al figurilor F și F'.

Să construim acum iarăși o figură F^*, direct omotetică cu figura F' și, totodată, egală cu figura F, luînd de astă dată ca centru de omotetie, nu un punct arbitrar O, cum am procedat mai sus, ci punctul dublu P al figurilor F și F'. În acest caz, punctul P și dreapta p din figura F vor coincide cu omologele lor din figura F', deci și din figura F^*; mai mult, un sens ales arbitrar pe dreapta p, ca dreaptă a figurii F, va coincide, în virtutea celor arătate mai sus, cu sensul omolog pe aceeași dreaptă în figura F', deci și în figura F^*. Deoarece figura F este egală cu F^*, orice punct al dreptei p, ca punct al figurii F, coincide cu omologul său din figura F^*. De aici urmează (**411**) că figura F^* se obține din F cu ajutorul unei rotații în jurul dreptei p.

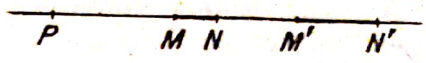


Fig. 158

În consecință, figura F poate fi făcută să coincidă cu figura F', asemenea cu ea, printr-o rotație în jurul axei p (care o face să coincidă cu F^*), *urmată de o omotetie directă în raport cu punctul P de pe axa p.*

Pînă acum, am presupus că figura F este asemenea cu F'. Să presupunem acum că figura F este asemenea cu simetrica lui F', deci asemenea și cu figura F_0, *invers* omotetică cu F' în raport cu un centru de omotetie arbitrar O. Raportul de asemănare al figurii F_0 în raport cu figura F' poate fi astfel ales, încît figura F să fie nu numai asemenea cu F_0, ci și egală.

Reluînd aproape cuvînt cu cuvînt raționamentele de mai sus, ajungem la următorul rezultat:

Două figuri dintre care una este asemenea cu simetrica celeilalte pot fi făcute să coincidă printr-o rotație, urmată de o omotetie inversă în raport cu un punct de pe axa de rotație.

612. Să presupunem că două figuri oarecare sînt omotetice în trei moduri diferite. Cu alte cuvinte, vom presupune că există trei omotetii distincte care transformă prima figură în a doua. Fie AB un segment arbitrar al primei figuri; $A'B'$, $A''B''$ și $A'''B'''$ segmentele din a doua figură, care corespund segmentului AB în aceste trei omotetii. Printre cele trei segmente $A'B'$, $A''B''$ și $A'''B'''$, paralele cu segmentul AB, se vor găsi două segmente orientate în același sens; fie acestea segmentele $A'B'$ și $A''B''$.

Segmentele $A'B'$ și $A''B''$ pot fi egale sau nu. Vom presupune inițial că ele nu sînt egale și chiar, pentru a fixa ideile, că $A'B'$ este mai mic decît $A''B''$. În acest caz, omotetia care transformă segmentul $A'B'$ în $A''B''$ transformă figura a doua în ea însăși. În adevăr, omotetia care transformă segmentul $A'B'$ și AB transformă a doua figură în prima, iar omotetia care transformă segmentul AB în $A''B''$ transformă înapoi prima figură în a doua; aceste două omotetii însă, efectuate consecutiv, sînt echivalente cu o singură omotetie care transformă segmentul $A'B'$ în $A''B''$ (cf. nr. **427**).

Așadar, a doua figură trebuie să se transforme în sine însăși prin omotetia care duce segmentul $A'B'$ în $A''B''$. Pentru o figură mărginită din toate părțile, însă, aceasta este imposibil, deoarece, aplicînd succesiv aceeași omotetie de un număr suficient de ori, am putea obține dintr-un anumit segment aparținînd acestei figuri, un șir de segmente care cresc nemărginit (în virtutea faptului că $A'B' < A''B''$), aparținînd aceleeași figuri.

Dacă segmentele $A'B'$ și $A''B''$ ar fi egale, atunci, în locul omotetiei care transformă segmentul $A'B'$ în $A''B''$, am obține o translație avînd aceeași proprietate. Ar exista o translație care transformă a doua figură dată în ea însăși. Însă pentru o figură mărginită din toate părțile, acest lucru este iarăși imposibil (compară cu soluția ex. 602)

Așadar, am demonstrat că două figuri mărginite din toate părțile nu pot fi omotetice mai mult decît în două moduri.

613. Să presupunem că omoloagele celor trei puncte A, B și C, într-o omotetie oarecare, sînt situate respectiv în cele trei plane date P', Q' și R'.

Ducem prin punctele A, B și C planele P, Q și R, respectiv paralele cu planele P', Q' și R'. Dacă punctelor A, B și C le corespund puncte situate în planele P', Q' și R', atunci planelor P, Q și R le vor corespunde planele P', Q' și R', și reciproc. Așadar, problema se reduce la aflarea locului geometric al centrelor omotetiilor care transformă cele trei plane date P, Q și R în cele trei plane date P', Q' și R', planul P fiind paralel cu planul P', planul Q cu Q' și planul R cu R'.

Dacă cele trei plane date P', Q' și R' se taie într-un punct S', atunci și cele trei plane P, Q și R, paralele cu primele trei, vor fi concurente într-un punct S. Punctului S trebuie să-i corespundă, în oricare dintre omotetiile considerate, punctul S'. Locul geometric căutat al centrelor de omotetie va fi deci, evident, dreapta SS' (cu excepția punctelor S și S'), dat fiind că orice punct al acestei drepte, distinct de S și de S', poate fi luat ca centru; raportul de asemănare corespunzător trebuie astfel ales, încît punctului S să-i corespundă punctul S'.

Dacă cele trei plane date P', Q' și R' se taie două cîte două după trei drepte paralele sau dacă trec toate prin aceeași dreaptă, atunci pentru planele P, Q și R este posibilă atît una dintre aceste situații, cît și cealaltă. Dacă planele P', Q' și R' se intersectează după trei drepte paralele, iar planele P, Q și R trec toate prin aceeași dreaptă, sau invers, problema nu are soluții, întrucît, în orice omotetie, unor plane care trec prin aceeași dreaptă le corespund de asemenea plane care trec printr-o dreaptă.

Să trecem acum la cazul în care planele date P', Q' și R' se intersectează două cîte două după trei drepte paralele p', q' și r' (p' este intersecția planelor Q' și R', q' a planelor R' și P', r' a planelor P' și Q'), iar planele P, Q și R după cele trei drepte p, q și r. Dat fiind că oricare dintre omotetiile căutate transformă dreapta p în p', iar dreapta q în q', locul geometric al centrelor de omotetie nu poate fi decît dreapta de intersecție a planului care trece prin dreptele p și p' cu planul care trece prin dreptele q și q' (dacă aceste două plane sînt paralele, problema nu are soluții). Se vede ușor că orice punct al acestei drepte de intersecție este efectiv unul dintre centrele de omotetie considerate.

Nu vom insista asupra analizei celorlalte cazuri particulare posibile.

Scanned with OKEN Scanner

614. Să presupunem că dreapta care corespunde dreptei date D, în una dintre omotetiile considerate, taie a doua dreaptă dată D' într-un punct A'. Să notăm cu A punctul de pe dreapta D căruia îi corespunde, în această omotetie, punctul A'. În acest caz, centrul de omotetie S corespunzător este situat pe dreapta AA' şi împarte segmentul $A'A$ în raportul

$$\frac{SA'}{SA} = k, \tag{1}$$

unde k este raportul de asemănare dat (ca mărime şi ca semn).

Reciproc, dacă A este un punct al dreptei D, A' un punct al dreptei D', iar S un punct al dreptei AA' care satisface condiţia (1), atunci omotetia de centru S şi cu raportul de asemănare k transformă punctul A în punctul A', şi deci dreapta D într-o dreaptă care trece prin punctul A' şi taie în acest punct dreapta D' (dacă D şi D' nu sînt paralele).

Dacă dreptele D şi D' nu sînt situate în acelaşi plan, atunci problema se reduce astfel imediat la aceea considerată în exerciţiul 432, iar locul geometric al punctelor S este un plan paralel cu dreptele D şi D'.

Dacă dreptele D şi D' se taie, locul geometric al punctelor S este un plan care conţine aceste drepte (cu excepţia punctelor dreptelor înseşi). În adevăr, prin orice punct al acestui din urmă plan, putem duce o dreaptă, astfel ca un segment al ei, cuprins între dreptele D şi D', să fie împărţit de acest punct în raportul dat (compară cu soluţia ex. 165).

În sfîrşit, dacă dreptele D şi D' sînt paralele, problema îşi pierde sensul, deoarece dreapta omoloagă, într-o omotetie, cu dreapta D este ori paralelă cu D', ori coincide cu ea.

615. Fie de aflat locul geometric al dreptelor care trec prin punctul O şi se bucură de proprietatea că segmentele acestor drepte, cuprinse între două plane date P şi Q, sînt împărţite de punctul O într-un raport dat (ca mărime şi ca semn).

Fie AA' unul dintre aceste segmente, şi anume astfel ca punctul A să se afle în planul P, punctul A' în planul Q şi

$$\frac{OA}{OA'} = k,$$

unde k este raportul dat. În acest caz, punctul A' se poate obţine din punctul A cu ajutorul unei anumite omotetii, al cărei centru este punctul dat O, iar raportul de asemănare este $OA' : OA = 1 : k$. Deoarece punctul A se află în planul P, punctul A' trebuie să fie situat într-un plan P', care este omologul lui P în această omotetie.

Totodată, punctul A' este situat în planul dat Q, deci el se află pe dreapta de intersecţie a planelor P' şi Q. Reciproc, orice punct de pe această dreaptă este, cum rezultă din cele de mai sus, extremitatea unuia dintre segmentele căutate. De aceea, locul geometric căutat este, în cazul general, un plan care trece prin punctul O şi prin intersecţia planelor P' şi Q. Nu există drepte care trec prin planul O şi se bucură de proprietatea cerută, dacă planele P' şi Q (deci şi planele P şi Q) sînt paralele; toate dreptele care trec prin punctul O

se bucură de această proprietate, dacă planele P' și Q coincid (deci planele P și Q sînt paralele).

Fie date acum trei plane P, Q și R, care trec prin aceeași dreaptă, și un punct O; se cere să aflăm locul geometric al dreptelor care trec prin punctul O și au proprietatea că raportul $AB : AC$, unde A, B și C sînt punctele de intersecție ale dreptei considerate respectiv cu planele P, Q și R, are o valoare dată (ca mărime și ca semn).

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom observa *că trei plane date care se intersectează după aceeași dreaptă determină pe două secante paralele arbitrare segmente proporționale*. În adevăr, să presupunem că una dintre secantele paralele taie planele P, Q și R respectiv în punctele A, B, și C, iar a doua în punctele A', B' și C'; în planul care trece prin aceste două drepte, vom avea trei drepte concurente sau, într-un caz particular, paralele (intersecțiile sale cu cele trei plane date) tăiate de cele două secante paralele date, de unde deducem (**121**) $AB : AC = A'B' : A'C'$.

De aici rezultă că dreptele paralele cu cele căutate și care trec printr-un punct dat A al planului P se bucură de proprietatea că segmentele acestor drepte, cuprinse între planele Q și R, sînt împărțite de acest punct într-un raport dat. Deoarece aceste drepte formează, în general, un plan, după cum s-a demonstrat în prima parte a soluției noastre rezultă că și dreptele paralele cu ele, care trec prin punctul O și au proprietatea cerută, vor determina și ele, în cazul general, un plan. În consecință, locul geometric căutat este în general un plan.

616. Fie date poliedrele P și Q'; se cere să aflăm un poliedru Q, asemenea cu Q', astfel încît să aibă loc egalitatea

$$\text{vol. } P : \text{vol. } Q = \text{aria } P : \text{aria } Q. \qquad (1)$$

Să notăm cu k raportul necunoscut dintre o muchie oarecare a poliedrului căutat Q și muchia omoloagă a poliedrului Q'. Vom avea vol. $Q = k^3 \cdot$ vol Q'; aria $Q = k^2 \cdot$ aria Q'. Substituind aceste expresii în egalitatea (1) obținem

$$k = \frac{\text{vol. } P}{\text{vol. } Q'} : \frac{\text{aria } Q}{\text{aria } Q'}.$$

Prin această valoare a lui k, poliedrul căutat Q, asemenea cu Q', este complet determinat.

PROBLEMELE LA CARTEA A ȘAPTEA

617. 1° Fie muchia AB a tetraedrului $ABCD$ egală cu muchia $A'B'$ a tetraedrului $A'B'C'D'$, diedrul de muchie AB din primul tetraedru egal cu diedrul de muchia $A'B'$ din al doilea și fețele ABC și ABD din primul tetraedru respectiv egale cu fețele $A'B'C'$ și $A'B'D'$ din al doilea. Să alegem astfel notațiile, încît muchia AC a fetei ABC din primul tetraedru să fie egală cu muchia $A'C'$ (nu cu $B'C'$) a fetei $A'B'C'$ din al doilea. Deoarece elementele egale ale celor două tetraedre se dispun, conform ipotezei, în aceeași ordine, muchia AD a primului tetraedru, dusă din extremitatea comună a muchiilor AB și AC, este egală cu muchia celui de-al doilea, dusă din extremitatea

comună muchiilor omoloage $A'B'$ şi $A'C'$, adică cu muchia $A'D'$ (nu cu $B'D'$). Aşadar avem, în afară de egalitatea $AB = A'B'$ şi de egalitatea diedrelor de muchii AB şi $A'B'$, egalităţile $AC = A'C'$ şi $AD = A'D'$, deci şi egalităţile $BC = B'C'$ şi $BD = B'D'$.

Să construim punctul D'', simetricul lui D' în raport cu planul $A'B'C'$; vom avea $A'D'' = A'D' = AD$ şi $B'D'' = B'D' = BD$, de unde (în virtutea egalităţii $AB = A'B'$) deducem $\widehat{D''A'B'} = \widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB}$.

Să deplasăm acum tetraedrul $ABCD$, astfel ca faţa sa ABC să coincidă cu $A'B'C'$, iar laturile ei AB,AC şi BC să coincidă respectiv cu laturile $A'B'$, $A'C'$ şi $B'C'$[1]). În virtutea egalităţii diedrelor $\widehat{C \cdot AB \cdot D}$, $\widehat{C' \cdot A'B' \cdot D'}$ şi $\widehat{C' \cdot A'B' \cdot D''}$, de muchiile AB şi $A'B'$ (v. nr. **421** *bis*, Cor. III), semiplanul dus prin dreapta AB şi care trece prin punctul D va coincide cu unul dintre cele două semiplane duse prin dreapta $A'B'$ şi care trec respectiv prin punctele D' şi D''. În acest caz, semidreapta AD va coincide respectiv cu semidreapta $A'D'$ sau $A'D''$ (în virtutea egalităţii unghiurilor BAD, $B'A'D'$ şi $B'A'D''$), iar punctul D cu punctul D' sau D'' (în virtutea egalităţii segmentelor AD, $A'D'$ şi $A'D''$). Prin urmare, tetraedrul $ABCD$ coincide, fie cu tetraedrul dat $A'B'C'D'$, fie cu tetraedrul $A'B'C'D''$, simetricul acestuia.

În primul caz, tetraedrele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sînt egale, în al doilea, sînt simetrice.

2° Fie triedrul cu vîrful în A al tetraedrului $ABCD$ egal sau simetric cu triedrul cu vîrful în A' al tetraedrului $A'B'C'D'$, iar muchiile AB,AC şi AD ale primului tetraedru respectiv egale cu muchiile $A'B'$,$A'C'$ şi $A'D'$ ale celui de-al doilea, Deoarece, conform ipotezei, elementele egale ale celor două tetraedre se dispun în aceeaşi ordine, unghiurile plane BAC şi BAD, precum şi diedrul de muchie AB vor fi respectiv egale cu unghiurile plane $B'A'C'$ şi $B'A'D'$ şi cu diedrul de muchie $A'B'$.

Feţele ABC şi $A'B'C'$ ale celor două tetraedre vor fi atunci egale (deoarece $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$), şi acelaşi lucru va avea loc şi pentru feţele ABD şi $A'B'D'$. Aşadar, tetraedrele date au cîte o muchie egală AB şi $A'B'$ şi cîte un diedru egal, de aceste muchii şi cuprins între feţele respectiv egale, deci ele vor fi egale sau simetrice după primul caz considerat mai sus.

3° Fie faţa ABC a tetraedrului $ABCD$ egală cu faţa $A'B'C'$ a tetraedrului $A'B'C'D'$, iar diedrele alăturate acestei feţe în primul tetraedru respectiv egale cu diedrele alăturate feţei $A'B'C'$ a celui de-al doilea. Vom alege astfel notaţiile, încît să avem $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ şi $AB = A'B'$. Deoarece elementele egale ale celor două tetraedre se dispun, potrivit ipotezei, în aceeaşi ordine, diedrele de muchii BC, CA şi AB din primul tetraedru vor fi respectiv egale cu diedrele de muchii $B'C'$, $C'A'$ şi $A'B'$ din al doilea.

În acest caz, cele două triedre de vîrfuri A şi A' din cele două tetraedre vor fi egale sau simetrice (deoarece $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ şi diedrele de mu-

[1]) Această din urmă rezervă este necesară, deoarece dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci faţa ABC poate fi făcută să coincidă cu faţa $A'B'C'$ şi într-un alt mod.

chii AB și AC sînt respectiv egale cu diedrele de muchii $A'B'$ și $A'C'$; cf. nr. **379**, cazul 1), din care cauză unghiurile plane BAD și $B'A'D'$ vor fi egale. Analog, triedrele cu vîrfurile în B și în B' ale celor două tetraedre vor fi egale sau simetrice, și unghiurile plane ABD și $A'B'D'$ vor fi egale. Așadar, vor fi egale și fețele ABD și $A'B'D'$ ale celor două tetraedre ($AB = A'B'$, $\widehat{BAD} = \widehat{B'A'D'}$, $\widehat{ABD} = \widehat{A'B'D'}$). Prin urmare, tetraedrele considerate vor fi iarăși egale sau simetrice, după primul caz considerat mai sus.

4° Fie muchia AB a tetraedrului $ABCD$ egală cu muchia $A'B'$ a tetraedrului $A'B'C'D'$, iar triedrele de vîrfuri A și B din primul tetraedru ambele egale sau ambele simetrice respectiv cu triedrele de vîrfuri A' și B' din al doilea. Deoarece, conform ipotezei, elementele egale ale celor două tetraedre sînt dispuse în aceeași ordine, diedrul comun de muchie AB al triedrelor cu vîrfurile în A și în B va fi egal cu diedrul de muchie $A'B'$. Să alegem, mai departe, notațiile astfel ca unghiul plan BAC al triedrului cu vîrful în A să fie egal cu unghiul plan $B'A'C'$ (nu cu unghiul plan $B'A'D'$); în acest caz, unghiurile plane BAD și CAD vor fi și ele respectiv egale cu unghiurile $B'A'D'$ și $C'A'D'$. Analog, unghiurile plane ABC, ABD și CBD vor fi respectiv egale cu unghiurile $A'B'C'$, $A'B'D'$ și $C'B'D'$. Prin urmare, vor fi egale și fețele ABC și $A'B'C'$ (deoarece $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$), precum și fețele ABD și $A'B'D'$. Cele două tetraedre vor fi iarăși egale sau simetrice, după primul caz considerat mai sus.

5° Fie notațiile astfel alese, încît în cele două tetraedre $ABCD$ și $A'B'C'D'$ să aibă loc egalitățile $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AD = A'D'$, $BC = B'C'$, $BD = B'D'$ și $CD = C'D'$; această alegere a notațiilor este posibilă, deoarece, potrivit ipotezei, elementele egale ale celor două tetraedre sînt așezate în aceeași ordine și, de aceea, la trei muchii din primul tetraedru, situate în aceeași față, corespund, în al doilea, muchiile egale, situate de asemenea în aceeași față, iar la trei muchii cu un vîrf comun din primul corespund trei muchii de asemenea cu un vîrf comun din al doilea.

Fețele omoloage ale celor două tetraedre vor fi egale (datorită egalității laturilor), deci vor fi egale și unghiurile plane omoloage. Mai departe, triedrele cu vîrfurile în A și în A' vor fi egale sau simetrice (datorită egalității celor trei unghiuri plane) și, de aceea, vor fi egale și diedrele de muchie AB și $A'B'$. Așadar, cele două tetraedre vor fi egale sau simetrice, după cazul întîi considerat mai sus.

618. Cazurilor de egalitate a tetraedrelor, considerate în problema 617, le corespund următoarele cazuri de asemănare:

Două tetraedre sînt asemenea sau unul dintre ele este asemenea cu simetricul celuilalt:

1) *dacă au cîte un diedru egal cuprins între fețe respectiv asemenea;*

2) *dacă au cîte un triedru egal sau simetric, format de muchii respectiv proporționale;*

3) *dacă una dintre fețele primului tetraedru este asemenea cu una dintre fețele celui de-al doilea și dacă diedrele alăturate acestor fețe sînt respectiv egale;*

4) *dacă două triedre ale unui tetraedru sînt respectiv egale sau respectiv simetrice cu două triedre ale celui de-al doilea;*

5) *dacă muchiile unui tetraedru sînt proporţionale cu muchiile celui de-al doilea.*

Totodată, se presupune, în fiecare caz, că elementele omoloage ale celor două tetraedre au aceeaşi aşezare.

Să trecem la demonstraţia primului caz. Fie diedrul de muchie AB din tetraedrul $ABCD$ egal cu diedrul de muchie $A'B'$ din tetraedrul $A'B'C'D'$, iar feţele primului tetraedru, care formează acest diedru, respectiv asemenea cu feţele celui de-al doilea, care formează diedrul omolog. Să alegem astfel notaţiile, încît faţa ABC să fie asemenea cu faţa $A'B'C'$ (nu cu faţa $A'B'D'$), iar faţa ABD cu faţa $A'B'D'$, şi ca muchiile AC, BC, AD şi BD să corespundă, în aceste asemănări, muchiilor $A'C'$, $B'C'$, $A'D'$ şi $B'D'$. Vom mai presupune, pentru a fixa ideile, că $AB > A'B'$.

Luăm pe muchia AB, din vîrful A, segmentul $AB_0 = A'B'$, ducem prin punctul B_0 două drepte respectiv paralele cu dreptele BC şi BD şi notăm cu C_0 şi cu D_0 intersecţiile acestor drepte cu muchiile AC şi AD. În acest caz, feţele AB_0C_0 şi AB_0D_0 ale tetraedrului $AB_0C_0D_0$ vor fi respectiv egale cu feţele $A'B'C'$ şi $A'B'D'$ ale tetraedrului $A'B'C'D'$. Tetraedrul $AB_0C_0D_0$ va fi direct omotetic cu tetraedrul $ABCD$ şi, totodată, egal sau simetric cu tetraedrul $A'B'C'D'$, în virtutea primului caz considerat la problema 617. Aşadar, tetraedrul $ABCD$ este ori asemenea cu tetraedrul $A'B'C'D'$ (după definiţia figurilor asemenea, dată la nr. **429**), ori asemenea cu tetraedrul $AB_0C_0D_0$, simetricul lui $A'B'C'D'$ (omotetia fiind un caz particular de asemănare).

Celelalte cazuri de asemănare (2) — (5), enunţate mai sus, se deduc pe aceeaşi cale din cazurile corespunzătoare de egalitate sau de simetrie, tratate în problema 617.

619. Să supunem punctul B unei rotaţii în jurul axei D, alegînd astfel unghiul de rotaţie, încît transformatul punctului B să fie situat în planul care trece prin punctul A şi prin dreapta D. Aceasta se poate face în două moduri, şi anume astfel că unul dintre punctele transformate, pe care îl vom nota cu B', va fi situat de părţi diferite ale dreptei D cu punctul A, iar al doilea, pe care îl vom nota cu B'' de aceeaşi parte.

Deoarece, pentru orice punct M al dreptei D, avem $MB = MB'$, pentru orice punct M are loc egalitatea $AM + MB = AM + MB'$, iar suma $AM + MB$ va fi minimă, dacă punctul M de pe dreapta D va fi situat pe dreapta AB' (compară cu soluţia ex. 13).

Mai departe, dat fiind că, pentru orice punct N de pe dreapta D, avem $NB = NB''$, rezultă că, pentru orice punct, are loc egalitatea $NA - NB = NA - NB''$ şi diferenţa $NA - NB$ va fi maximă (în valoare absolută), dacă punctul N al dreptei D se află pe dreapta AB'' (compară cu soluţia ex. 15).

620. Fie de găsit, pe dreapta D, un punct, astfel ca suma distanţelor sale la două drepte paralele date D_1 şi D_2 să fie minimă.

Să tăiem dreptele D_1 şi D_2 în punctele A_1 şi A_2 printr-un plan P, perpendicular pe ele, şi să notăm cu d proiecţia dreptei D pe planul P. În acest caz, distanţele oricărui punct M de pe dreapta D la fiecare dintre dreptele D_1 şi D_2 vor fi respectiv egale cu segmentele mA_1 şi mA_2, unde m este proiecţia punc-

tului M pe planul P (situată pe dreapta d). Așadar, problema a fost redusă la următoarea: să se afle, în planul P, pe dreapta d, un punct m pentru care suma $mA_1 + mA_2$ să fie minimă.

Această problemă se rezolvă cum s-a arătat la soluția exercițiului 13.

621. 1° Să presupunem că planul P împarte în punctul M_0 segmentul MM' nu în părți egale, ci într-un raport $M_0M : M_0M' = k$ dat (ca mărime și ca semn).

Enunțurile propozițiilor de la exercițiul 604, 1° și 2° nu se schimbă de loc.

Demonstrația dată la timpu ăău pentru prima dintre aceste propoziții își păstrează valabilitatea, cu condiția de a înlocui egalitățile $A_0A = A_0A'$ și $M_0M = M_0M'$ prin egalitățile $A_0A : A_0A' = k$ și $M_0M : M_0M' = k$. Demonstrația celei de-a doua propoziții subsistă fără nici un fel de modificări.

Propoziția de la exercițiul 604, 3° se înlocuiește prin următoarea:

3° *a*) *Raportul dintre volumele a două poliedre care se obțin unul din celălalt prin transformarea considerată este egal cu valoarea absolută a raportului* $M_0M : M_0M' = k$, în *care planul* P *împarte fiecare segment* MM' care *unește două puncte omoloage.*

Pentru demonstrație, vom presupune întîi (ca la soluția ex. 604) că poliedrul dat este o prismă triunghiulară sau un trunchi de prismă triunghiulară avînd muchiile laterale paralele cu dreapta D. În acest caz, poliedrul transformat va fi tot o prismă triunghiulară sau un trunchi de prismă triunghiulară. Raportul dintre fiecare muchie a primei prisme sau a primului trunchi de prismă și muchia omoloagă a celei de-a doua va fi egală cu valoarea absolută a raportului dat k. Totodată, cele două prisme sau trunchiuri de prismă vor avea secțiuni perpendiculare egale. Prin urmare, în acest caz, valabilitatea propoziției demonstrate rezultă din expresia volumului unui trunchi de prismă triunghiulară (**409**, Cor.).

Trecerea la o prismă sau la un trunchi de prismă oarecare și apoi la un poliedru arbitrar se efectuează exact la fel ca în soluția exercițiului 604.

2° Să considerăm acum generalizarea transformării date la exercițiul 605.

Să presupunem că dreapta D împarte segmentul MM' în punctul M_0, nu în părți egale, ci într-un raport $M_0M : M_0M' = k$ dat (ca mărime și ca semn).

Vom începe prin a arăta cum se generalizează cele două descompuneri ale transformării considerate la exercițiul 605, pe care le-am folosit în prima soluție și în a doua soluție ale acestui exercițiu.

Prima descompunere (în două simetrii oblice în raport cu un plan; fig. 154) este înlocuită, în cazul de față, printr-o descompunere în totul analogă în două transformări de tipul celor considerate la 1°. În acest caz, egalitățile $M_1M = M_1M''$, $M_0M = M_0M'$ și $M_2M'' = M_2M'$ se înlocuiesc prin egalitățile $M_1M : M_1M'' = k$, $M^0M : M_0M' = k$ și $M_2M'' : M_2M' = k$.

Să considerăm acum descompunerea din a doua soluție a exercițiului 605 (într-o simetrie oblică în raport cu un plan și într-o simetrie față de un punct; fig. 155). Simetria în raport cu punctul O este înlocuită printr-o omotetie față de același punct, deci vom avea $OM'' : OM' = M_0M : M_0M' = k$. Simetria oblică în raport cu planul P este înlocuită printr-o transformare mai generală, considerată la 1°, și avem $M_1M : M_1M'' = OM' : OM'' = 1 : k$.

Ambele descompuneri arată că propoziţiile de la exerciţiul 604, 1° şi 2° îşi păstrează iarăşi valabilitatea. Cît priveşte propoziţia de la 3°, ea devine

3° b) *Raportul dintre volumele a două poliedre care se obţin unul din celălalt prin transformarea considerată este egal cu pătratul raportului* $M_0M:M_0M'$ *în care dreapta* D *împarte fiecare segment* MM' *care uneşte două puncte omoloage.*

Valabilitatea acestei propoziţii rezultă, cu ajutorul oricăreia dintre cele două descompuneri de mai sus, din teorema enunţată la 3°a şi din teorema referitoare la raportul dintre volumele unor poliedre asemenea.

622. La rezolvarea acestei probleme, vom folosi următoarea propoziţie:

Să presupunem că o anumită deplasare este descompusă, o dată în două transpoziţii consecutive, anume în raport cu axa D_1 *şi apoi în raport cu axa* D, *iar a doua oară în două transpoziţii consecutive, anume în raport cu aceeaşi axă* D, *iar apoi în raport cu o axă* D_2; *în acest caz, axele* D_1 *şi* D_2 *se obţin una din cealaltă printr-o transpoziţie în raport cu axa* D.

Pentru demonstraţie, vom considera un punct M de pe axa D_1 şi punctul M', omologul lui M în deplasarea considerată. Deoarece această deplasare este rezultanta a două transpoziţii în raport cu axele D_1 şi D, iar punctul M rămîne pe loc în transpoziţia faţă de axa D_1, înseamnă că punctul M' se obţine din M cu ajutorul unei transpoziţii în raport cu axa D. Pe de altă parte, punctul M' se obţine din M printr-o transpoziţie în raport cu axa D, urmată de o transpoziţie în raport cu axa D_2, deoarece deplasarea considerată este rezultanta acestor două transpoziţii. De aici rezultă că punctul M' rămîne pe loc la transpoziţia în raport cu axa D_2 şi este deci situat pe această axă. Aşadar, transpoziţia în raport cu axa D transformă efectiv orice punct M al axei D_1 într-un punct M' al axei D_2.

Trecem la rezolvarea problemei noastre. Fie A axa rotaţiei considerate, iar D perpendiculara comună dreptei A şi unei drepte paralele cu direcţia translaţiei date.

Descompunem rotaţia considerată în două transpoziţii, dintre care *a doua* are ca axă dreapta D, şi notăm cu D_1, axa primei transpoziţii. Translaţia considerată o descompunem de asemenea în două transpoziţii, dintre care *prima* are ca axă dreapta D şi notăm cu D' axa celei de-a doua transpoziţii. În aceste condiţii, atît axa D_1 cît şi axa D' vor fi perpendiculare, cum se vede uşor, pe A şi nu vor fi paralele între ele. Dacă vom efectua întîi rotaţia în jurul axei A, iar apoi translaţia, deplasarea rezultantă va fi echivalentă cu două transpoziţii consecutive în raport cu axele D_1 şi D'. Prin urmare, axa A_1 a deplasării rezultante va fi perpendiculara comună dreptelor D_1 şi D' şi va avea deci aceeaşi direcţie ca şi A. Totodată, axa A_1 va fi distinctă de A; în adevăr, dreapta D' nu taie axa A, deoarece direcţia translaţiei date nu este paralelă cu A. Aşadar, axa A_1 este paralelă cu axa A.

Fie acum modificată ordinea celor două deplasări pe care le compunem, astfel ca întîi să efectuăm translaţia dată, iar apoi rotaţia dată. Descompunem acum translaţia dată în două transpoziţii, dintre care *a doua* are ca axă dreapta D, şi notăm cu D'' axa primei transpoziţii. Analog, descompunem rotaţia dată în două transpoziţii, dintre care *prima* are ca axă dreapta D, şi notăm cu D_2 axa celei de-a două transpoziţii. Deplasarea rezultantă va fi compusă acum din două transpoziţii în raport cu axele D'' şi cu D_2. Prin urmare, axa A_2

a acestei deplasări va coincide cu perpendiculara comună a dreptelor D'' și D_2 și va fi de asemenea paralelă cu axa A.

Deoarece rotația dată a fost descompusă o dată în două transpoziții în raport cu axele D_1 și D, iar a doua oară în două transpoziții față de axele D și D_2, rezultă, în virtutea propoziției demonstrate mai sus, că axele D_1 și D_2 se obțin una din cealaltă printr-o transpoziție de axă D. Evident, același lucru are loc și pentru transpozițiile de axe D' și D''. De aceea, și *dreapta* A_2, perpendiculara comună a dreptelor D_2 și D'', *se obține din dreapta* A_1, perpendiculara comună a dreptelor D_1 și D', *printr-o transpoziție în raport cu dreapta* D.

Transpoziția în raport cu dreapta D poate fi descompusă (v. soluția ex. 600) în două simetrii: în raport cu planul P, care trece prin dreptele A și D, și în raport cu planul Q, care trece prin dreapta D și este perpendicular pe dreapta A. Deoarece transpoziția în raport cu dreapta D transformă dreptele A_1 și A_2 una în cealaltă, iar simetria în raport cu planul Q, perpendicular pe aceste două drepte, le transformă pe fiecare în ea însăși, axele A_1 și A_2 ale celor două deplasări rezultante sînt una simetrica celeilalte în raport cu planul P.

623. Fie A și B axele deplasărilor date (în aceste condiții, putem alege ca axă a translației orice dreaptă paralelă cu direcția deplasării), iar D perpendiculara comună celor două axe.

Să descompunem prima deplasare dată, cea de axă A, în două transpoziții, dintre care *a doua* are ca axă dreapta D, și să notăm cu D_1 axa primei transpoziții. Analog, descompunem a doua deplasare dată, cea de axă B, în două transpoziții, dintre care *prima* are ca axă dreapta D, și notăm cu D' axa celei de-a doua transpoziții. Dacă vom efectua întîi deplasarea de axă A, iar apoi deplasarea de axă B, deplasarea rezultantă va fi echivalentă cu două transpoziții consecutive în raport cu axele D_1 și D' și va avea, deci, ca axă perpendiculara comună C_1 a acestor două drepte.

Pentru a efectua acum compunerea celor două deplasări date, luate în în ordinea inversă, vom descompune prima deplasare dată, cea de axă A, în două transpoziții, dintre care *prima* are ca axă dreapta D, și vom nota cu D_2 axa celei de-a doua transpoziții. Analog, vom descompune a doua deplasare dată, cea de axă B, în două transpoziții, dintre care *a doua* are ca axă dreapta D, și vom nota cu D'' axa primei transpoziții. Dacă vom efectua acum întîi deplasarea de axă B, iar apoi deplasarea de axă A, deplasarea rezultantă va fi echivalentă cu două transpoziții consecutive în raport cu axele D'' și D_2 și va avea deci ca axă pe C_2, perpendiculara comună a acestor două drepte.

Deplasarea de axă A a fost descompusă, o dată în două transpoziții în raport cu axele D_1 și D, iar a doua oară în două transpoziții de axe D și D_2. În virtutea propoziției demonstrate la începutul problemei 622, axele D_1 și D_2 rezultă una din cealală printr-o transpoziție de axă D. Aceasta este valabil, dintr-un motiv analog, și pentru axele D' și D''. Prin urmare, axele C_1 și C_2 ale celor două deplasări rezultante se vor bucura de aceeași proprietate, deoarece C_1 este perpendiculara comună dreptelor D_1 și D', iar C_2 perpendiculara comună dreptelor D_2 și D''.

Mărimea unghiului de rotație și mărimea translației vor fi, în ambele cazuri, aceleași, deoarece unghiul dintre dreptele D_1 și D' va fi egal, în virtutea

Scanned with OKEN Scanner

celor arătate mai sus, cu unghiul dintre dreptele D_2 şi D'', şi aceeaşi va fi situaţia şi pentru distanţele cele mai mici dintre dreptele fiecărei perechi.

624. Fie S şi T două deplasări date. Să notăm cu D „axa" deplasării S, înţelegînd prin aceasta dreapta pe care deplasarea S o transformă în ea însăşi, *păstrîndu-i şi sensul*[1]). Dacă S este o translaţie atunci drept axă D putem lua orice dreaptă paralelă cu direcţia deplasării; dacă S nu este însă o translaţie, atunci D va coincide cu axa deplasării S, în accepţiunea odişnuită a cuvîntului.

Să luăm, mai departe, pe dreapta D un sens arbitrar şi să notăm cu D' dreapta orientată, în care deplasarea T transformă dreapta orientată D.

Dacă vom supune dreapta D întîi deplasării S (dreapta orientată D rămîne pe loc şi îşi păstrează sensul), iar apoi deplasării T, atunci dreapta orientată D va trece în dreapta orientată D'.

În cazul a două deplasări S şi T permutabile, trebuie să aibă loc aceeaşi situaţie, dacă efectuăm întîi deplasarea T, iar apoi deplasarea S. Însă deplasarea T, efectuată prima, transformă dreapta orientată D în dreapta orientată D'; prin urmare, deplasarea S trebuie să lase dreapta D' pe loc şi să nu-i schimbe sensul. În consecinţă, şi dreapta D' va fi o axă a deplasării S.

Aşadar, *condiţia necesară pentru ca deplasările S şi T să fie permutabile este ca deplasarea T să transforme orice „axă" a deplasării S iarăşi într-o „axă" a aceleiaşi deplasări S.* Evident, va trebui ca o condiţie analogă să fie verificată în cazul cînd deplasările S şi T îşi schimbă rolurile.

Să considerăm acum diversele cazuri posibile.

Dacă ambele deplasări date sînt translaţii, atunci condiţia necesară de permutabilitate este, evident, satisfăcută şi, în adevăr, orice pereche de translaţii va fi, cum se vede, uşor, permutabilă.

Dacă cel puţin una dintre cele două deplasări — să zicem S — nu este o translaţie, atunci ea are o axă D *unică*. În virtutea condiţiei necesare de permutabilitate, dedusă mai sus, deplasarea T, permutabilă cu S, trebuie să transforme dreapta D în ea însăşi (indiferent dacă îi păstrează şi sensul sau nu). Prin urmare, deplasarea T va fi (cf. ex. 582) ori o deplasare elicoidală de axă D, considerînd aici şi o rotaţie în jurul lui D şi o translaţie în direcţia aceleeaşi axe, ori o transpoziţie în raport cu o axă care taie dreapta D sub un unghi drept.

În primul dintre aceste două cazuri, ambele deplasări au axa comună, sau una dintre ele este o translaţie avînd ca direcţie axa celeilalte. Ne convingem fără dificultate că două deplasări de acest fel sînt efectiv permutabile.

În al doilea dintre aceste cazuri, S este o deplasare diferită de translaţie, iar T o transpoziţie în raport cu o axă care taie axa D a deplasării S sub un unghi drept. Inversînd rolurile deplasărilor S şi T, ne convingem că şi S este o transpoziţie. Aşadar, în acest caz, cele două deplasări S şi T sînt transpoziţii în raport cu două axe care se taie sub un unghi drept. Deplasarea rezultantă a acestor două transpoziţii, efectuate în orice ordine, este de asemenea o transpoziţie a cărei axă trece prin punctul de intersecţie al celor două axe date şi

[1]) Dacă deplasarea considerată este o transpoziţie, ea transformă în sine însăşi o infinitate de drepte (care intersectează axa sub un unghi drept), *schimbînd sensul fiecăreia dintre ele în cel opus*. Aceasta ne-a determinat să facem rezerva privind păstrarea sensului.

este perpendiculară pe ambele. În consecință, cele două transpoziții date sînt permutabile.

625. 1° La baza rezolvării acestei probleme, vom pune următoarea propoziție:

Trei simetrii consecutive în raport cu planele P, Q și R, care trec prin dreapta D, sînt echivalente cu o simetrie în raport cu un plan T, care trece de asemenea prin dreapta D și este determinat de următoarea condiție: unghiul dintre planele P și T este egal cu unghiul dintre planele Q și R și are același sens.

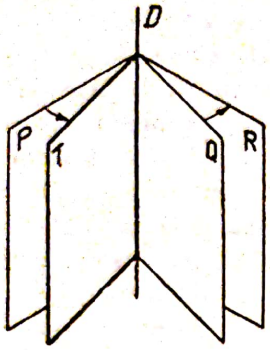


Fig. 159

Pentru demonstrația acestei propoziții, vom observa că (în virtutea celor de la Obs. 1° e, la soluția ex. 600) două simetrii consecutive în raport cu planele Q și R (fig. 159) sînt echivalente cu două simetrii consecutive în raport cu planul P și cu planul T, determinat mai sus. Prin urmare, trei simetrii consecutive în raport cu planele P, Q și R sînt echivalente cu trei simetrii consecutive în raport cu planele P, iarăși P și T, adică cu o simetrie în raport cu planul T (deoarece două simetrii consecutive în raport cu planul P dau identitatea).

Trecem la rezolvarea problemei noastre.

Să presupunem că o dreaptă dată SA este muchie a unui triedru $S{\cdot}ABC$ căutat, iar planele date P, Q și R sînt planele bisectoare ale diedrelor sale respectiv de muchii SA, SB și SC sau ale suplementelor lor (cf. ex. 479). Să notăm respectiv cu L, M și N planele fețelor BSC, CSA și ASB ale triedrului căutat.

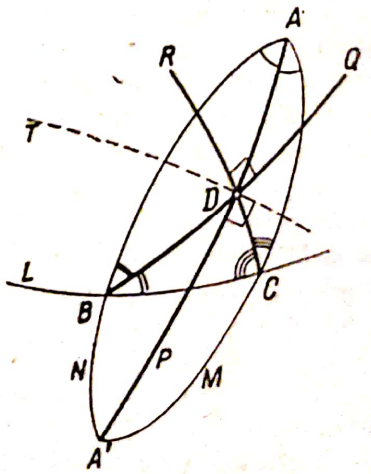


Fig. 160

Deoarece planul P este, prin ipoteză, planul bisector al diedrului de muchie SA sau al diedrului suplementar, planul N ca fi simetricul planului M în raport cu planul P (fig. 106)[1]). Analog, planul L este simetricul planului N în raport cu planul Q, iar M simetricul lui L în raport cu planul R. Așadar, cele trei simetrii consecutive în raport cu planele P, Q și R, adică o simetrie în raport cu planul T, determinat mai sus, transformă planul căutat M în el însuși. Prin urmare, planul M trebuie să fie perpendicular pe planul T, adică el trebuie să treacă prin dreapta Δ, perpendiculară pe planul T în punctul S.

Se poate demonstra că, și reciproc (la notațiile adoptate mai sus), planele P, Q și R sînt planele bisectoare ale diedrelor sau ale suplementelor lor în orice triedru, format de un plan M care

[1]) În fig. 160, am reprezentat, pentru intuitivitate, în locul triedrului $S{\cdot}ABC$, triunghiul sferic ABC, care îi corespunde (compară cu nr. **373** *bis*), în locul planelor P, Q și R, figurează arcele de cercuri mari corespunzătoare, care sînt notate în desen tot cu P, Q și R, iar dreapta D a fost înlocuită prin punctul care îi corespunde și care a fost notat tot cu D etc.

trece prin dreapta Δ, de planul N, simetricul lui M în raport cu planul dat P, şi de planul L, simetricul lui N în raport cu celălalt plan dat Q.

În adevăr, deoarece planele M şi N sînt simetrice în raport cu planul P, iar planele N şi L sînt simetrice în raport cu planul Q, planele P şi Q se bucură de proprietatea cerută. Anume, planul P este planul bisector al unuia dintre diedrele formate de planele M şi N, iar planul Q îndeplineşte acelaşi rol pentru planele N şi L. Mai departe, cele două simetrii consecutive în raport cu planele P şi Q transformă planul M în planul L, iar cele trei simetrii consecutive în raport cu planele P, Q şi R, echivalente cu o singură simetrie în raport cu planul T, transformă planul M în el însuşi (deoarece planul M trece prin dreapta Δ şi este deci perpendicular pe planul T). Prin urmare, simetria în raport cu planul R transformă planul L în planul M. Aceasta arată că planul R este, la rîndul său, planul bisector al unuia dintre diedrele formate de planele L şi M.

Planul M, care trece prin dreapta Δ, trebuie astfel ales încît, împreună cu planul N, simetricul său în raport cu planul P, şi cu planul L, simetricul lui N în raport cu planul Q, să formeze un triedru. Pentru ca aceasta să aibă loc, planele L, M şi N, care trec prin punctul S, nu trebuie să treacă prin aceeaşi dreaptă (de unde va rezulta că aceste trei plane sînt distincte). Pentru aceasta, planul M nu trebuie să fie perpendicular pe dreapta D, deoarece, altfel, el ar fi perpendicular pe planele P,Q şi R şi ar coincide deci cu planele N şi L. Mai departe, planul M nu trebuie să treacă prin dreapta D, deoarece, altfel, planele N şi L ar trece de asemenea prin această dreaptă. Se poate demonstra că *dacă planul M nu este perpendicular pe dreapta D şi nu trece prin această dreaptă, atunci cele trei plane L, M şi N formează un triedru.*

În adevăr, dacă planul M coincide cu N, el este perpendicular pe planul P, sau coincide cu el. În primul caz, planul M va fi perpendicular pe dreapta D, deoarece, în afară de planul P, el va trebui să fie perpendicular şi pe planul T. În al doilea caz, el va trece prin dreapta D. Am ajunge la aceleaşi concluzii, presupunînd că planul M coincide cu L.

Dacă planele L şi N, distincte de planul M, ar coincide, planul L ar fi simetricul lui M, atît în raport cu planul P, cît şi în raport cu planul Q, şi planele L şi M ar trece prin intersecţia D a planelor P şi Q.

În sfîrşit, dacă toate cele trei plane L, M şi N, fiind distincte, s-ar intersecta după aceeaşi dreaptă, aceasta ar putea fi numai dreapta D, şi planul M ar trece prin dreapta D.

Pentru ca triedrul construit să satisfacă toate condiţiile problemei, ne mai rămîne să alegem planul M astfel ca el să treacă prin dreapta dată SA, situată în planul P, adică să luăm ca M planul care trece prin dreptele Δ şi SA. În acest caz, şi planul N va trece prin dreapta SA, deoarece planele M şi N sînt simetrice în raport cu planul P care trece prin SA, şi dreapta SA va fi, în adevăr, una dintre muchiile triedrului construit.

În cele din urmă, ajungem la următoarea construcţie: prin dreapta D, ducem planul T, astfel ca unghiul dintre planele P şi T să fie egal cu unghiul dintre planele Q şi R şi să aibă acelaşi sens. Mai departe, construim dreapta Δ, perpendiculară pe planul T; planul M, care trece prin dreptele Δ şi SA; planul N, simetricul lui M în raport cu planul P; şi planul L, simetricul lui N în raport cu planul Q. Oricare dintre triedrele formate de planele L, M şi N (dacă aceste plane formează un triedru) va fi cel căutat.

Să ne mai oprim la discuția problemei.

Problema are o infinitate de soluții, dacă dreapta SA coincide cu perpendiculara Δ pe planul T. În acest caz, *dreapta SA va fi perpendiculară pe dreapta D* din planul T; totodată, deoarece dreapta Δ este perpendiculară pe planul T, dreapta SA, care coincide cu ea, deci și planul P, care trece prin SA, trebuie de asemenea să fie perpendiculare pe planul T. Prin urmare, *planele Q și R trebuie să fie perpendiculare*, deoarece unghiul dintre planele P și T este egal, prin construcție, cu unghiul dintre planele Q și R.

Problema nu are soluții, dacă planul M, care trece prin dreptele SA și Δ, este perpendicular pe dreapta D sau trece prin această dreaptă, deoarece, în aceste cazuri, planul M nu va forma un triedru cu planele corespunzătoare N și L (v. mai sus). În primul dintre aceste două cazuri, dreapta SA trebuie să fie perpendiculară pe dreapta D, însă nu perpendiculară pe planul T; de aceea, planele P și T, deci și planele Q și R, nu trebuie să fie perpendiculare între ele. În al doilea caz, planul P, care conține dreptele SA și Δ, trebuie să fie perpendicular pe T, astfel că și planele Q și R trebuie să fie perpendiculare, însă dreapta SA trebuie să nu fie perpendiculară pe D.

Așadar, *problema are o infinitate de soluții, dacă planele Q și R sînt perpendiculare, iar dreapta SA este perpendiculară pe D, și nu are soluții, dacă este îndeplinită numai una din aceste condiții.*

În consecință, *dacă planele Q și R nu sînt perpendiculare, iar dreapta SA nu este perpendiculară pe dreapta D, atunci există un singur triplet de plane L, M și N care formează triedrele conform condițiilor problemei.*

Să stabilim acum dacă planele P, Q și R vor fi planele bisectoare ale diedrelor triedrului construit sau planele bisectoare ale suplementelor lor.

Să presupunem că planele P, Q și R sînt planele bisectoare ale diedrelor unuia dintre triedrele $S{\cdot}ABC$, formate de planele L, M și N; în acest caz, va avea loc același lucru și pentru triedrul $S{\cdot}A'B'C'$, unde SA', SB' și SC' sînt prelungirile muchiilor SA, SB și SC dincolo de vîrful S. În același timp, planul P va fi planul bisector al diedrului de muchie SA' din triedrul $S{\cdot}A'BC$ (fig. 160), iar planele Q și R vor fi planele bisectoare ale suplementelor celorlalte două diedre. Aceeași va fi situația pentru triedrul $S{\cdot}AB'C'$ etc.

Dacă am fi presupus, de la început, că în unul dintre triedrele $S{\cdot}A'BC$, formate de planele L, M și N, planul P este planul bisector al unui diedru propriu, iar planele Q și R sînt planele bisectoare ale diedrelor suplementare cu celelalte două diedre, atunci, în triedrul $S{\cdot}ABC$, unde SA este prelungirea muchiei SA' dincolo de vîrful S, toate trei planele vor fi planele bisectoare ale diedrelor, astfel că revenim la cazul precedent.

Așadar, *în toate cazurile, în două dintre cele opt triedre formate de planele L, M și N, planele P, Q și R vor fi plane bisectoare ale diedrelor; în fiecare dintre cele șase triedre rămase, formate de aceleași plane, L, M și N, două dintre cele trei plane P, Q și R vor fi planele bisectoare ale suplememtelor diedrelor, iar al treilea va fi planul bisector al unuia dintre diedre, și anume în două dintre cele șase triedre acest din urmă plan va fi P, în două va fi planul Q, iar în două va fi planul R.*

În sfîrșit, dacă planele P, Q și R rămîn fixe, la fel ca și punctul S, iar dreapta SA se deplasează în planul P, atunci planul M al feței opuse trece tot timpul, cum rezultă prin construcția de mai sus, prin aceeași dreaptă, anume prin perpendiculara Δ pe planul T în punctul S.

2° Să presupunem acum că cele trei plane date P, Q și R sînt respectiv perpendiculare pe planele fețelor $B'SC'$, $C'SA'$ și $A'SB'$ ale triedrului căutat

BIBLIOTECA CENTRALĂ REGIONALĂ

$S{\cdot}A'B'C'$ și că trec prin bisectoarele unghiurilor sale plane sau ale unghiurilor suplementare, una dintre aceste bisectoare fiind dreapta dată SA din planul P.

Deoarece planul P este perpendicular pe planul $B'SC'$, el va trece prin perpendiculara SA'' pe acest plan și deoarece, în afară de aceasta, el mai trece prin bisectoarea unghiului plan $B'SC'$ al triedrului $S{\cdot}A'B'C'$, el va fi, cum se vede ușor, planul bisector al diedrului de muchie SA'' sau al diedrului suplementar în triedrul $S{\cdot}A''B''C''$, suplementul celui căutat. Fiecare dintre planele Q și R se va bucura de o proprietate analogă. Totodată, muchia SA'' a acestui triedru suplementar, situată în planul P, va fi evident perpendiculară pe bisectoarea SA a unghiului plan $B'SC'$ din triedrul $S{\cdot}A'B'C'$.

Așadar, problema considerată se reduce la construirea triedrului ajutător $S{\cdot}A''B''C''$, în care planele bisectoare ale diedrelor sau ale suplementelor lor vor fi cele trei plane date P, Q și R, iar una dintre muchii va fi dreapta SA'', situată în planul P și perpendiculară pe dreapta dată SA. Prin urmare, revenim la problema de care ne-am ocupat la 1°. Triedrul căutat va fi suplementar în raport cu triedrul construit $S{\cdot}A''B''C''$.

Discuția problemei noastre se reduce, de asemenea, la discuția problemei care figurează la 1°. Astfel, problema va avea o soluție unică, dacă planele Q și R nu sînt perpendiculare, iar dreapta SA nu coincide cu D (dreapta SA'' nu este perpendiculară pe D); în două dintre cele opt triedre care satisfac condițiile problemei, planele P, Q și R vor trece prin bisectoarele unghiurilor plane, nu prin ale unghiurilor lor suplementare etc.

În sfîrșit, dacă planele P, Q și R și punctul S rămîn fixe, iar dreapta SA, deci și SA'', se deplasează, atunci planul feței $C''SA''$ trece tot timpul prin aceeași dreaptă Δ (v. partea finală a soluției de la 1°). În consecință, dreapta SB', perpendiculară pe planul $C''SA''$, descrie planul T, considerat mai sus, iar dreptele SC' și SA' descriu plane simetrice cu planul T, respectiv în raport cu planele P și R.

3° În sfîrșit, să presupunem că planele P, Q și R trec respectiv prin muchiile SA', SB' și SC' ale triedrului căutat $S{\cdot}A'B'C'$ și, pentru a fixa ideile, prin bisectoarele celor trei unghiuri plane (nu prin bisectoarele suplementelor lor), bisectoarea unghiului $B'SC'$ fiind dreapta dată SA din planul P.

În virtutea ultimei proprietăți a dreptei SA, dreapta SB' se transformă în SC', prin transpoziția în raport cu SA. Deoarece dreapta SB' este situată în planul Q, dreapta SC' trebuie să se afle în planul Q', care se obține din planul Q prin transpoziția în raport cu dreapta SA. Prin ipoteză însă, dreapta SC' este situată în planul R. Prin urmare, dacă planul Q' este distinct de R, iar dreapta de intersecție a planelor Q' și R este distinctă de dreapta D, atunci *dreapta SC' se determină ca intersecție a planelor Q' și R, iar dreapta SB' ca intersecție a planelor Q și ASC'.*

Dacă însă planul Q' coincide cu R, atunci planul R se obține din Q printr-o transpoziție în raport cu SA. Aceasta înseamnă că dreapta SA este perpendiculară pe dreapta D — intersecția planelor Q și R — și se află în unul dintre planele bisectoare ale diedrelor formate de ele.

În sfîrșit, dacă planul Q' este distinct de R, dar trece prin intersecția D a planelor Q și R, atunci dreapta SA este perpendiculară, cum se vede ușor, pe D, dar nu se află în nici unul dintre planele bisectoare ale diedrelor formate de planele Q și R.

Scanned with OKEN Scanner

Din cele de mai sus, rezultă că, *în cazul cînd dreapta dată SA nu este perpendiculară pe D, poziția dreptelor căutate SB' și SC' respectiv în planele Q și R este complet determinată de condiția ca dreapta SA să fie una dintre bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte; și anume, dreapta SC' este intersecția planului dat R cu planul Q', care se obține din planul dat Q printr-o transpoziție în raport cu dreapta dată SA, iar dreapta SB' este intersecția planelor Q și ASC'.*

Dacă un triedru satisface condițiile problemei, atunci și simetricul său în raport cu vîrful (**373**) satisface de asemenea condițiile problemei. În consecință, putem alege ca muchie SC' a triedrului căutat *oricare dintre cele două semidrepte* în care punctul S împarte dreapta găsită SC'. Ca muchie SB' va trebui să luăm atunci o semidreaptă perfect determinată a dreptei SB', astfel aleasă încît dreapta SA să treacă prin interiorul unghiului $B'SC'$ (nu prin interiorul suplementului său).

Trecem la determinarea celei de-a treia muchii SA', a triedrului căutat. Să notăm cu C' un punct arbitrar de pe muchia SC' și cu A' un punct de pe muchia căutată SA', astfel ca să avem $SA' = SC'$. Evident, punctul A' se obține din punctul C' printr-o transpoziție în raport cu o dreaptă, conținută în planul Q și care trece prin punctul S, și anume în raport cu bisectoarea unghiului $A'SC'$. Prin urmare, punctul A' se află (cf. soluției ex. 597) pe un cerc pe deplin determinat, care este locul geometric al punctelor obținute din punctul C' prin transpoziții în raport cu drepte situate în planul R și trecînd prin punctul S. Așadar, punctul A' trebuie să fie unul dintre punctele de intersecție ale acestui cerc cu planul P. Punctul A' poate ocupa două poziții diferite în spațiu, dacă cercul taie planul P în două puncte; o poziție perfect determinată, dacă cercul este tangent la planul P; punctul A' nu există de loc, dacă cercul și planul P nu au puncte comune. După ce am construit punctul A', obținem și ultima muchie SA' a triedrului căutat.

Să arătăm acum că *triedrul construit $S{\cdot}A'B'C'$ satisface toate condițiile puse.* În adevăr, dreptele SA', SB' și SC' sînt, situate prin construcție, în același plan. Totodată, dreapta SB' se află în planul Q, iar dreapta SC' în planul Q', care se obține din Q printr-o transpoziție în raport cu dreapta SA. De aici rezultă că și dreptele SB' și SC' se obțin una din cealaltă printr-o transpoziție în raport cu dreapta SA. Deoarece, prin construcție, dreapta SA trece prin interiorul unghiului $B'SC'$, ea va fi bisectoarea acestui unghi (nu a suplementului său). Mai departe, punctul A' se obține — prin însăși metoda după care l-am construit — din punctul C' printr-o transpoziție în raport cu o dreaptă din planul Q. În consecință, planul Q trece prin bisectoarea unghiului plan $C'SA'$. În sfîrșit, planul P, care trece prin muchia SA' și prin intersecția planelor Q și R, trece (cf. ex. 481) prin bisectoarea unghiului plan $A'SB'$.

Am presupus mai sus că planele P, Q și R trec prin bisectoarele unghiurilor plane ale triedrului căutat și nu prin bisectoarele suplementelor lor.

Dacă acum, într-un triedru $S{\cdot}A_1B'C'$, planul P trece prin bisectoarea unghiului plan $B'SC'$, iar planele Q și R prin bisectoarele suplementelor celorlalte două unghiuri plane, atunci, în triedrul $S{\cdot}A'B'C'$, unde SA' este prelungirea dincolo de vîrful S a muchiei SA_1, cele trei plane P, Q și R vor trece toate prin bisectoarele unghiurilor plane. Așadar, deosebirea dintre cele două cazuri este neesențială (compară cu cele arătate la 1°).

626. 1° *Prima soluţie.* La baza acestei soluţii (asemănătoare ca ideie cu soluţia problemei 625, 1°), vom pune următoarea propoziţie:

Trei transpoziţii consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb şi Sc, situate în acelaşi plan, sînt echivalente cu o traspoziţie în raport cu dreapta Sd, situată în acelaşi plan şi determinată de următoarele condiţii: unghiul dintre dreapta Sa şi dreapta Sd, este egal cu unghiul dreptelor Sb şi Sc şi are acelaşi sens.

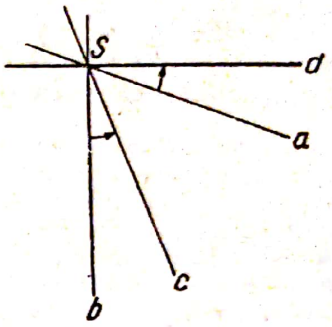


Fig. 161

Pentru a demonstra această propoziţie, vom observa că (în virtutea părţii a doua a teoremei directe de la nr. **416**) două transpoziţii consecutive în raport cu dreptele *Sb* şi *Sc* (fig. 161) sînt echivalente cu două transpoziţii succesive în raport cu drepta *Sa* şi în raport cu dreapta *Sd*, determinată mai sus. Prin urmare, cele trei transpoziţii consecutive în raport cu dreptele *Sa*, *Sb* şi *Sc* sînt echivalente cu trei transpoziţii consecutive în raport cu dreptele *Sa*, iarăşi *Sa* şi *Sd*, adică cu o transpoziţie în raport cu dreapta *Sd* (deoarece două transpoziţii succesive în raport cu aceeaşi dreaptă dau identitatea).

Trecem la rezolvarea problemei noastre.

Fie faţa *BSC* a triedrului căutat *S·ABC* (fig. 162)[1] situată în planul dat *P*, iar dreptele *Sa*, *Sb* şi *Sc*, pentru a fixa ideile, bisectoarele unghiurilor suplementare ale unghiurilor sale plane (ex. 480, 1°).

Să notăm cu *SA'*, *SB'* şi *SC'* prelungirile respective ale muchiilor *SA*, *SB* şi *SC* dincolo de vîrful *S*. Deoarece, prin ipoteză, dreapta *Sa* este bisectoarea unghiului *BSC'*, transpoziţia în raport cu dreapta *Sa* duce semidreapta *SB* în semidreapta *SC'* (fig. 163). Analog, transpoziţia în raport cu dreapta *Sb*

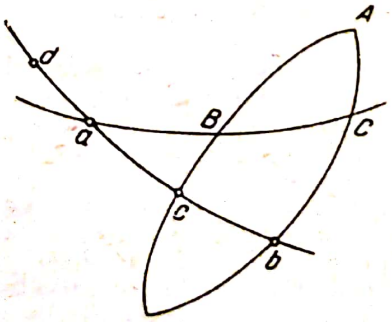


Fig. 162

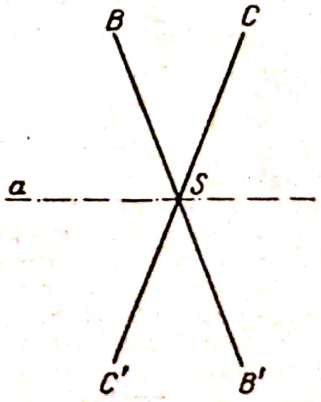


Fig. 163

transformă semidreapta *SC'* în *SA*, iar transpoziţia în raport cu dreapta *Sc* transformă semidreapta *SA* în semidreapta *SB'*. Aşadar, cele trei transpoziţii succesive în raport cu dreptele *Sa*, *Sb*, şi *Sc*, adică o singură transpoziţie în raport cu dreapta *Sd*, determinată mai sus, transformă semidreapta *SB* în

[1]) V. nota de la p. 214

semidreapta SB', iar dreapta SB în ea însăși. Prin urmare, dreapta SB trebuie să fie perpendiculară pe dreapta Sd, adică să se afle în planul D, care trece prin S și este perpendicular pe dreapta Sd.

Se poate demonstra că, și reciproc (notațiile rămînînd aceleași), *dreptele Sa, Sb și Sc sînt bisectoarele suplementelor unghiurilor plane ale oricărui triedru format de o semidreaptă SB care pornește din punctul S și este situată în planul D, de prelungirea SC a semidreptei SC', care se obține din semidreapta SB prin transpoziție în raport cu dreapta Sa, și de semidreapta SA, care se obține din semidreapta SC' prin transpoziție în raport cu dreapta Sb.*

În adevăr, deoarece semidreapta SC' se obține din semidreapta SB prin transpoziție în raport cu dreapta Sa, iar SA din SC', prin transpoziție în raport cu dreapta Sb, dreptele Sa și Sb se bucură de proprietatea cerută, anume sînt bisectoarele suplementelor respective ale unghiurilor BSC și CSA. Mai departe, cele două transpoziți succesive în raport cu dreptele Sa și Sb transformă semidreapta SB în semidreapta SA, iar cele trei transpoziții consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb și Sc, echivalente cu o singură transpoziție în raport cu dreapta Sd, transformă pe SB în SB' (deoarece SB este situată în planul D și este deci perpendiculară pe dreapta Sd). Prin urmare, transpoziția în raport cu dreapta Sc transformă semidreapta SA în semidreapta SB', astfel că dreapta Sc se bucură de proprietatea cerută, anume este bisectoarea suplementului unghiului ASB.

Semidreapta SB, conținută în planul D, trebuie astfel aleasă, încît SB, împreună cu SC și SA, care se obțin din SB, cum s-a arătat mai sus, să formeze un triedru. Pentru ca aceasta să aibă loc, dreptele SA, SB și SC nu trebuie să fie situate în același plan (de unde va rezulta că cele trei drepte sînt distincte). Pentru aceasta, dreapta SB nu trebuie să fie perpendiculară pe planul dreptelor Sa, Sb și Sc, deoarece altfel, dreptele SC și SA ar coincide cu SB. Mai departe, dreapta SB nu trebuie să fie situată în planul dreptelor Sa, Sb și Sc, deoarece, altfel, dreptele SC și SA ar fi situate de asemenea în acest plan. Se poate arăta că, *dacă dreapta SB nu este perpendiculară pe planul dreptelor Sa, Sb și Sc și nu se află în acest plan, dreptele SA, SB și SC formează un triedru.*

În adevăr, dacă dreapta SB coincide cu SC, atunci este ori perpendiculară pe dreapta Sa, ori coincide cu ea. În primul caz, dreapta SB va fi perpendiculară și pe planul dreptelor Sa, Sb și Sc, deoarece ea este perpendiculară și pe dreapta Sd. În al doilea caz, ea se va afla în planul dreptelor Sa, Sb și Sc. Am ajunge la aceleași concluzii, presupunînd că dreapta SB coincide cu SA.

Dacă dreptele SA și SC, distincte de dreapta SB, ar coincide, atunci dreapta SA s-ar obține din SB prin transpoziții atît în raport cu dreapta Sa, cît și în raport cu dreapta Sc, iar dreapta SB ar fi situată în planul dreptelor Sa și Sc.

În sfîrșit, dacă cele trei drepte SA, SB și SC ar fi distincte, dar situate în același plan, acest plan nu ar putea fi decît planul dreptelor Sa, Sb și Sc, iar dreapta SB ar fi conținută în acest plan.

Pentru ca triedrul construit să satisfacă toate condițiile problemei, ne rămîne să alegem astfel pe SB, încît ea să fie situată în planul dat P, adică să alegem ca semidreaptă SB una dintre cele două semidrepte ale intersecției planelor D și P. În acest caz și semidreapta SC va fi situată în planul P, deoarece acest plan conține bisectoarea Sa a suplementului unghiului BSC.

În definitiv, ajungem la următoarea construcție. În planul dreptelor Sa, Sb și Sc, construim dreapta Sd, astfel ca unghiul dintre dreapta Sa și dreapta

Scanned with OKEN Scanner

Sd să fie egal cu unghiul dreptelor Sb şi Sc şi să aibă acelaşi sens. Mai departe, construim planul D, perpendicular pe dreapta Sd. Alegem una dintre semidreptele SB pe dreapta de intersecţie a planelor P şi D, construim semidreapta SC', care se obţine din SB prin transpoziţie în raport cu dreapta Sa, şi semidreapta SA, care se obţine din SC', prin transpoziţie în raport cu dreapta Sb.

Triedrele $S{\cdot}ABC$ şi $S{\cdot}A'B'C'$, unde SA', SB' şi SC' vor fi prelungirile respective ale semidreptelor SA, SB şi SC dincolo de vîrful S, vor fi cele căutate.

Am presupus mai sus că dreptele Sa, Sb şi Sc sînt bisectoarele suplementelor unghiurilor plane ale triedrului căutat; cazul cînd una dintre aceste trei drepte este bisectoarea suplementului unuia dintre unghiurile plane ale triedrului căutat, iar celelalte două sînt bisectoarele celorlalte două unghiuri plane, se reduce imediat la cel precedent. Astfel, dacă dreapta Sa este bisectoarea suplementului unuia dintre unghiurile plane, dreptele Sb şi Sc sînt bisectoarele unghiurilor plane, atunci triedrele căutate nu vor fi $S{\cdot}ABC$ şi $S{\cdot}A'B'C'$, ci $S{\cdot}A'BC$ şi $S{\cdot}AB'C'$, formate de aceleaşi drepte SA, SB şi SC etc.

Să ne mai oprim la discuţia problemei.

Problema are o infinitate de soluţii, dacă planul P coincide cu D. În acest caz, planul P trebuie să fie perpendicular pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc; totodată, deoarece planul D este perpendicular pe dreapta Sd, rezultă că şi planul P trebuie să fie perpendicular pe Sd, ca şi dreapta Sa. Prin urmare, dreptele Sb şi Sc trebuie să fie perpendiculare, deoarece unghiul dreptelor Sa şi Sd este egal cu unghiul dreptelor Sb şi Sc.

Problema nu are soluţii, dacă intersecţia SB a planelor P şi D este perpendiculară pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc, sau este conţinută în acest plan, deoarece, în aceste cazuri, dreapta SB nu formează un triedru cu dreptele corespunzătoare SC şi SA (v. mai sus). În primul dintre aceste două cazuri, planul P trebuie să fie perpendicular pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc, nu însă perpendicular pe Sd; de aceea dreptele Sa şi Sd, deci nici dreptele Sb şi Sc nu trebuie să fie perpendiculare. În al doilea caz, dreapta Sa — intersecţia planelor P şi D — trebuie să fie perpendiculară pe Sd, deoarece şi dreptele Sb şi Sc trebuie să fie perpendiculare, însă planul P trebuie să nu fie perpendicular pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc.

Aşadar, *problema are o infinitate de soluţii, dacă dreptele Sb şi Sc sînt perpendiculare, iar planul P este perpendicular pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc, şi nu are soluţii, dacă este satisfăcută numai una dintre aceste condiţii.*

Prin urmare, *dacă dreptele Sb şi Sc nu sînt perpendiculare, iar planul P nu este perpendicular pe planul dreptelor Sa, Sb şi Sc, atunci există două triedre opuse la vîrf $S{\cdot}ABC$ şi $S{\cdot}A'B'C'$, dreptele Sa, Sb şi Sc fiind în fiecare dintre ele bisectoarele suplementelor unghiurilor plane* (şi şase alte triedre, formate de aceleaşi drepte SA, SB şi SC, care satisfac şi ele condiţiile problemei).

În sfîrşit, dacă dreptele Sa, Sb şi Sc rămîn fixe, iar planul P se roteşte în jurul dreptei Sa, atunci dreapta SB descrie, cum rezultă din construcţia de mai sus, planul D, iar dreptele SC şi SA descriu plane care se obţin din planul D prin transpoziţie respectiv în raport cu dreptele Sa şi Sc.

A doua soluţie. Să presupunem că faţa BSC a triedrului căutat $S{\cdot}ABC$ este conţinută în planul dat P, iar dreptele date Sa, Sb şi Sc sînt bisectoarele suplementelor unghiurilor plane sau chiar ale unghiurilor plane înseşi (ex. 480, 1°).

Deoarece dreapta Sa este bisectoarea suplementului unghiului plan BSC, sau chiar a unghiului plan BSC din triedrul căutat, planul perpendi-

Scanned with OKEN Scanner

cular pe ea este perpendicular pe planul feței BSC și trece respectiv prin bisectoarea unghiului plan BSC sau a suplementului său. Planele perpendiculare respectiv pe Sb și pe Sc se bucură de proprietăți analoge.

Așadar, problema se reduce la problema 625,2°, în care rolul celor trei plane date revine planelor respectiv perpendiculare pe cele trei drepte date Sa, Sb și Sc, iar rolul bisectoarei date revine dreptei Sa', situată în planul dat P și perpendiculară pe dreapta dată Sa.

Dacă acum dreptele Sa, Sb și Sc rămînînd fixe, planul P al feței BSC se rotește în jurul dreptei Sa, atunci dreapta Sa' descrie un plan care trece prin punctul S și este perpendicular pe dreapta Sa. Așadar, ajungem la ultima chestiune pusă în aceeași problemă 625, 2°.

Observație. Prima soluție (directă) de mai sus a problemei noastre prezintă un anumit avantaj față de a doua. Anume, în prima soluție se construiesc direct, separat triedrele în care dreptele date servesc ca bisectoare ale suplementelor unghiurilor plane și separat cele în care două dintre cele trei drepte date sînt bisectoarele a două dintre unghiurile plane, iar a treia este bisectoarea suplementului celui de-al treilea unghi plan. În opoziție cu aceasta, soluția a doua dă simultan și triedrele din prima categorie și pe celelalte (dintre care putem face pe urmă alegerea cuvenită). Vom folosi în curînd acest avantaj al primei soluții (v. soluția probl. 627).

2° Fie acum dreptele date Sa, Sb și Sc respectiv perpendiculare pe muchiile SA, SB și SC ale triedrului căutat $S{\cdot}ABC$ și situate în planele bisectoare ale suplementelor diedrelor sale de muchiile respective (ex. 479 *bis*), unul dintre aceste plane bisectoare fiind planul dat P.

Deoarece dreapta Sa este perpendiculară pe muchia SA a triedrului $S{\cdot}ABC$ și este situată în planul bisector al suplementului diedrului de această muchie, rezultă că planul perpendicular pe dreapta Sa va fi planul bisector al diedrului de muchie SA. Planele perpendiculare respectiv pe Sb și pe Sc se vor bucura de aceeași proprietate.

Dacă două dintre cele trei drepte date, fiind perpendiculare pe muchii, nu ar fi situate în planele bisectoare ale suplementelor diedrelor triedrului, ci în planele bisectoare ale diedrelor înseși (v. soluția ex. 479 *bis*), atunci planele perpendiculare pe ele ar fi planele bisectoare ale suplementelor diedrelor, nu ale diedrelor înseși.

Așadar, problema se reduce la cea tratată la nr. 625, 1°.

3° În sfîrșit, să presupunem că dreptele date Sa, Sb și Sc sînt respectiv intersecțiile planelor fețelor BSC, CSA și ASB ale triedrului căutat $S{\cdot}ABC$ cu planele bisectoare ale suplementelor diedrelor sale, sau chiar ale diedrelor (ex. 481 *bis* și observația la soluția acestui exercițiu), unul dintre aceste plane bisectoare fiind planul P.

În virtutea celor arătate la soluția exercițiului 481 *bis*, planul perpendicular pe dreapta Sa trece prin muchia SA' a triedrului $S{\cdot}A'B'C'$, suplementul triedrului căutat $S{\cdot}ABC$, și prin bisectoarea unghiului plan $B'SC'$ sau prin bisectoarea suplementului său. Planele perpendiculare respectiv pe dreptele Sb și Sc se bucură de proprietăți analoge. Mai departe, dreapta SA_0, perpendiculară pe planul bisector P al diedrului de muchie SA sau al suplementului său, va fi, în triedrul suplementar $S{\cdot}A'B'C'$, bisectoarea unghiului plan $B'SC'$ sau bisectoarea suplementului său.

Așadar, problema noastră se reduce la problema 625, 3°.

Scanned with OKEN Scanner

627. Soluţia de faţă este o generalizare a *primei* soluţii de la problema 626, 1°, dată mai sus. În aceste condiţii, va trebui să considerăm separat cazul în care numărul de feţe este par şi impar.

Să începem cu un număr de feţe par. Fie dreptele date Sa, Sb, Sc, Sd, Se şi Sf respectiv bisectoarele suplementelor unghiurilor plane ASB, BSC, CSD, DSE, ESF şi FSA, ale unghiului poliedru $S{\cdot}ABCDEF$ căutat, pe care îl vom presupune, pentru a fixa ideile, ca avînd şase feţe. Să notăm cu SA', SB', ... şi cu SF' prelungirile dincolo de vîrful S ale muchiilor SA, SB, ... şi SF.

Transpoziţia în raport cu dreapta Sa transformă semidreapta SA în prelungirea SB' a lui SB, transpoziţia în raport cu dreapta Sb transformă pe SB' în SC, ... şi, în sfîrşit, transpoziţia în raport cu dreapta Sf transformă semidreapta SF' în SA. Cu alte cuvinte, cele şase transpoziţii consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb, ... şi Sf transformă semidreapta SA în SA. Prin urmare, *SA este una dintre semidreptele axei L a rotaţiei rezultante a celor şase transpoziţii consecutive în raport cu axele Sa, Sb, ... şi Sf*. Această axă se poate afla cum se arată la nr. **417** (sau în observaţia 2° la soluţia ex. 600); ea va fi o dreaptă perfect determinată, cu excepţia cazului în care cele şase transpoziţii consecutive sînt echivalente cu identitatea.

Reciproc, fie SA una dintre semidreptele dreptei L, despre care a fost vorba mai sus, SB' semidreapta care se obţine din SA prin transpoziţie în raport cu dreapta Sa, SB prelungirea lui SB' dincolo de punctul S, SC semidreapta care se obţine din SB' prin transpoziţie în raport cu dreapta Sb, ..., SF' semidreapta care se obţine din SE prin transpoziţie în raport cu dreapta Se, şi, în sfîrşit, SF prelungirea lui SF' dincolo de punctul S. Se poate demonstra că, *dacă semidreptele SA, SB, ... şi SF formează un unghi poliedru cu şase feţe, atunci acesta satisface toate condiţiile problemei* (compară demonstraţia afirmaţiei respective pentru cazul unui triedru în *prima* soluţie a problemei 626, 1°)

Dacă SA, SB, ... şi SF, construite cum s-a arătat mai sus, nu formează un unghi poliedru cu şase feţe (de exemplu, dacă trei semidrepte consecutive sînt situate în acelaşi plan), atunci este evident că problema nu va avea soluţii. Dacă cele şase simetrii consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb, ... şi Sf dau identitatea, problema are o infinitate de soluţii. În celelalte cazuri, problema are *două soluţii*, anume unghiurile poliedre cu şase feţe $S{\cdot}ABCDEF$ şi $S{\cdot}A'B'C'D'E'F'$, simetrice în raport cu vîrful.

Problema se rezolvă analog şi în cazul unui număr par arbitrar de feţe.

Trecem la cazul unui număr de feţe impar. Fie dreptele Sa, Sb, Sc, Sd şi Se respectiv bisectoarele suplementelor unghiurilor plane ASB, BSC, CSD, DSE şi ESA ale unghiului poliedru căutat $S{\cdot}ABCDE$, pe care, pentru a fixa ideile, îl vom presupune ca avînd cinci feţe. Să notăm cu SA', SB', SC', SD' şi SE' prelungirile dincolo de vîrful S ale muchiilor SA, SB, SC, SD şi SE.

Transpoziţia în raport cu dreapta Sa transformă semidreapta SA în prelungirea SB' a lui SB, transpoziţia în raport cu dreapta Sb transformă pe SB' în semidreapta SC, ... şi, în sfîrşit, transpoziţia în raport cu dreapta Se transformă pe SE în prelungirea SA' a lui SA. Altfel spus, cele cinci transpoziţii consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb, ... şi Se transformă semidreapta SA în prelungirea ei SA' dincolo de punctul S. În consecinţă, *rotaţia rezultantă a celor cinci transpoziţii succesive în raport cu dreptele Sa, Sb, ...*

Scanned with OKEN Scanner

și Se trebuie să fie o transpoziție (deoarece o rotație care nu este o transpoziție nu poate transforma o semidreaptă în prelungirea ei), *iar semidreapta SA trebuie să fie perpendiculară pe axa L a acestei transpoziții*. Axa L se poate afla prin aceeași metodă ca și în cazul cînd numărul fețelor este par (v. mai sus).

De aici rezultă că, dacă cele cinci transpoziții consecutive în raport cu dreptele Sa, Sb, ... și Se sînt echivalente cu o rotație care nu este transpoziție, problema nu are soluție.

Să presupunem acum că cele cinci transpoziții succesive în raport cu dreptele Sa, Sb, ... și Se sînt echivalente cu o singură transpoziție în raport cu o dreaptă L. Să notăm cu SA o semidreaptă dusă din punctul S și perpendiculară pe dreapta L, cu SB' semidreapta care se obține din SA prin transpoziție în raport cu dreapta Sa, cu SB prelungirea lui SB' dincolo de punctul S, cu SC semidreapta care se obține din SB' prin transpoziție în raport cu dreapta Sb, ... și, în sfîrșit, cu SE semidreapta care se obține din SD' prin transpoziție în raport cu dreapta Sd. Se poate demonstra că, *dacă semidreptele SA, SB, ... și SE formează un unghi poliedru cu cinci fețe, acesta satisface toate condițiile problemei* (compară iarăși cu prima soluție a problemei 626,1°) Așadar, în cazul considerat, problema are în general o infinitate de soluții, adică devine nedeterminată.

În aceste condiții, locul geometric al muchiilor SA va fi, după cum se vede din cele de mai sus, planul M, care trece prin punctul S și este perpendicular pe dreapta L, despre care a fost vorba mai sus; locul geometric al muchiilor SB va fi planul N, care se obține din planul M printr-o transpoziție în raport cu dreapta Sa etc.

Înainte de a încheia soluția problemei noastre, vom mai demonstra următoarea propoziție ajutătoare:

Condiția necesară și suficientă pentru ca o rotație cu un unghi arbitrar în jurul unei axe Sl și transpoziția în raport cu o altă axă dată Se, concurentă cu Sl, efectuate consecutiv, să fie echivalente cu o transpoziție este ca axele Sl și Se să fie perpendiculare.

În adevăr, să presupunem că rezultanta rotației de axă Sl și a transpoziției în raport cu o altă axă Se este transpoziția în raport cu o axă L. În acest caz, rezultanta celor trei deplasări, anume a rotației în jurul axei Sl și a celor două transpoziții consecutive în raport cu axa Se și iarăși în raport cu axa Se, adică rotația dată în jurul axei Sl (cele două transpoziții consecutive în raport cu aceeași axă Se dau identitatea), va fi și rezultanta celor două transpoziții consecutive în raport cu L și cu Se. Deoarece cele două transpoziții consecutive în raport cu axele L și Se sînt deci echivalente cu o rotație în jurul axei Sl, dreapta Se (deci și dreapta L) este perpendiculară pe Sl (**417**). Așadar, am demonstrat necesitatea condiției.

Să demonstrăm că ea este și suficientă. Fie axa Sl a rotației date perpendiculară pe axa Se a transpoziției date. În acest caz, rotația considerată poate fi descompusă în două transpoziții consecutive (**417**, Rec.), dintre care *a doua* are ca axă dreapta dată Se; să notăm cu L axa primei transpoziții. În acest caz, rotația de axă Sl și transpoziția în raport cu axa Se, efectuate consecutiv, vor fi echivalente cu trei transpoziții consecutive de axe L, Se și iarăși Se, adică cu o singură transpoziție în raport cu dreapta L. Propoziția noastră ajutătoare este complet demonstrată.

Fie date acum patru drepte *Sa*, *Sb*, *Sc* şi *Sd*; să aflăm *locul geometric al celei de-a cincea drepte Se, satisfăcînd condiţia că există un unghi poliedru SABCDE cu cinci feţe, pentru care cele patru drepte date şi dreapta Se sînt bisectoarele suplementelor unghiurilor plane.*

După cum am văzut mai sus, acest unghi poliedru cu cinci feţe există, dacă cele cinci transpoziţii în raport cu dreptele *Sa*, *Sb*, ... şi *Se* sînt echivalente cu o transpoziţie, cu alte cuvinte, dacă două deplasări, anume rotaţia rezultantă a celor patru transpoziţii consecutive în raport cu dreptele *Sa*, *Sb*, *Sc* şi *Sd* şi transpoziţia în raport cu a cincea dreaptă *Se*, efectuate succesiv, sînt echivalente cu o transpoziţie. În virtutea propoziţiei ajutătoare demonstrate mai sus, axa *Se* a ultimei transpoziţii trebuie să fie, în acest scop, perpendiculară pe axa *Sl* a rotaţiei rezultante a celor patru transpoziţii consecutive de axe *Sa*, *Sb*, *Sc* şi *Sd*.

Aşadar, *locul geometric al dreptelor Se, care satisfac condiţia pusă, este, în general, un plan, anume planul perpendicular pe dreapta Sl, determinată mai sus, şi care trece prin punctul S.*

Toate cele arătate cu privire la unghiul poliedru cu cinci feţe subsistă fără modificări esenţiale şi pentru un număr impar arbitrar de feţe.

628. Fie semidreapta *SA* a dreptei date una dintre muchiile triedrului căutat $S{\cdot}ABC$ şi fie date planele *P*, *Q* şi *R* care trec respectiv prin muchiile *SA*, *SB* şi *SC* şi prin bisectoarele unghiurilor plane opuse.

Să notăm cu *A* un punct oarecare al semidreptei *SA*, cu *B* şi cu *C* punctele de pe semidreptele *SB* şi *SC*, astfel ca să avem $SA = SB = SC$.

Evident, punctul *B* se obţine din *A* prin transpoziţie în raport cu o dreaptă din planul *R* şi care trece prin punctul *S*, anume în raport cu bisectoarea unghiului *ASB*. Prin urmare, punctul *B* se află (compară cu soluţia ex. 597) pe un cerc perfect determinat, anume locul geometric al punctelor care se obţin din punctul *A* prin transpoziţii în raport cu dreptele situate în planul *R* şi concurente în punctul *S*. Aşadar, punctul *B* trebuie să fie unul dintre punctele de intersecţie ale acestui cerc cu planul *Q*. Punctul *B* poate ocupa două poziţii distincte în spaţiu, dacă cercul este secant la planul *Q*, o singură poziţie perfect determinată, dacă cercul este tangent la planul *Q*, şi nu există, dacă cercul şi planul *Q* nu au puncte comune.

Poziţia punctului *C* se determină în mod analog.

Se poate demonstra că, dacă punctele *B* şi *C* sînt determinate, aşa cum s-a arătat mai sus, triedrul $S{\cdot}ABC$ satisface toate condiţiile puse.

În adevăr, punctele *A*, *B* şi *C*, deci şi muchiile *SA*, *SB* şi *SC*, sînt situate respectiv în planele *P*, *Q* şi *R*. Bisectoarea unghiului plan *ASB* se află în planul *R*, deoarece, prin construcţie, punctul *B* se obţine din punctul *A*, deci semidreapta *SB* se obţine din semidreapta *SA* prin transpoziţie în raport cu o dreaptă a planului *R*. Analog, bisectoarea unghiului plan *ASC* este conţinută în planul *Q*. În sfîrşit, planul *P* trece prin bisectoarea unghiului plan *BSC*, deoarece trece prin muchia *SA* şi prin intersecţia planelor *Q* şi *R*.

Mai menţionăm că, dacă un triedru $S{\cdot}ABC$, construit cum se arată mai sus, pornind de la un punct *A* al unei drepte date *SA*, satisface condiţiile problemei, atunci şi triedrul $S{\cdot}A'B'C'$, unde *SA'*, *SB'*, şi *SC'* sînt prelungirile muchiilor *SA*, *SB* şi *SC* dincolo de vîrful *S*, va satisface de asemenea condiţiile problemei.

CARTEA A OPTA

CORPURILE ROTUNDE

EXERCIŢIILE LA CAPITOLUL I

629. Să presupunem că dreapta D, care nu este o generatoare a suprafeţei cilindrice considerate cu baza circulară C, are cu suprafaţa un punct comun A (fig. 164). Planul P, care trece prin dreapta D şi este paralel cu generatoarele suprafeţei, taie planul cercului C după o dreaptă D_0. Generatoarea suprafeţei considerate care trece prin punctul A trece în mod necesar şi prin unul dintre punctele comune A_0 ale cercului C şi ale dreptei D_0. Aşadar, fiecărui punct comun al suprafeţei cilindrice date şi al dreptei D îi corespunde un punct comun al cercului C şi al dreptei D_0. Evident, şi reciproc, fiecărui punct comun al cercului C şi al dreptei D_0 îi corespunde cîte un punct comun al suprafeţei date şi al dreptei D. Deoarece dreapta D_0 poate avea cu cercul C cel mult două puncte comune, rezultă că şi dreapta D, care nu este generatoare, poate avea cu suprafaţa cel mult două puncte comune.

De aici rezultă că dacă o dreaptă are cu o suprafaţă cilindrică circulară dată mai mult decît două puncte comune, ea este o generatoare a acestei suprafeţe.

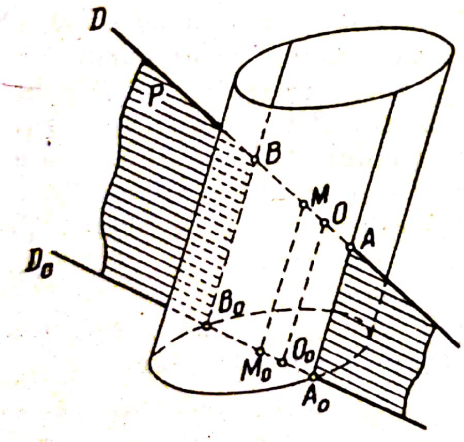


Fig. 164

630. Să presupunem că o coardă oarecare AB a suprafeţei cilindrice date, care trece prin punctul dat O, este tăiată în părţi egale de punctul M (fig. 164). Să notăm cu A_0 şi cu B_0 punctele de intersecţie cu planul bazei cilindrului ale generatoarelor care trec respectiv prin A şi prin B, cu O_0 şi cu M_0 intersecţiile cu acelaşi plan ale dreptelor paralele cu generatoarele şi care trec respectiv prin punctele O şi M. Punctele A_0, B_0, O_0 şi M_0 sînt coliniare şi $M_0A_0 = M_0B_0$.

Locul geometric al mijloacelor M_0 ale coardelor A_0B_0 ale cercului dat, care trec prin acelaşi punct O_0, este un cerc sau un arc de cerc (v. soluţia ex. 60). Prin urmare, locul geometric al punctelor M este o suprafaţă cilindrică cu bază circulară sau o parte dintr-o astfel de suprafaţă, mărginită de două generatoare. În adevăr, locul geometric al punctelor M se poate obţine ducînd prin fiecare punct M_0 o dreaptă paralelă cu generatoarele suprafeţei date.

631. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că cilindrul de rotaţie este dat prin axa şi prin raza sa.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a rezolva problema, vom duce prin punctul M dat un plan P, perpendicular pe axa cilindrului; să notăm cu O intersecția planului P cu această axă. Din punctul O ca centru, descriem în planul P cercul C de rază dată (acest cerc va fi directoarea cilindrului). Mai departe, ducem în planul P, din punctul dat M, tangentele la cercul C; fie A unul dintre punctele de contact. Prin punctul A, ducem dreapta L paralelă cu axa cilindrului (această dreaptă va fi o generatoare). Planul care trece prin dreapta L și prin punctul dat M va fi tocmai cel căutat.

Problema are două soluții, una singură sau nici una după cum punctul M este exterior cercului C, pe cercul C, sau în interiorul lui.

632. Să presupunem că dreapta care corespunde dreptei date D în una dintre omotetiile considerate taie cercul dat C', iar raportul de asemănare are o valoare k dată (ca mărime și ca semn).

Raționînd ca în soluția exercițiului 614 (numai, că în locul dreptei D', avem cercul C'), vom ajunge la concluzia că locul geometric căutat este locul geometric al punctelor S care împart în raportul dat

$$SA' : SA = k \ (k \neq 1) \qquad (1)$$

toate segmentele $A'A$, unde A' este un punct arbitrar al cercului C', iar A un punct arbitrar al dreptei D.

Să aflăm acest loc geometric. Pentru aceasta, să găsim întîi locul geometric al punctelor S, în condiția că punctul A' al cercului C' este *fixat*, pe cînd punctul A descrie dreapta D. În virtutea egalității (1), locul geometric al punctelor S va fi, în aceste condiții, dreapta Δ, paralelă cu D și situată în planul care trece prin dreapta D și prin punctul A'. Prin urmare, locul geometric al *tuturor* punctelor S este o suprafață cilindrică generată de dreptele Δ, paralele cu dreapta dată D.

Pe de altă parte, locul geometric al punctelor S care corespund unui punct A *fixat* pe dreapta D și unor puncte A' arbitrare pe cercul C', reprezintă, în virtutea aceleiași egalități (1), un cerc Γ, omoteticul cercului C' în raport cu punctul A [raportul de asemănare este $AS : AA' = 1 : (k - 1)$]. Acest cerc va fi directoarea suprafeței cilindrice care este locul geometric al tuturor punctelor S.

Așadar, locul geometric al centrelor de omotetie este suprafața cilindrică avînd generatoarele paralele cu dreapta D; ca directoare a acestei suprafețe, putem lua cercul Γ, corespunzător unui punct oarecare A de pe dreapta D, după cum s-a indicat mai sus.

633. Fie ABC triunghiul dat, M un punct arbitrar din spațiu, M_0 proiecția lui M pe planul ABC. Proiecția punctului M pe latura BC coincide cu proiecția pe aceeași dreaptă a punctului M_0, ceea ce este cazul și pentru celelalte două laturi. Dacă proiecțiile punctului M pe cele trei laturi ale triunghiului sînt coliniare, atunci și proiecțiile punctului M_0 pe cele trei laturi ale triunghiului vor fi de asemenea coliniare, și reciproc.

Locul geometric al punctelor M_0 din planul ABC, ale căror proiecții pe cele trei laturi ale triunghiului ABC sînt coliniare este cercul circumscris triunghiului (ex. 72). De aici rezultă că locul geometric al punctelor M este cilindrul de rotație avînd ca bază cercul circumscris triunghiului dat.

Scanned with OKEN Scanner

634. Să presupunem că o suprafață de rotație este, totodată, și o suprafață cilindrică.

Să luăm unul dintre paralelele C ale acestei suprafețe ca directoare a cilindrului. Deoarece centrele tuturor celorlalte paralele ale suprafeței de rotație considerate trebuie să se situeze pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercului C, în centrul acestuia, rezultă că și generatoarele trebuie să fie *perpendiculare* pe planul cercului C. Așadar, suprafața considerată face efectiv parte din suprafețele definite la nr. **439.**

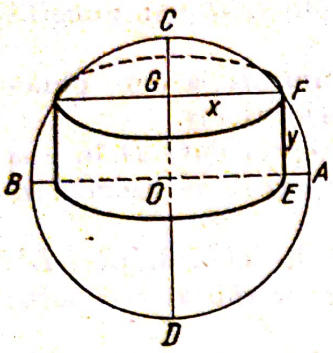


Fig. 165

635. Fie h înălțimea litrului pentru măsurarea corpurilor friabile, iar h' înălțimea litrului pentru măsurarea lichidelor. Luînd ca unitate de măsură centimetrul, vom avea ecuațiile $\pi \cdot (h/2)^2 \cdot h = 1\,000$ și $\pi \cdot (h'/4)^2 h' = 1\,000$, de unde $h = 10{,}8$ cm și $h' = 17{,}2$ cm.

636. Volumele formate prin rotația unui dreptunghi de laturi a și b succesiv în jurul acestor două laturi sînt respectiv egale cu $\pi a b^2$ și cu $\pi a^2 b$, de unde rezultă că raportul acestor volume este egal cu $b : a$.

637. Fie AB și CD (fig. 165) doi diametri perpendiculari ai cercului dat, de centru O și de rază r; $OEFG$ un dreptunghi de laturi $OE = GF = x$ și $OG = EF = y$, situat cum se indică în enunțul problemei.

Aria totală a cilindrului format prin rotația acestui dreptunghi în jurul laturii OG este egală cu $2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$. Dacă această arie are o valoare dată $2\pi f$ (factorul 2π a fost introdus pentru a simplifica calculul care urmează), atunci latura x a dreptunghiului satisface ecuația

$$x^2 + x\sqrt{r^2 - x^2} = f, \tag{1}$$

unde f este un număr pozitiv dat. Totodată, latura x satisface inegalitățile evidente

$$0 < x < r. \tag{2}$$

Ecuația (1) devine, după transformările corespunzătoare și după substituția $x^2 = u$,

$$(u - f)^2 + u(u - r^2) = 0, \tag{3a}$$

sau

$$2u^2 - (2f + r^2)\, u + f^2 = 0. \tag{3b}$$

Ecuația (3b) are rădăcinile reale, dacă $(2f + r^2)^2 - 8f^2 \geqslant 0$, adică dacă

$$r^4 + 4r^2 f - 4f^2 \geqslant 0,$$

de unde

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} r^2 \leqslant f \leqslant \frac{1 + \sqrt{2}}{2} r^2.$$

Deoarece $f > 0$, prin însuși sensul problemei, este suficient să considerăm valorile lui f, care satisfac condiția

$$0 < f \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2} r^2. \tag{4}$$

În acest caz, rădăcinile ecuației (3b) vor fi totdeauna *pozitive*, deoarece coeficientul lui u este negativ, iar termenul liber este pozitiv.

Reciproc, fie u una dintre rădăcinile ecuației (3b). Valoarea corespunzătoare $x = \sqrt{u} > 0$ satisface, cum rezultă din forma (3a) a ecuației (3b) ecuația

$$x\sqrt{r^2 - x^2} = |f - x^2|. \tag{5}$$

De aici se vede, în particular, că $x \leqslant r$, deoarece $\sqrt{r^2 - x^2}$ este un număr real, egal cu $|f - x^2| : x$. Din ultima ecuație (5), rezultă că valoarea astfel obținută a lui x satisface toate condițiile problemei, adică ecuația (1) și inegalitățile (2), pentru

$$x^2 = u < f \tag{6}$$

și nu satisface condițiile problemei, pentru $u \geqslant f$.

Așadar, *aria totală a cilindrului considerat poate avea valoarea dată* $2\pi f$, *numai cu condiția ca* f *să satisfacă inegalitățile* (4); *valoarea corespunzătoare* $u = x^2$ *a pătratului razei bazei cilindrului trebuie să satisfacă ecuația* (3b) *și condiția* (6).

Să arătăm acum că ecuația (3b) are, pentru toate valorile lui f care satisfac inegalitățile (4) cel puțin o rădăcină care satisface condiția (6). În acest scop, vom introduce o nouă necunoscută v, punînd $u = v + f$, și vom scrie ecuația pe care o satisface v; să înlocuim în ecuația (3b) pe u prin valoarea $v + f$; obținem

$$2v^2 + (2f + r^2)v + f(f - r^2) = 0. \tag{7}$$

Această ecuație are rădăcini reale pentru toate valorile lui f care satisfac condiția (4), ca și ecuația (3b); deoarece coeficientul lui v este pozitiv, cel puțin una dintre rădăcini va fi *negativă*. Prin urmare, în virtutea relației $u = v + f$, cel puțin una dintre rădăcinile ecuației (3b) va satisface condiția (6).

După cum se vede ușor, ecuația (7) are, pentru

$$r^2 < f < \frac{1+\sqrt{2}}{2} r^2, \tag{8a}$$

două rădăcini negative, iar pentru

$$0 < f \leqslant r^2 \tag{8b}$$

și pentru

$$f = \frac{1+\sqrt{2}}{2} r^2 \tag{8c}$$

numai o singură rădăcină negativă. Prin urmare, în cazul (8a), ecuația (3b) are două rădăcini care satisfac condiția (6), iar în cazurile (8b) și (8c), numai o singură rădăcină.

De aceea, în cazul (8a), *printre cilindrii considerați avem doi cilindri distincți, a căror arie totală este* $2\pi f$, *pe cînd în cazurile* (8b) *și* (8c), *avem numai un singur cilindru.*

Din cele arătate mai sus, rezultă că valoarea maximă pe care o poate lua aria totală a cilindrului considerat se obține pentru $f = \frac{1+\sqrt{2}}{2} r^2$ și este egală cu $2\pi f = \pi(1+\sqrt{2})\, r^2$. Valoarea corespunzătoare a pătratului razei bazei cilindrului se obține din ecuația (3b) și este $u = x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} r^2$.

638. Fie de calculat partea din aria laterală a unui cilindru de rotație dat (fig. 166), mărginită de arcul N_0N al bazei, de arcul M_0M al intersecției suprafeței cilindrului cu planul ABC, care trece prin diametrul AB al bazei și de segmentele M_0N_0 și MN a două dintre generatoarele sale.

Să împărțim arcul N_0N (fig 167) prin punctele N_1, N_2,... într-un număr arbitrar n de părți egale, să

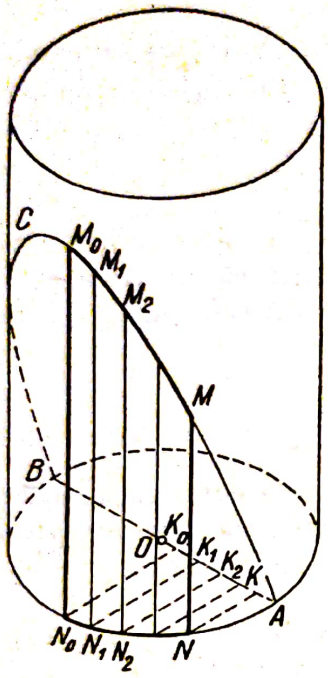


Fig. 166

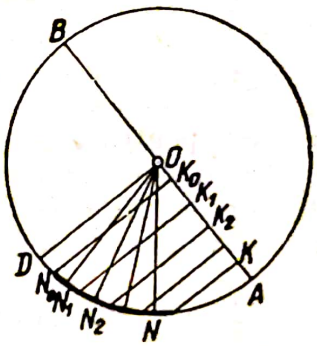


Fig. 167

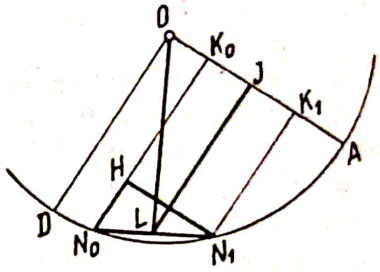


Fig. 168

ducem generatoarele M_1N_1, M_2N_2,... prin punctele de diviziune (fig. 166) și să construim trapezele (rectilinii) $M_0N_0N_1M_1$, $M_1N_1N_2M_2$,... (nereprezentate în figură). Partea căutată din suprafața laterală a cilindrului se determină ca limită a sumei ariilor acestor trapeze, dacă n crește nemărginit.

Pentru calculul acestei limite, vom coborî din punctele N_0, N_1,... perpendicularele N_0K_0, N_1K_1,...pe diametrul AB și vom observa că $M_0N_0 : N_0K_0 = M_1N_1 : N_1K_1 = \ldots = MN : NK$. Folosind aceste proporții, vom avea

$$\text{aria } M_0N_0N_1M_1 = \frac{1}{2}(M_0N_0 + M_1N_1)\cdot N_0N_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(MN : NK)\cdot(N_0K_0 + N_1K_1)\cdot N_0N_1.$$

Mai departe, avem (fig. 168)

$$\frac{1}{2}(N_0K_0 + N_1K_1) = IL,$$

unde I este mijlocul segmentului K_0K, iar L mijlocul coardei N_0N_1. Din asemănarea triunghiurilor OLI și N_1N_0H, unde H este piciorul perpendicularei coborîte din punctul N_1 pe dreapta K_0N_0, găsim:

$$IL \cdot N_0N_1 = N_1H \cdot OL = K_0K_1 \cdot OL. \text{ Așadar,}$$

$$\text{aria } M_0N_0N_1M_1 = (MN : NK) \cdot OL \cdot K_0K_1.$$

Deoarece coardele egale N_0N_1, N_1N_2,... sînt egal depărtate de centru, vom avea, în mod analog,

$$\text{aria } M_1N_1N_2M_2 = (MN : NK) \cdot OL \cdot K_1K_2,$$

etc. Așadar, pentru suma ariilor trapezelor construite, vom avea $(MN : NK) \times \times OL \cdot (K_0K_1 + K_1K_2 + \ldots) = (MN : NK) \cdot OL \cdot K_0K$. Dacă variem numărul n de diviziuni, segmentele MN, NK, și K_0K nu se schimbă, iar segmentul OL are ca limită, dacă n crește nemărginit, raza OA. De aici rezultă că mărimea părții căutate din suprafața cilindrului este egală cu $(MN : NK) \times \times OA \cdot K_0K = (M_0N_0 : N_0K_0) \cdot OA \cdot K_0K$.

Dacă, în figură, sînt date diametrul AB al cercului, punctele N_0 și N și un segment egal cu MN (sau egal cu M_0N_0; este același lucru), atunci putem construi segmentele NK și K_0K, apoi segmentul $(MN : NK) \cdot K_0K$, ca al patrulea proporțional al celor trei segmente cunoscute, și, în sfîrșit, dreptunghiul de laturi $(MN : NK) \cdot K_0K$ și OA. Acesta va fi echivalent cu partea dată a suprafeței.

639. Fie dată suprafața cilindrică cu baza circulară C. Ducem prin centrul O al cercului C o dreaptă paralelă cu generatoarele suprafeței. Vom demonstra, în prealabil, că *orice punct O' al dreptei care trece prin centrul O al bazei* și este *paralelă cu generatoarele suprafeței cilindrice* (fig. 169) *este un centru de simetrie al acestei suprafețe.*

În adevăr, fie A un punct arbitrar al suprafeței. Planul care trece prin punctul A și prin dreapta OO' taie cercul C după un diametru, iar suprafața cilindrică după două generatoare egal depărtate de dreapta OO'. În consecință, dreapta AO' taie a doua oară suprafața cilindrică într-un punct A', care satisface relația $O'A = O'A'$. Aceasta înseamnă că punctul O' este un centru de simetrie al suprafeței. Vom folosi curînd propoziția demonstrată aici.

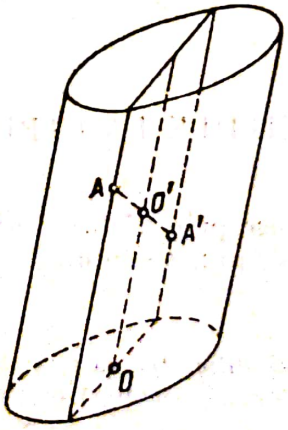


Fig. 169

Fie acum suprafața noastră cilindrică intersectată de două plane neparalele, după două curbe Γ' și Γ'' (fig. 170). Să notăm cu O'

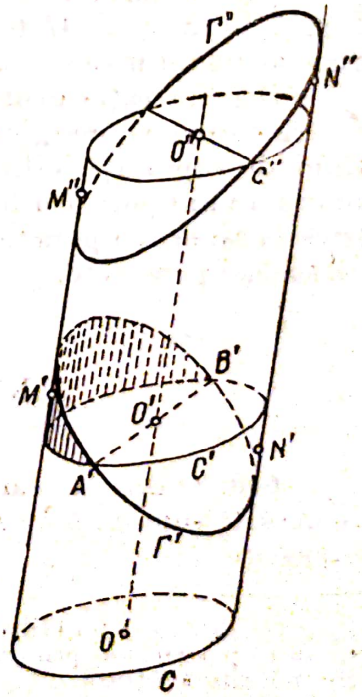


Fig. 170

și cu O'' punctele în care planele acestor secțiuni taie dreapta care trece prin centrul O al bazei C și este paralelă cu generatoarele. Ducem prin punctele O' și O'' plane paralele cu baza. Vom obține în secțiune două cercuri C' și C''.

Planele secțiunilor C' și Γ' determină două porțiuni ale suprafeței cilindrice. Fiecare dintre aceste porțiuni (una dintre ele este haşurată în fig. 170) este mărginită de un arc al cercului C' și de un arc al curbei Γ', ambele arce avîndu-și extremitățile în punctele de intersecție A' și B'. Alegînd pe una dintre aceste porțiuni un punct arbitrar M', iar pe cealaltă un punct N', vom nota ariile acestor două porțiuni respectiv prin aria $\Gamma'M'C'$ și aria $\Gamma'N'C'$. Valoarea ariei fiecăreia dintre aceste două porțiuni poate fi considerată (cum am procedat la ex. 638 pentru cazul cilindrului drept) ca limită a unei suprafețe poliedrale, înscrisă în respectiva porțiune de suprafață cilindrică[1]). Însă ambele porțiuni de suprafață cilindrică despre care este vorba sînt simetrice în raport cu punctul O', în virtutea propoziției demonstrate la începutul soluției; prin urmare, și suprafețele poliedrale înscrise în ele pot fi întotdeauna astfel alese, încît să fie simetrice în raport cu punctul O'. În acest caz, ambele suprafețe poliedrale vor avea aceeași mărime. Trecînd la limită, obținem

$$\text{aria } \Gamma'M'C' = \text{aria } \Gamma'N'C'. \tag{1}$$

În virtutea aceleiași considerații, are loc egalitatea analogă și pentru cele două porțiuni de suprafață cilindrică mărginită de curbele C'' și Γ''

$$\text{aria } \Gamma''M''C'' = \text{aria } \Gamma''N''C'' \tag{2}$$

Notînd acum cu aria $\Gamma'\Gamma''$ mărimea porțiunii de suprafață cilindrică pe care o mărginesc curbele Γ' și Γ'' și folosind notația analogă, aria $C'C''$, vom găsi că aria $\Gamma'\Gamma'' =$ aria $C'C'' +$ aria $\Gamma'N'C' +$ aria $\Gamma''N''C'' -$ aria $\Gamma'M'C' -$ aria $\Gamma''M''C''$. În virtutea egalităților (1) și (2), această relație duce la una dintre egalitățile căutate, anume aria $\Gamma'\Gamma'' =$ aria $C'C''$.

Demonstrația pentru cazul volumelor rămîne aceeași: volumul fiecăruia dintre corpurile mărginite de planele curbelor Γ' și C' și de cele două porțiuni de suprafață cilindrică mărginite de curbele Γ' și C' se definește ca limită a unui poliedru înscris[2]); aceste poliedre, înscrise în două corpuri simetrice în raport cu punctul O, se pot alege astfel încît să fie simetrice în raport cu același punct etc.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL II

640. O dreaptă care trece prin vîrful S al unei suprafețe conice, sau are cu această suprafață un singur punct comun S, sau este o generatoare a acestei suprafețe.

---

[1]) Pentru cazul cilindrului oblic, demonstrația existenței acestei limite și calculul ei nu se pot efectua prin mijloacele geometriei elementare. Vom considera că existența limitei este evidentă.

[2]) Aici am putea repeta, pentru orice cilindru avînd ca bază un cerc, cele arătate în nota precedentă referitor la mărimea ariei.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum că dreapta D, care nu trece prin vîrful suprafeței conice date avînd ca bază cercul C, are cu suprafața punctul comun A (compară cu soluția ex. 629). Planul P, care trece prin dreapta D și prin vîrful S, taie planul cercului C după o dreaptă D_0. Generatoarea suprafeței considerate care trece prin punctul A trece neapărat și prin unul dintre punctele comune A_0 ale cercului C cu dreapta D_0. Așadar, fiecărui punct comun al suprafeței conice considerate și al dreptei D îi corespunde un punct comun al cercului C și al dreptei D_0. Evident, și reciproc, fiecărui punct comun al cercului C și al dreptei D_0 îi corespunde un punct comun al suprafeței considerate și al dreptei D. Deoarece dreapta D_0 poate avea cu cercul C cel mult două puncte comune, rezultă că și dreapta D, care nu trece prin vîrful S al suprafeței conice date, poate avea cu ea cel mult două puncte comune.

De aici rezultă că, dacă o dreaptă are cu o suprafață conică circulară dată mai mult decît două puncte comune, ea este o generatoare a acestei suprafețe.

641. Fie o suprafață de rotație, care este totodată și suprafață conică.

Să luăm un paralel C al acestei suprafețe de rotație ca directoare a conului. Axa suprafeței de rotație va fi perpendiculara D pe planul cercului C, ridicată în centrul acestuia. Deoarece conul are numai un singur vîrf, acesta trebuie să treacă în el însuși, cînd suprafața se rotește în jurul axei ei. De aici rezultă că vîrful conului trebuie să fie situat pe dreapta D. Așadar, suprafața considerată aparține efectiv clasei conurilor de rotație, studiate la nr. 442.

642. Fie S vîrful conului dat, iar C cercul care îi servește ca bază. Să unim punctul dat M printr-o dreaptă cu vîrful conului.

Dacă dreapta SM taie planul bazei conului într-un punct P (fig. 171), atunci ducem prin acest punct tangentele la cercul C; fie A și B punctele de contact. Planele SMA și SMB vor fi, cum se vede ușor, cele căutate. Problema va avea două soluții, o soluție sau nici una, după cum punctul M este exterior cercului C, pe cerc sau în interiorul lui.

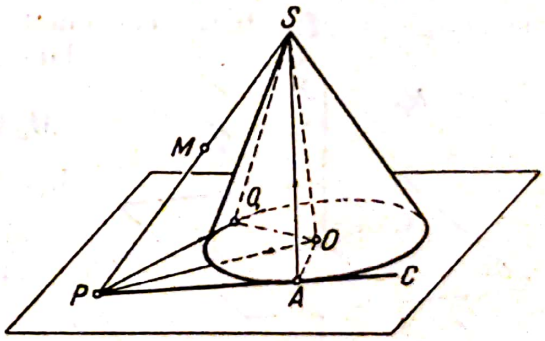


Fig. 171

Construcția necesită modificări, dacă dreapta SM este paralelă cu planul bazei. În acest caz, construim tangentele la cercul C, paralele cu dreapta SM. Planele duse prin vîrful conului și prin fiecare dintre aceste tangente vor fi cele căutate. În acest caz problema are două soluții.

643. Să presupunem că un con de rotație cu vîrful S este tangent la fețele unui diedru de muchie SP, în lungul generatoarelor SA și SB (fig. 171). Să notăm cu O centrul bazei conului.

1) Triunghiurile SPA și SPB sînt egale, avînd cele trei laturi respectiv egale; prin urmare, $\widehat{PSA} = \widehat{PSB}$.

2) Triedrele $S{\cdot}OPA$ și $S{\cdot}OPB$ sînt simetrice, din cauza egalității celor trei unghiuri plane. Prin urmare, vor fi egale și diedrele lor omoloage cu muchia comună SP.

Astfel, am demonstrat ambele afirmații ale teoremei.

644. Fie SO axa unuia dintre conurile de rotație tangente la două plane date PSA și PSB (fig. 171). Planul PSO formează cu aceste două plane diedre egale (ex. 643) și, de aceea, este planul bisector al unuia dintre diedrele formate de cele două plane.

Reciproc, fie SO o dreaptă arbitrară, situată într-un astfel de plan bisector și care taie muchia diedrului într-un punct S, iar O un punct arbitrar de pe această dreaptă. Ducem prin punctul O un plan perpendicular pe dreapta SO și notăm cu P intersecția acestui plan cu muchia diedrului (presupunem că planul astfel construit intersectează muchia diedrului), cu PA și cu PB dreptele de intersecție ale aceluiași plan cu fețele diedrului. Dreapta PO va fi bisectoarea unghiului APB (compară cu soluția ex. 461 *bis*). Prin urmare, există un cerc cu centrul în O, situat în planul construit și care este tangent la dreptele PA și PB. Conul având ca directoare acest cerc și ca vîrf punctul S este tangent la cele două plane SPA și SPB. Acest raționament necesită o mică modificare, dacă planul care trece prin punctul O și este perpendicular pe dreapta SO este paralel cu intersecția planelor date.

Din cele arătate mai sus, rezultă că locul geometric căutat este perechea de plane bisectoare ale diedrelor formate de planele date.

645. Axa unui con de rotație formează unghiuri egale cu toate generatoarele sale. Prin urmare, axa oricăruia dintre conurile considerate formează cu ambele drepte date unghiuri egale. Reciproc, orice dreaptă care formează cu două drepte date unghiuri egale poate fi considerată, evident, ca axa unui con de rotație care trece prin aceste două drepte. În virtutea nr. **346,** locul geometric căutat este o pereche de plane perpendiculare; aceste două plane sînt perpendiculare pe planul care conține dreptele date și trec prin bisectoarele unghiurilor formate de ele.

646. Fie S un punct dat (fig. 172), P un plan care trece prin el, M_0 un punct arbitrar al locului geometric căutat, M un punct arbitrar al aceluiași loc, M_0N_0 și MN distanțele punctelor M_0 și M la planul P, SO perpendiculara pe planul P în punctul S.

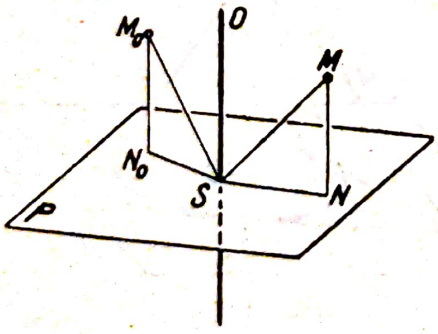


Fig. 172

Conform ipotezei, avem $MS : MN = M_0S : M_0N_0$. Prin urmare, triunghiurile MSN și M_0SN_0 sînt asemenea, de unde $\widehat{MSN} = \widehat{M_0SN_0}$ și, de aceea, $\widehat{MSO} = \widehat{M_0SO}$ sau $\widehat{MSO} = 180° - \widehat{M_0SO}$. Reciproc, dacă pentru un punct oarecare M din spațiu, este satisfăcută una dintre ultimele două egalități, atunci avem $MS : MN = M_0S : M_0N_0$.

De aici rezultă că locul geometric căutat este un con de rotație cu vîrful în punctul S, avînd dreapta SO ca axă și trecînd prin unul dintre punctele M_0 pentru care raportul $M_0S : M_0N_0$ al distanțelor sale la punctul dat și la planul dat are valoarea cerută.

647. Prin vîrful conului dat (mai exact, al suprafeței conice date) și prin centrul cercului de bază ducem planul P, perpendicular pe planul bazei. Deoarece punctele de pe cercul de bază sînt simetrice două cîte două în raport cu planul

P, iar vîrful conului se află în planul P, figura simetrică oricărei generatoare a conului în raport cu planul P este de asemenea o generatoare a aceluiași con. De aici rezultă că *planul P este un plan de simetrie al conului.*

Mai departe, vîrful S al fiecărei suprafețe conice este, evident, un centru de simetrie.

Să aplicăm acum la cazul considerat următoarea propoziție generală (**420**): *două figuri simetrice fiecare cu o a treia, una în raport cu un punct S, iar cealaltă în raport cu un plan P, care trece prin punctul S, se obțin una din cealaltă printr-o transpoziție în raport cu dreapta care trece prin punctul S și este perpendiculară pe planul P. În cazul de față*, vom lua, pentru fiecare dintre cele trei figuri despre care este vorba, suprafața conică dată. Deoarece această suprafață are ca plan de simetrie planul P și ca centru de simetrie punctul S, suprafața conică nu-și schimbă poziția în spațiu (coincide cu ea însăși) la o transpoziție în raport cu dreapta care trece prin vîrful S și este perpendiculară pe planul P. Prin urmare, *această dreaptă va fi o axă de transpoziție a conului dat.*

648. Dat fiind că axa unui con de rotație formează unghiuri egale cu toate generatoarele acestuia, axa conului căutat poate fi numai o dreaptă care trece prin punctul de intersecție S al celor trei drepte date și care formează cu ele unghiuri egale. Reciproc, orice dreaptă care satisface aceste condiții va fi efectiv axa unuia dintre conurile căutate.

Așadar, problema se reduce la cea considerată în exercițiul 443.

Problema are patru soluții (bineînțeles, dacă cele trei drepte date nu sînt situate în același plan. Să presupunem că una dintre dreptele căutate (mai exact, oricare dintre semidreptele acestei drepte care iese din punctul S) formează unghiuri egale cu *semidreptele* SA, SB și SC ale celor trei drepte date, iar SA', SB' și SC' sînt prelungirile acestor trei semidrepte dincolo de punctul S; celelalte trei drepte căutate formează unghiuri egale, una cu semidreptele SA', SB și SC, a doua cu SA, SB' și SC, a treia cu SA, SB și SC'.

Fie date acum două conuri de rotație cu vîrful comun în S și avînd trei generatoare comune. Să notăm aceste generatoare cu SA, SB și SC, alegînd notațiile astfel, încît *semidreptele* SA, SB și SC să formeze unghiuri egale cu axa primului con dat. În aceste condiții, al doilea dintre conurile date va fi unul dintre cele trei conuri despre care a fost vorba mai sus. Notațiile pot fi întotdeauna astfel alese, încît axa celui de-al doilea con dat să formeze unghiuri egale cu semidreptele SA', SB și SC, unde SA' este iarăși prelungirea semidreptei SA dincolo de vîrful S. În acest caz, axele celor două conuri date vor fi situate în planul M, perpendicular pe planul unghiului BSC și care trece prin bisectoarea acestuia. De aici rezultă că planul M va fi planul de simetrie comun al celor două conuri date. De aceea, ambele conuri vor trece prin a patra dreaptă comună SD, simetrica lui SA în raport cu planul M (dreapta SD coincide cu dreapta SA, dacă aceasta din urmă este conținută în planul M, adică dacă $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$.

Pentru construcția dreptei SD trebuie să construim planul M, care trece prin axele celor două conuri. Două dintre generatoarele comune vor fi, cum rezultă din cele de mai sus, simetrice în raport cu planul M. Dreapta simetrică

cu a treia generatoare comună în raport cu planul M va fi tocmai a patra generatoare comună.

649. Să presupunem că unghiul poliedru convex cu patru fețe $S \cdot ABCD$ (fig. 173) este înscris într-un con de rotație, astfel ca toate muchiile sale să fie situate pe aceeași pînză a conului. Fie SO aceea dintre semidreptele axei conului care trece prin interiorul pînzei considerate. Deoarece muchiile SA, SB, SC și SD ale unghiului poliedru cu patru fețe formează unghiuri egale cu semidreapta SO, triedrele $S \cdot OAB$, $S \cdot OBC$, $S \cdot OCD$ și $S \cdot ODA$ vor fi isoscele. Prin urmare, vom avea $\widehat{O \cdot SA \cdot B} = \widehat{O \cdot SB \cdot A}$; $\widehat{O \cdot SB \cdot C} = \widehat{O \cdot SC \cdot B}$; $\widehat{O \cdot SC \cdot D} = \widehat{O \cdot SD \cdot C}$; $\widehat{O \cdot SD \cdot A} = \widehat{O \cdot SA \cdot D}$. Dacă SO trece prin interiorul unghiului poliedru cu patru fețe, rezultă că

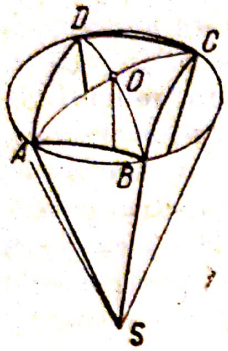


Fig. 173

$$\widehat{B \cdot SA \cdot D} + \widehat{B \cdot SC \cdot D} = (\widehat{O \cdot SA \cdot B} + \widehat{O \cdot SA \cdot D}) +$$

$$+ (\widehat{O \cdot SC \cdot B} + \widehat{O \cdot SC \cdot D}) = (\widehat{O \cdot SB \cdot A} + \widehat{O \cdot SD \cdot A}) +$$

$$+ (\widehat{O \cdot SB \cdot C} + \widehat{O \cdot SD \cdot C}) = \widehat{A \cdot SB \cdot C} + \widehat{A \cdot SD \cdot C},$$

adică

$$\widehat{B \cdot SA \cdot D} + \widehat{B \cdot SC \cdot D} = \widehat{A \cdot SB \cdot C} + \widehat{A \cdot SD \cdot C}. \qquad (1)$$

Dacă axa SO trece prin exteriorul unghiului poliedru cu patru fețe, de exemplu în regiunea mărginită de fața BSC și de suprafața laterală a conului (fig. 174), vom avea, în mod analog,

$$\widehat{B \cdot SA \cdot D} + \widehat{B \cdot SC \cdot D} = (\widehat{O \cdot SA \cdot B} + \widehat{O \cdot SA \cdot D}) +$$

$$+ (\widehat{O \cdot SC \cdot D} - \widehat{O \cdot SC \cdot B}) = (\widehat{O \cdot SB \cdot A} - \widehat{O \cdot SB \cdot C}) +$$

$$+ (\widehat{O \cdot SD \cdot C} + \widehat{O \cdot SD \cdot A}) = \widehat{A \cdot SB \cdot C} + \widehat{A \cdot SD \cdot C}.$$

Obținem aceeași egalitate (1) ca și mai sus.

Egalitatea (1) arată că sumele diedrelor opuse ale unghiului dat cu patru fețe sînt egale.

Reciproc, fie într-un unghi poliedru convex cu patru fețe $S \cdot ABCD$ (fig. 175 și 176) sumele diedrelor opuse egale, astfel că are loc egalitatea (1). Să presupunem că notațiile au fost astfel alese, încît diedrul de muchie SA să fie mai mic decît diedrul de muchie SD și deci, în virtutea egalității (1), diedrul de muchie SC să fie mai mare decît diedrul de muchie SB; această alegere a notațiilor este imposibilă numai în cazul cînd toate diedrele respectivului unghi solid cu patru fețe sînt egale. Deocamdată, vom elimina acest caz din analiza noastră. Vom construi, pe muchia SC a unghiului poliedru cu patru fețe dat, un diedru $B \cdot SC \cdot E$, egal cu diedrul $A \cdot SB \cdot C$ și așezat de aceeași parte a planului BSC ca și fața ASD. A doua față a diedrului construit va trece prin interiorul diedrului $B \cdot SC \cdot D$ (deoarece diedrul de muchie SC

este mai mare decît cel de muchie SB); dreapta de intersecţie SE a celei de-a doua feţe a noului diedru cu planul feţei ASB poate să treacă (fig. 174) sau să nu treacă (fig. 175) prin interiorul unghiului ASB. Analog, construim diedrul $A \cdot SD \cdot F$, egal cu diedrul $B \cdot SA \cdot D$. Să notăm cu SG dreapta de intersecţie a celorlalte două feţe ale fiecăruia dintre diedrele astfel construite. Vom

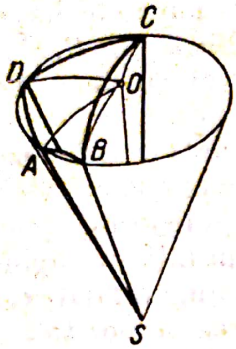


Fig. 174

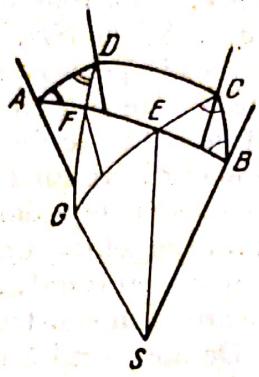


Fig. 175

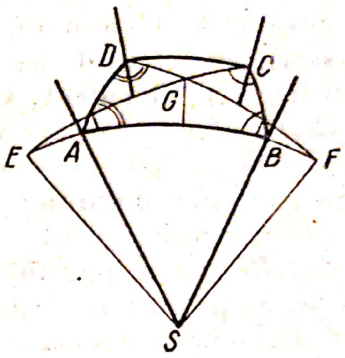


Fig. 176

avea, ţinînd seama şi de egalitatea (1), $G \cdot \widehat{SC} \cdot D = B \cdot \widehat{SC} \cdot D - B \cdot \widehat{SC} \cdot E = B \cdot \widehat{SC} \cdot D - A \cdot \widehat{SB} \cdot C = C \cdot \widehat{SD} \cdot A - C \cdot \widehat{SA} \cdot B = C \cdot \widehat{SD} \cdot A - A \cdot \widehat{SD} \cdot F = G \cdot \widehat{SD} \cdot C$. Aşadar, cele trei triedre $S \cdot EBC$, $S \cdot FAD$. şi $S \cdot GCD$ vor fi isoscele.

Planele care trec prin bisectoarele unghiurilor plane BSC, CSD şi DSA ale unghiului poliedru cu patru feţe şi sînt perpendiculare pe planele acestor unghiuri (nereprezentate în figură) vor juca acelaşi rol, respectiv în triedrele isoscele $S \cdot EBC$, $S \cdot GCD$ şi $S \cdot FDA$ şi vor fi, de aceea (ex. 485), planele bisectoare ale diedrelor de muchii SE, SG şi SF. De aceea, aceleaşi trei plane vor fi şi planele bisectoare ale diedrelor de muchii SE, SG şi SF în triedrul $S \cdot EFG$ şi vor trece deci (ex. 479) prin aceeaşi dreaptă. Această dreaptă formează, cum se vede uşor (folosind cele de la nr. **346**), unghiuri egale cu toate muchiile unghiului poliedru cu patru feţe şi va fi, de aceea, axa conului de rotaţie circumscris.

Am eliminat mai sus cazul în care unghiul poliedru dat cu patru feţe are toate diedrele egale. În acest caz, se poate arăta că axa conului circumscris va fi dreapta de intersecţie a planelor diagonale ASC şi BSD (compară cu observaţia finală la soluţia ex. 487).

Aşadar, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca un unghi poliedru convex cu patru feţe să poată fi înscris într-un con de rotaţie, astfel ca toate muchiile sale să fie situate pe aceeaşi pînză a conului, este ca suma a două diedre opuse să fie egală cu suma celorlalte două diedre opuse*[1]).

Am considerat pînă acum numai un unghi poliedru convex cu patru feţe, ale cărui muchii sînt situate toate pe aceeaşi pînză a conului circumscris. Să trecem acum la cazul general al unui unghi poliedru cu patru feţe arbitrar (şi

[1]) O demonstraţie în totul analogă cu cea de mai sus se poate aplica şi pentru demonstrarea proprietăţii corespunzătoare a unui patrulater plan sau sferic.

nu numai convex), ale cărui muchii pot fi situate atît pe aceeași pînză a conului circumscris, cît și pe pînze diferite.

Să presupunem că cele patru drepte date — muchiile unghiului solid cu patru fețe împreună cu prelungirile lor dincolo de vîrful S — sînt generatoarele unui con de rotație.

Semidreptele acestor patru drepte, situate pe una dintre cele două pînze ale conului, le vom nota cu SA, SB, SC și SD, astfel ca punctele lor de intersecție cu cercul de bază să se succeadă pe acesta în ordinea A, B, C și D (v. fig. 173). Evident, vom obține un unghi poliedru convex cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$, căruia i se pot aplica raționamentele de mai sus. Muchiile acestui unghi poliedru cu patru fețe (în general, distinct de cel dat) vor fi unele dintre muchiile unghiului poliedru cu patru fețe dat și prelungirile celorlalte muchii dincolo de vîrful său (dacă toate muchiile unghiului poliedru cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ ar fi prelungirile muchiilor celui dat, atunci am înlocui unghiul poliedru cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$, pe care l-am construit, prin unghiul dat, care îi este simetric în raport cu vîrful). De aici rezultă următoarea propoziție:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru fețe (convex sau nu) *să fie inscriptibil într-un con de rotație este ca, cel puțin într-un unghi poliedru convex cu patru fețe, ale cărui muchii coincid fiecare cu una dintre muchiile unui unghi poliedru cu patru fețe dat sau cu prelungirea ei dincolo de vîrf, suma a două diedre opuse să fie egală cu suma celorlalte două diedre opuse.*

650. Să presupunem că unghiul poliedru cu patru fețe convex $S{\cdot}ABC$ (fig. 177) este înscris în două conuri de rotație, astfel că toate muchiile sale

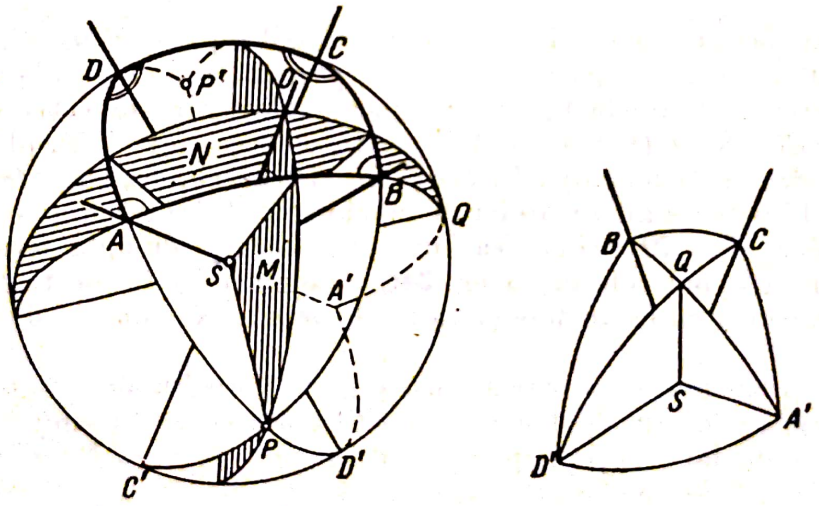


Fig. 177

se situează pe prima pînză a primului con (și nu sînt situate toate pe aceeași pînză a celui de al doilea). Fie SO aceea dintre semidreptele axei primului con care este interioară acestei pînze, iar SO' una dintre semidreptele axei celui de-al doilea con (nereprezentată în figură). Deoarece planul M, care trece prin dreptele SO și SO', este planul de simetrie comun celor două conuri, muchiile unghiului poliedru cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ vor fi simetrice două cîte două în raport cu acest plan (fiecare dintre muchii va fi simetrică în raport cu

planul M *a muchiei* unghiului poliedru cu patru fețe, și *nu a prelungirii ei* dincolo de vîrf, deoarece semidreapta SO, situată în planul M, formează unghiuri egale cu muchiile). De aici rezultă că *diedrele vecine ale unghiului poliedru cu patru fețe dat sînt două cîte două egale.*

Reciproc, să presupunem că, într-un unghi poliedru convex cu patru fețe $S.ABCD$ (fig. 177), diedrele vecine sînt două cîte două egale; fie, pentru a fixa ideile,

$$D\cdot\widehat{SA}\cdot B = A\cdot\widehat{SB}\cdot C \text{ și } B\cdot\widehat{SC}\cdot D = C\cdot\widehat{SD}\cdot A.$$

Să notăm cu SP intersecția planelor BSC și DSA. În virtutea egalității diedrelor de muchii SA și SB, precum și a diedrelor de muchii SC și SD, triedrele $S\cdot PAB$ și $S\cdot PCD$ vor fi isoscele. Prin urmare (ex. 485), planul bisector M al diedrului $A\cdot SP\cdot B$ este perpendicular pe planul unghiului ASB și îl împarte în părți egale; planul M va avea aceleași proprietăți și față de unghiul plan CSD. Cu alte cuvinte, semidreptele SA și SB, precum și SC și SD sînt simetrice în raport cu planul M. Cele două conuri de rotație care trec prin dreptele SA, SB și SC și ale căror axe sînt în planul M (compară cu soluția ex. 648) vor trece și prin dreapta SD, simetrica lui SC în raport cu planul M, deoarece acesta va fi plan de simetrie pentru fiecare dintre conurile considerate. Așadar, unghiul poliedru cu patru fețe convex de care ne ocupăm și care are două perechi de diedre vecine egale va fi înscris în două conuri de rotație. Muchiile SA, SB, SC și SD vor fi situate pe aceeași pînză a unuia dintre conuri; muchiile SA, SB și prelungirile SC' și SD' ale muchiilor SC și SD dincolo de vîrf vor fi situate pe aceeași pînză a celuilalt.

Așadar, *condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru convex cu patru fețe să poată fi înscris în două conuri de rotație, astfel ca toate muchiile sale să fie situate pe aceeași pînză a unuia dintre aceste conuri, este ca unghiul poliedru cu patru fețe dat să aibă două perechi de diedre vecine egale.*

Condiția „astfel ca toate muchiile sale să fie pe aceeași pînză a unuia dintre conuri" este esențială. În adevăr, în fig. 177, unghiul poliedru convex cu patru fețe $S\cdot A'CBD'$ (atenție la ordinea literelor)[1]), unde SA' și SD' sînt prelungirile dincolo de vîrf ale muchiilor SA și SD, este înscris în aceleași două conuri de rotație de axe SO și SO' ca și unghiul poliedru cu patru fețe $S\cdot ABCD$. Însă muchiile unghiului nostru cu patru fețe $S\cdot A'CBD'$ nu se află pe aceeași pînză nici a unuia, nici a celuilalt dintre aceste conuri; pe aceeași pînză a conului de axă SO, se situează muchiile SB și SC și prelungirile SA și SD ale muchiilor SA' și SD'; pe aceeași pînză a conului de axă SO', se situează muchiile SB și SD' și prelungirile SA și SC' ale muchiilor SA' și SC. În general, unghiul poliedru cu patru fețe $S\cdot A'CBD'$ nu va satisface condiția enunțată mai sus: diedrele sale vecine nu vor fi egale două cîte două (dacă acest din urmă fapt ar avea loc, atunci unghiul poliedru cu patru fețe dat $S\cdot ABCD$ ar mai fi înscris într-un al treilea con de rotație, în care semidreptele SA', SC, SB și SD' s-ar situa pe aceeași pînză).

Ne-am ocupat pînă acum numai de un unghi poliedru convex cu patru fețe, avînd toate muchiile pe aceeași pînză a unuia dintre cele două conuri circumscrise. Să trecem acum la cazul unui unghi poliedru cu patru fețe arbitrar (nu neapărat convex), ale cărui muchii pot să fie dispuse atît pe aceeași pînză a fiecăruia dintre cele două conuri circumscrise, cît și pe pînze dife-

[1]) Reprezentat separat în dreapta în fig. 177, pentru intuitivitate.

rite ale fiecăruia dintre ele. Raționînd ca la soluția exercițiului 649, obținem următoarea propoziție generală:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru fețe (convex sau nu) *să fie inscriptibil în două conuri de rotație este ca cel puțin un unghi poliedru convex cu patru fețe, ale cărui muchii coincid fiecare cu una dintre muchiile unghiului poliedru dat sau cu prelungirea ei dincolo de vîrf, să aibă două perechi de diedre vecine egale.*

Să presupunem acum că același unghi poliedru convex cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ (fig. 177), înscris în conurile de rotație de axe SO și SO', este înscris și într-un al treilea con de rotație. Axa SO'' a acestui din urmă con nu poate fi situată în planul M, care trece prin dreptele SO și SO', deoarece acest plan nu conține decît axele a două conuri care trec prin cele trei drepte SA, SB și SC (compară cu soluția ex. 648). Să considerăm acum planul N, care trece prin axele SO și SO''. Ca și mai sus, muchiile SA, SB, SC și SD ale unghiului poliedru cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ vor fi două cîte două simetrice în raport cu planul N, anume muchia SA va fi simetrică muchiei SD, iar muchia SB simetrica muchiei SC (și anume, muchia SA va fi simetrica *muchiei* SD, și *nu a prelungirii ei* dincolo de vîrf, deoarece semidreapta SO, situată în planul N, formează unghiuri egale cu muchiile SA și SD; același lucru este valabil și pentru muchiile SB și SC). Din existența planelor de simetrie M și N, rezultă egalitatea tuturor diedrelor unghiului poliedru cu patru fețe.

Reciproc, fie într-un unghi poliedru convex arbitrar cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ (fig. 177) toate patru diedrele egale. În acest caz, dreapta de intersecție SO a planelor diagonale ASC și BSD formează unghiuri egale cu toate muchiile (compară cu observația de la sfîrșitul soluției ex. 487) și va fi axa conului circumscris. Triedrele isoscele $S{\cdot}PAB$ și $S{\cdot}P'CD$, unde PP' este intersecția planelor BSC și ASD, sînt egale (avînd cele trei diedre respectiv egale), de unde avem $\widehat{PSA} = \widehat{PSB} = \widehat{P'SC} = \widehat{P'SD} = \widehat{PSC'} = \widehat{PSD'}$, unde SC' și SD' sînt prelungirile dincolo de vîrf ale muchiilor SC și SD. Așadar, dreapta SP este axa celui de-al doilea con circumscris. În sfîrșit, demonstrăm, exact în același mod, că dreapta de intersecție SQ a planelor ASB și CSD va fi axa celui de-al treilea con circumscris.

Prin urmare, *condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru convex cu patru fețe să poată fi înscris în trei conuri de rotație este ca toate diedrele sale să fie egale.*

Condiția „astfel ca toate muchiile sale să fie pe aceeași pînză a unuia dintre conuri" este, în cazul de față, de prisos: muchiile fiecăruia dintre cele trei unghiuri poliedre convexe cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$, $S{\cdot}ABC'D'$ și $S{\cdot}A'CBD'$ și ale fiecăruia dintre cele trei simetrice ale lor în raport cu vîrful sînt situate în mod necesar pe aceeași pînză a unuia dintre cele trei conuri.

Să demonstrăm acum că axele SO, SP și SQ ale celor trei conuri formează un triedru tridreptunghic. Axa SO este intersecția planelor ASC și BSD și formează unghiuri egale cu muchiile SA, SB, SC și SD. Prin urmare, transpoziția în raport cu axa SO transformă una în alta muchiile SA și SC, SB și SD, planele ASB și CSD, BSC și DSA. De aceea, intersecția SP a planelor BSC și DSA și intersecția SQ a planelor ASB și CSD se transformă în ele însele

la transpoziția în raport cu axa SO. Aceasta arată că dreptele SP și SQ sînt ambele perpendiculare pe SO. Mai departe, cele două simetrii în raport cu planele M și N, efectuate consecutiv, transformă muchia SA în muchia SC și sînt, de aceea, echivalente cu transpoziția în raport cu axa SO. Aceasta este însă posibil numai dacă planele M și N sînt perpendiculare (compară cu soluția ex. 600, obs. 1°). Deoarece dreptele SP și SQ sînt ambele perpendiculare pe SO, iar planele M și N sînt perpendiculare între ele, triedrul $S \cdot OPQ$ va fi tridreptunghic.

Trecînd de la cazul unui unghi poliedru convex cu patru fețe la cazul unuia arbitrar și raționînd la fel ca în soluția exercițiului 649, obținem următoarea propoziție generală.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru fețe (convex sau nu) *să poată fi înscris în trei conuri de rotație este ca cel puțin un unghi poliedru convex cu patru fețe, în care fiecare muchie coincide cu una dintre muchiile unghiului poliedru dat sau cu prelungirea ei dincolo de vîrf, să aibă cele patru diedre egale.*

651. Să presupunem că conul (sau cilindrul) de rotație căutat trebuie să fie tangent la trei plane date P, Q, și R.

Dacă conul (sau cilindrul) de rotație este tangent la planele P și Q, atunci axa sa se află în unul dintre planele bisectoare ale diedrelor formate de aceste plane; pentru cazul conului de rotație, aceasta rezultă din partea a doua a exercițiului 643, iar pentru cilindru, aceasta se deduce ușor din metoda construirii planelor tangente, dată în soluția exercițiului 631. De aici obținem următorul rezultat: pentru a afla axele conurilor (sau cilindrilor) pe care le căutăm, construim planele bisectoare ale diedrelor formate de planele date și luăm intersecția lor. Mai departe, trebuie să considerăm separat cîteva cazuri (**326**),

1) Cele trei plane date au un singur punct comun. În acest caz, planele bisectoare ale diedrelor formate de planele date trec cîte trei prin patru drepte (compară cu ex. 479). Fiecare dintre aceste patru drepte va fi axa unuia dintre conurile căutate; aceasta rezultă ușor din cele arătate în soluția exercițiului 644.

2) Cele trei plane date se intersectează două cîte două după drepte paralele. Tăind planele date printr-un al patrulea plan, perpendicular pe aceste drepte, obținem în secțiune trei drepte care formează un triunghi. Cercurile înscrise și exînscrise acestui triunghi vor fi respectiv directoarele celor patru cilindri căutați.

3) Două dintre planele date sînt paralele, iar al treilea le taie. La intersecția cu un al patrulea plan, perpendicular pe cele trei date, vom obține două drepte paralele, intersectate de o a treia. Cele două cercuri tangente la aceste trei drepte (**94**) vor fi respectiv directoarele celor doi cilindri căutați.

Așadar, problema are cîte patru soluții în primele două cazuri și două soluții în al treilea. În celelalte cazuri, cînd cele trei plane trec prin aceeași dreaptă sau sînt toate trei paralele, este evident că problema nu va avea soluții.

Fie acum două conuri tangente la trei plane date P, Q și R. Aceste două conuri fac parte dintre cele patru despre care a fost vorba mai sus (cazul 1). Prin urmare, axele lor se află pe unul dintre planele bisectoare ale diedrelor formate de două dintre cele trei plane date. Acest plan bisector va fi plan de

Scanned with OKEN Scanner

simetrie pentru fiecare dintre conurile date. De aceea, cele două conuri vor avea și un al patrulea plan tangent comun, anume planul simetric cu al treilea dintre planele date, în raport cu planul bisector menționat mai sus. Metoda pentru construirea acestui al patrulea plan tangent comun este evidentă.

Într-un caz particular, acest al patrulea plan tangent comun poate coincide cu unul dintre planele date (v. ex. 648). Aceasta se va întîmpla, dacă planul care trece prin axele celor două conuri va fi perpendicular pe unul dintre planele tangente comune. În acest caz, cele două conuri date vor fi tangente.

Observații. 1) Construcției de mai sus a conurilor de rotație tangente la trei plane date, concurente într-un punct, îi corespunde pe sferă construirea unor cercuri mici, tangente la trei cercuri mari date, care nu trec prin același punct.

2) Din rezolvarea acestei probleme rezultă următoarea propoziție:

Dacă două conuri au patru plane tangente comune, atunci acestea sînt două cîte două simetrice în raport cu planul care trece prin axele celor două conuri.

Considerînd intersecția conurilor noastre cu o sferă arbitrară avînd centrul în vîrful lor comun, obținem propoziția corespunzătoare pentru cercurile mici pe sferă (compară cu soluția ex. 489, construcția *o*):

Dacă două cercuri mici au patru cercuri mari tangente comune, atunci acestea sînt două cîte două simetrice în raport cu planul cercului mare care trece prin polii celor două cercuri mici.

652. Să presupunem ca unghiul poliedru convex cu patru fețe $S{\cdot}ABCD$ (fig. 66) poate fi circumscris unui con de rotație avînd una dintre pînze în interiorul unghiului poliedru. Să notăm cu SM, SN, SP și SQ semidreptele după care această pînză a conului este tangentă respectiv la fețele ASB, BSC, CSD și DSA ale unghiului poliedru. În virtutea primei părți a exercițiului 643, vom avea $\widehat{ASQ} = \widehat{ASM}$, $\widehat{BSM} = \widehat{BSN}$, $\widehat{CSN} = \widehat{CSP}$, $\widehat{DSP} = \widehat{DSQ}$. De aici, deducem $\widehat{ASB} + \widehat{CSD} = \widehat{BSC} + \widehat{DSA}$. Așadar, *dacă un unghi poliedru convex cu patru fețe poate fi circumscris unui con de rotație avînd una dintre pînze în interiorul unghiului poliedru, atunci suma a două unghiuri plane ale acestuia este egală cu suma celorlalte două unghiuri plane opuse.*

Așadar, am demonstrat o proprietate a unui unghi poliedru convex cu patru fețe, care este în totul analogă cu proprietatea unui patrulater sferic convex (compară cu prima propoziție enunțată în soluția ex. 496). Aceeași proprietate a unghiului poliedru cu patru fețe s-ar fi putut deduce foarte simplu și din proprietatea corespunzătoare a patrulaterului sferic, considerînd intersecția unghiului poliedru dat cu o sferă al cărei centru coincide cu vîrful unghiului.

Celelalte rezultate din soluția exercițiului 496 se extind și ele la cazul unui unghi poliedru cu patru fețe. Propozițiile corespunzătoare pot fi sau demonstrate direct (după modelul demonstrațiilor din soluția ex. 496), sau deduse din proprietățile patrulaterelor sferice (considerînd iarăși intersecția unghiului poliedru cu patru fețe cu aceeași sferă). De aceea, ne vom mărgini numai la enunțuri:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru convex cu patru fețe să poată fi circumscris unui con de rotație avînd una dintre pînze în interiorul unghiului poliedru este ca suma a două unghiuri plane opuse ale acestuia să fie egală cu suma celorlalte două unghiuri plane opuse.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru fețe (convex sau nu) să poată fi circumscris unui con de rotație este ca, cel puțin în unul dintre unghiurile poliedre convexe cu patru fețe, formate de aceleași plane ca și cel dat, suma a două unghiuri plane opuse să fie egală cu suma celorlalte două unghiuri plane opuse.

Observație. Corespunzător cu cele trei tipuri de patrulatere sferice neconvexe (v. soluția ex. 496, Obs. 2°), există și trei tipuri de unghiuri poliedre neconvexe cu patru fețe (fig. 69, 70, 71).

Să cercetăm unghiul poliedru cu patru fețe care corespunde patrulaterului sferic concav cu două unghiuri intrate (fig. 70).

Acest unghi poliedru cu patru fețe are o formă „de șa" specifică: spre un observator situat, de exemplu, în punctul M sînt îndreptate diedrele intrate, de muchii SA și SC, și diedrele mai mici de 180°, de muchii SB și SD, pe cînd un observator așezat în punctul N are îndreptate spre el diedrele mai mici de 180°, de muchii SA și SC, și unghiurile diedre intrate de muchii SB și SD.

Pentru un unghi poliedru arbitrar cu patru fețe, convex sau nu, are loc următoarea propoziție (iarăși analogă cu aceea care are loc pentru un patrulater sferic; compară cu soluția ex. 496, Obs. 2°):

Condiția necesară și suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru fețe (convex sau nu) *să poată fi circumscris unui con de rotație este ca suma a două oarecare dintre unghiurile sale plane să fie egală cu suma celorlalte două unghiuri plane.*

Și raționamentele care urmează se pot referi fie la un patrulater sferic, fie la un poliedru cu patru fețe. Vom alege prima cale, deoarece ea duce la notații mai scurte (în loc de $\overset{\frown}{ASB}$ va trebui să scriem simplu AB etc.) și la desene mai intuitive. Rezultatele definitive însă vor fi enunțate atît pentru patrulaterele sferice, cît și pentru unghiurile poliedre cu patru fețe.

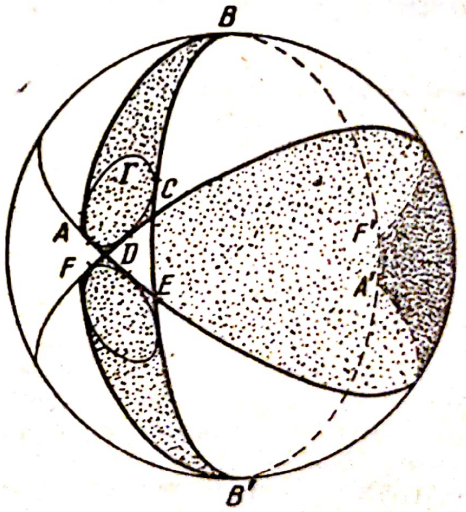


Fig. 178

Prelungind laturile patrulaterului sferic convex $ABCD$ (fig. 178) dincolo de vîrfurile acestuia, putem obține în total șase patrulatere sferice convexe, simetrice două cîte două în raport cu centrul sferei, și anume $ABCD$ și $A'B'C'D'$, $B'EDF$ și $BE'D'F'$, $A'ECF'$ și $AE'C'F$, unde A', B', C', D', E' și F' sînt diametral opuse punctelor A, B, ... și F (în fig. 178, sînt reprezentate numai primele patrulatere din fiecare pereche). Dacă patrulaterul sferic considerat poate fi circumscris unui cerc mic Γ, atunci el va fi circumscris evident și cercului mic simetric cu Γ în raport cu centrul sferei. De aceea, cînd vorbim despre un patrulater sferic circumscris la două sau la trei cercuri mici, trebuie întotdeauna să avem în vedere cercuri mici nesimetrice între ele în raport cu centrul sferei.

De aceea, vom presupune că patrulaterul sferic convex $ABCD$ (fig. 178), circumscris unui cerc mic situat în interiorul patrulaterului, poate fi circumscris totodată unui alt cerc mic, *nesimetric cu primul* în raport cu centrul sferei. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că acest al doilea cerc este

situat în interiorul patrulaterului $B'EDF$. Laturile patrulaterului sferic dat vor fi simetrice două cîte două în raport cu planul cercului mare care trece prin polii celor două cercuri mici, ca arce ale cercurilor mari tangente comune la două cercuri mici (compară cu soluția ex. 651 obs. 2). De aici rezultă că laturile vecine ale patrulaterului sferic dat sînt egale două cîte două (în fig. 178, avem $AB = BC$ și $CD = DA$; dacă al doilea cerc mic ar fi interior patrulaterului $A'ECF'$, am avea $BC = CD$ și $DA = AB$).

Reciproc, fie într-un patrulater sferic convex $ABCD$ (v. fig. 178), laturile vecine egale două cîte două; pentru a fixa ideile, fie $AB = BC$ și $CD = DA$. Triunghiurile sferice ABD și CBD vor fi simetrice (după cele trei laturi) și, de aceea, cercul mare BD taie în părți egale unghiurile cu vîrfurile în B și în D. Altfel spus, cercurile mari AB și BC, precum și CD și DA vor fi două cîte două simetrice în raport cu planul cercului mare BD. Două dintre cele patru cercuri mici tangente la cele trei cercuri mari AB, BC și CD au ca poli puncte ale cercului mare BD, bisectorul unghiului ABC (compară cu soluția ex. 479 și soluția ex. 651, Obs. 1); aceste două cercuri mici vor fi tangente și la cercul mare DA, simetricul lui CD în raport cu planul cercului mare BD. Așadar, patrulaterul sferic convex dat, care are două perechi de laturi vecine egale, va fi circumscris la două cercuri mici nesimetrice în raport cu centrul sferei, iar unul dintre aceste cercuri mici va fi interior patrulaterului.

Așadar, *condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic convex să poată fi circumscris la două cercuri mici nesimetrice în raport cu centrul sferei, și anume astfel încît unul dintre aceste cercuri mici să fie interior patrulaterului, este ca patrulaterul sferic dat să aibă două perechi de laturi vecine egale.*

Condiția „astfel ca unul dintre aceste cercuri mici să fie interior patrulaterului" este esențială. În adevăr, în fig. 178, patrulaterul sferic convex $A'ECF'$ este circumscris aceloraşi două cercuri mici ca și patrulaterul $ABCD$. Însă nici unul dintre aceste cercuri mici nu este interior patrulaterului $A'ECF'$, astfel că acesta nu va satisface, în general, condiția enunțată mai sus, deoarece laturile sale vecine nu vor fi două cîte două egale (dacă acest din urmă fapt ar avea loc, atunci patrulaterul sferic dat $ABCD$ ar fi circumscris unui al treilea cerc mic, nesimetric cu nici unul dintre primele două și situat în interiorul patrulaterului $A'ECF'$).

Patrulaterul sferic $A'ECF'$ are laturile opuse egale două cîte două; în adevăr, $A'E = 180° - AE = 180° - CF = CF'$ și $EC = FA = F'A'$, deoarece arcele AE și CF, precum și EC și AF sînt simetrice în raport cu planul cercului mare care trece prin polii celor două cercuri mici. Fără a insista asupra analizei propoziției reciproce, putem formula acum următoarea teoremă:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic convex să poată fi circumscris la două cercuri mici nesimetrice în raport cu centrul sferei este ca laturile patrulaterului (cele vecine sau cele opuse) *să fie egale două cîte două.*

Ne-am ocupat pînă acum numai de un patrulater sferic convex, circumscris la două cercuri mici nesimetrice în raport cu centrul sferei. Să trecem acum la cazul unui patrulater sferic arbitrar (nu neapărat convex), fără a face nici un fel de ipoteze cu privire la așezarea cercurilor mici înscrise. Raționînd ca în soluția exercițiului 496, obținem următoarea propoziție:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater sferic (convex sau nu) *să poată fi circumscris la două cercuri mici nesimetrice în raport cu centrul sferei este ca cel puțin unul dintre patrulaterele sferice convexe, formate de arcele*

Scanned with OKEN Scanner

aceloraşi cercuri mari ca şi patrulaterul dat, să aibă două perechi de laturi vecine egale.

Pentru unghiul poliedru cu patru feţe, această propoziţie se enunţă astfel:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru feţe (convex sau nu) *să poată fi circumscris la două conuri de rotaţie este ca cel puţin unul dintre unghiurile poliedre convexe cu patru feţe, formate de aceleaşi plane ca şi cel dat, să aibă două perechi de unghiuri plane vecine egale.*

Să presupunem acum că patrulaterul sferic convex $ABCD$ (fig. 178) este circumscris la trei cercuri mici, între care nu există două care să fie simetrice în raport cu centrul sferei. În acest caz, cele două patrulatere sferice convexe $B'EDF$ şi $A'ECF'$ vor fi circumscrise unor cercuri mici interioare patrulaterelor. Totodată, laturile patrulaterului sferic dat trebuie să satisfacă, în virtutea celor arătate mai sus, condiţiile $AB = BC$, $CD = DA$, precum şi condiţiile $BC=CD$, $DA=AB$, de unde obţinem $AB=BC=CD=DA$.

Reciproc, fie un patrulater sferic convex $ABCD$ (fig. 178) cu toate laturile egale. Raţionînd la fel ca mai sus, în cazul patrulaterului cu cîte două laturi vecine egale, vom demonstra că patrulaterul dat este circumscris unui cerc mic interior acestui patrulater, unui al doilea cerc mic, interior patrulaterului $B'EDF$, precum şi unui al treilea cerc mic, interior patrulaterului $A'ECF'$.

Aşadar, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca un patrulater sferic convex să poată fi circumscris la trei cercuri mici, care nu sînt două cîte două simetrice în raport cu centrul sferei, este ca toate laturile sale să fie egale.*

Trecînd de la cazul unui patrulater sferic convex la cel al patrulaterului oarecare şi raţionînd la fel ca în soluţia exerciţiului 496, obţinem următoarea propoziţie generală:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un patrulater sferic (convex sau nu) *să poată fi circumscris la trei cercuri mici, care nu sînt două cîte două simetrice în raport cu centrul sferei, este ca cel puţin unul dintre patrulaterele sferice convexe, formate de arcele aceloraşi cercuri mari ca şi patrulaterul dat, să aibă cele patru laturi egale.*

Pentru unghiul poliedru cu patru feţe, această propoziţie se enunţă astfel:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un unghi poliedru cu patru feţe (convex sau nu) *să poată fi circumscris la trei conuri de rotaţie este ca cel puţin unul dintre unghiurile poliedre convexe cu patru feţe, formate de aceleaşi plane ca şi cel dat, să aibă cele patru unghiuri plane egale.*

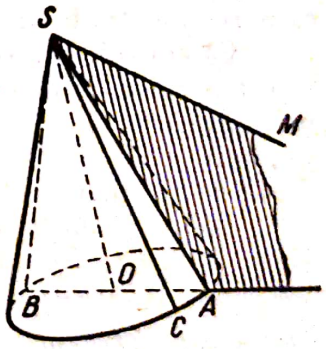


Fig. 179

653. Să ducem prin axa SO a conului dat şi prin semidreapta SM dată un plan (fig. 179) şi să notăm cu SA şi cu SB generatoarele după care acest plan taie conul; vom alege astfel notaţiile, încît generatoarea SA să fie de aceeaşi parte a lui SO ca şi semidreapta SM. SM poate să treacă prin interiorul unghiului OSA şi poate să nu treacă, cum este arătat în figură).

Fie SC o generatoare oarecare a conului, exterioară planului ASB. Din triedrul $S \cdot OCM$, avem $\widehat{CSM} < \widehat{CSO} + \widehat{OSM} = \widehat{BSO} + \widehat{OSM} = \widehat{BSM}$ și, pe de altă parte, $\widehat{CSM} > |\widehat{OSM} - \widehat{CSO}| = |\widehat{OSM} - \widehat{ASO}| = \widehat{ASM}$, adică $\widehat{ASM} < \widehat{CSM} < \widehat{BSM}$. Așadar, dintre toate generatoarele conului, unghiul maxim și unghiul minim cu semidreapta dată SM îl formează

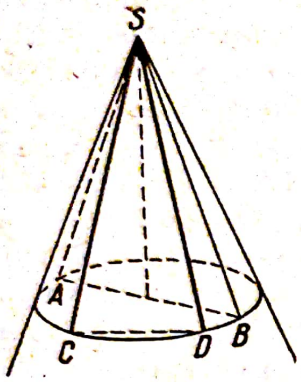


Fig. 180

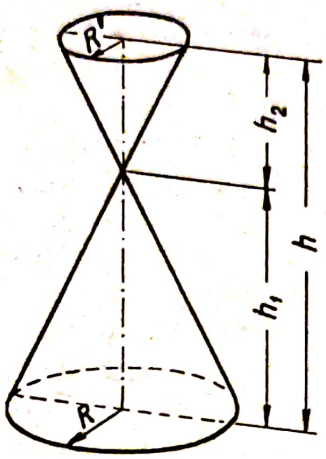


Fig. 181

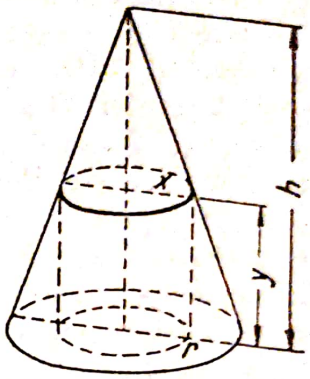


Fig. 182

generatoarele situate în același plan cu această semidreaptă și cu axa conului (compară cu nr. **64**).

654. Să intersectăm conul de rotație dat cu un plan perpendicular pe axă și să notăm cu A și cu B punctele de intersecție cu acest plan a două generatoare situate în același plan cu axa, astfel ca ASB să fie unghiul de la vîrf (unghiul în secțiunea axială) al conului (fig. 180). Mai departe, să notăm cu C și cu D punctele de intersecție ale aceluiași plan secant cu alte două generatoare, nesituate în același plan cu axa.

Să considerăm cele două triunghiuri isoscele ASB și CSD. Laturile laterale ale celor două triunghiuri sînt egale ($SA = SB = SC = SD$), iar baza primului este mai mare decît baza celui de-al doilea ($AB > CD$). De aceea, unghiul ASB de la vîrful primului triunghi va fi mai mare decît unghiul CSD de la vîrful celui de-al doilea.

655. Să notăm cu R și cu R' (fig. 181) razele celor două cercuri, cu h_1 și cu h_2 înălțimile celor două conuri, cu h distanța dintre cele două plane paralele. În aceste condiții, avem, evident, $h_1 + h_2 = h$ și $h_1 : h_2 = R : R'$. De aici, obținem $h_1 = \dfrac{hR}{R + R'}$ și $h_2 = \dfrac{hR'}{R + R'}$. Pentru volumul căutat, obținem

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R'^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3 + R'^3}{R + R'} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 - RR').$$

656. Fie r și h raza bazei și înălțimea conului dat (fig. 182), x și y raza bazei și înălțimea cilindrului căutat. Din asemănarea celor două triunghiuri

dreptunghice, avem $r : h = (r - x) : y$, de unde $y = \frac{h(r-x)}{r}$. Pentru aria laterală a cilindrului, avem $S = 2\pi xy = \frac{2\pi h}{r} x(r - x)$.

Pentru a înscrie cilindrul de arie laterală dată, trebuie să exprimăm pe x din ultima ecuație în funcție de S. Rezolvînd ecuația de gradul al doilea obținem

$$x = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{Sr}{2\pi h}}.$$

Problema are două soluții, pentru $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{Sr}{2\pi h} > 0$, adică pentru $S < \frac{1}{2}\pi rh$, și o singură soluție pentru $S = \frac{1}{2}\pi rh$.

Prin urmare, valoarea maximă posibilă a ariei laterale S a cilindrului va fi

$$S_{max} = \frac{1}{2}\pi rh.$$

Valoarea corespunzătoare a razei bazei și a înălțimii cilindrului vor fi atunci

$$x = \frac{1}{2}r; \quad y = \frac{1}{2}h.$$

Faptul că aria laterală S va fi maximă pentru $x = \frac{1}{2}r$ rezultă și din aceea că produsul $x(r-x)$ a două segmente de sumă constantă este maxim cînd segmentele sînt egale (compară cu nr. **155**, constr. 7).

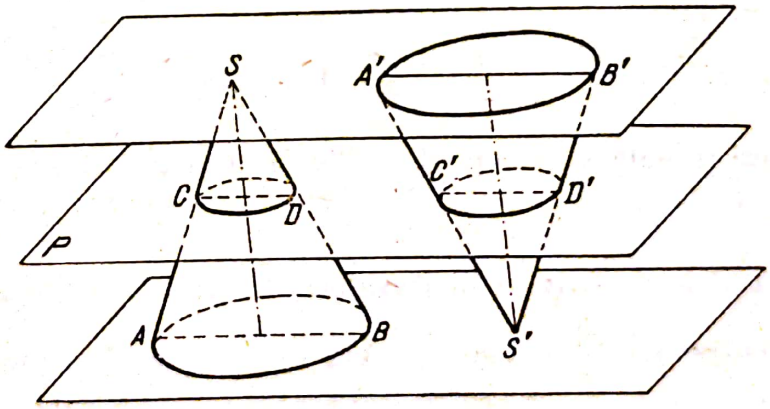


Fig. 183

657. 1° Să notăm cu aria SAB aria laterală a conului SAB, cu aria $ABCD$ aria laterală a trunchiului de con $ABCD$ etc. (fig. 183). Vom avea următoarele egalități:

$$\frac{\text{aria } SCD}{\text{aria } SAB} = \frac{CD}{AB} \cdot \frac{SC}{SA} = \left(\frac{SC}{SA}\right)^2 = \frac{x^2}{l^2}; \quad \frac{\text{aria } S'C'D'}{\text{aria } S'A'B'} = \left(\frac{S'C'}{S'A'}\right)^2 = \frac{(l-x)^2}{l^2},$$

de unde

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } SAB} = 1 - \frac{x^2}{l^2}; \quad \frac{\text{aria } A'B'C'D'}{\text{aria } S'A'B'} = 1 - \frac{(l-x)^2}{l}.$$

Așadar, obținem următoarea ecuație:

$$2 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{(l-x)^2}{l^2} = \lambda$$

sau

$$x^2 + (l-x)^2 = l^2(2-\lambda).$$

Rezolvînd această ecuație în raport cu x, găsim

$$x = \frac{1}{2}\, l(1 \pm \sqrt{3-2\lambda}).$$

Deoarece valoarea lui x trebuie să fie reală și, conform sensului problemei, să satisfacă inegalitatea $0 \leqslant x \leqslant l$, adică $\left| x - \frac{1}{2}\, l \right| \leqslant \frac{1}{2}\, l$, rezultă că λ trebuie să satisfacă condițiile $3 - 2\lambda \geqslant 0$ și $\sqrt{3-2\lambda} \leqslant 1$, de unde $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{2}$.

Pentru $1 \leqslant \lambda < \frac{3}{2}$ avem două valori ale lui x care satisfac condițiile problemei, pentru $\lambda = \frac{3}{2}$ numai o singură valoare și anume $x = \frac{1}{2}\, l$.

2° Printr-o metodă în totul analogă cu cea de mai sus, obținem ecuația

$$y^3 + (h-y)^3 = h^3\,(2-\mu),$$

din care găsim

$$y = \frac{1}{6}\, h(3 \pm \sqrt{21-12\mu}).$$

Ca și mai sus, trebuie să avem $21 - 12\mu \geqslant 0$ și $\sqrt{21-12\mu} \leqslant 3$, de unde $1 \leqslant \mu \leqslant \frac{7}{4}$.

Pentru $1 \leqslant \mu < \frac{7}{4}$ avem două valori ale lui y care satisfac condițiile problemei, pentru $\mu = \frac{7}{4}$ numai o singură valoare și anume $y = \frac{1}{2}\, h$.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL III

658. Fie A, B și C trei puncte necoliniare de pe suprafața considerată. Toate punctele cercului ABC aparțin suprafeței. Fie D un punct al suprafeței, exterior cercului ABC. Să notăm cu S sfera (sau planul) care trece prin punctele A, B, C și D. Dacă M este un punct al sferei (planului) S, atunci putem

duce prin punctele D și M un cerc situat pe sfera (pe planul) S și care intersectează cercul ABC în două puncte. Cercul astfel construit are trei puncte comune cu suprafața noastră, anume punctul D și două puncte ale cercului ABC, deci el este situat în întregime pe suprafața dată. Prin urmare, orice punct M al sferei (sau al planului) S este situat pe această suprafață.

Să admitem că suprafeței considerate îi mai aparține un punct arbitrar E, exterior sferei (sau planului) S. Prin punctul E și printr-un punct arbitrar N din spațiu, putem duce un cerc care taie sfera (planul) S în două puncte. Acest cerc are cu suprafața dată trei puncte comune, anume punctul E și două puncte ale sferei (planului) S, și se află, de aceea, în întregime pe suprafața dată. Prin urmare, în acest caz, orice punct N din spațiu ar aparține suprafeței noastre, ceea ce este imposibil.

Prin urmare, suprafața considerată coincide cu sfera sau cu planul S.

659. Fie A și B punctele de intersecție a două oarecare dintre cercurile date C_1 și C_2. Prin aceste două cercuri putem duce o sferă (sau un plan) S. Dacă printre cercurile date există un cerc C_3, care nu trece cel puțin prin unul dintre punctele A și B, atunci acest cerc C_3 este situat pe sfera (în planul) S, deoarece are mai mult decît două puncte comune cu aceasta (cu acesta), anume punctele sale de intersecție cu cercurile C_1 și C_2. Orice alt cerc dat C taie fiecare dintre cele trei cercuri C_1, C_2 și C_3 în două puncte și are, de aceea, mai mult decît două puncte comune cu sfera (cu planul) S (deoarece cercul C_3 nu trece cel puțin prin unul dintre punctele A și B); așadar, cercul C este de asemenea situat pe sfera (în planul) S.

Prin urmare, dacă printre cercurile date există un cerc care trece cel puțin prin unul dintre punctele A și B. atunci toate cercurile date se află pe sfera (sau în planul) S.

660. Fie C cercul dat (fig. 184), O' centrul său, D axa de rotație, D' proiecția ei pe planul cercului C și O punctul de pe axa D care se proiectează pe planul cercului în punctul O'. Toate punctele cercului C se găsesc, evident, la aceeași distanță R de punctul O și rămîn la aceeași distanță R de punctul O cînd cercul C se rotește în jurul axei D. De aici rezultă că toate punctele locului geometric căutat aparțin suprafeței sferice de centru O și de rază R.

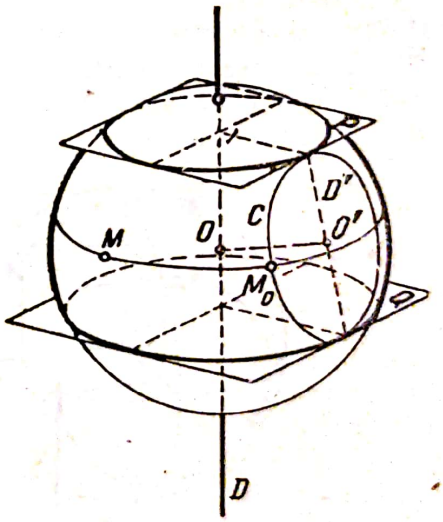


Fig. 184

Să construim, mai departe, tangentele la cercul C, perpendiculare pe diametrul D'. Ele vor fi perpendiculare și pe axa D (**363** *bis*). Prin aceste două tangente ducem planele P și Q, perpendiculare pe axa de rotație D. Dat fiind că toate punctele cercului C se află între planele P și Q, se vor bucura de aceeași proprietate și toate punctele locului geometric căutat. Reciproc, orice punct M de pe suprafața sferei de centru O și de rază R, situat *între planele* P și Q (sau în unul dintre ele), se obține dintr-un punct M_0 al cercului C, cînd acesta se rotește în jurul axei D.

În consecință, *locul geometric căutat este o zonă sferică, aparținînd sferei de centru O și de rază R și este mărginită de intersecțiile acestei sfere cu planele*

P și Q (dacă axa D are un punct comun cu cercul C, zona sferică se transformă într-un segment).

661. Proiecția M a punctului dat A din spațiu pe un plan arbitrar care trece printr-un alt punct dat B, este vîrful unghiului drept AMB și este situat, de aceea (**447** *bis*), pe sfera de diametru AB.

Reciproc, dacă M este un punct al acestei sfere, distinct de A și B, atunci unghiul AMB este drept. Punctul M este proiecția punctului A pe planul care trece prin punctul B și este perpendicular pe AM. Punctul B este proiecția lui A pe planul care trece prin punctul B și este perpendicular pe AB; punctul A coincide cu proiecția sa pe orice plan care trece prin dreapta AB.

Așadar, locul geometric căutat este o sferă de diametru AB.

662. Deoarece centrul secțiunii unei sfere printr-un plan este proiecția centrului sferei pe acest plan, rezultă că centrele tuturor secțiunilor considerate sînt situate pe o aceeași sferă S, dacă planele secante trec prin același punct (ex. 661), și pe un singur cerc C, dacă planele secante trec printr-o aceeași dreaptă (ex. 501).

Dacă punctul dat este interior sferei noastre, atunci locul geometric căutat va fi sfera S, iar dacă punctul este exterior, atunci locul va fi numai partea din sfera S, interioară sferei date. Analog, dacă dreapta dată taie sfera, atunci locul geometric căutat va fi întregul cerc C; dacă nu o taie, atunci numai partea din cercul C, interioară sferei date.

663. Fie A vîrful comun dat al conurilor circumscrise considerate, O centrul comun al sferelor considerate, M unul dintre punctele de contact. Deoarece unghiul OMA este drept, punctul M este situat pe sfera de diametru OA (**447** *bis*). Această sferă va fi tocmai locul geometric căutat, întrucît orice punct M al ei este, evident, unul dintre punctele de contact (segmentul OM trebuie luat ca rază a sferei).

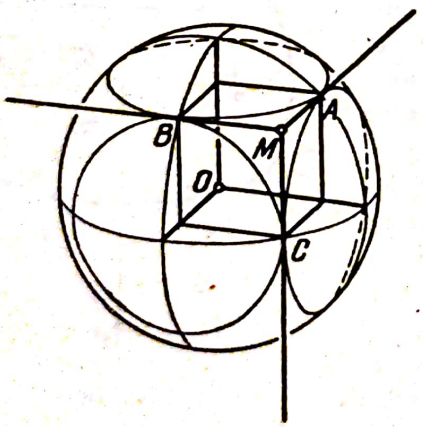


Fig. 185

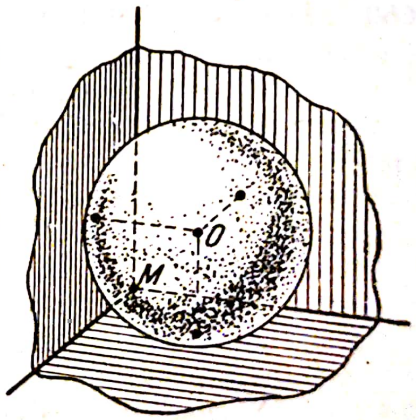


Fig. 186

664. Să presupunem că, dintr-un punct M, putem duce la o sferă trei tangente MA, MB și MC (fig. 185), care formează un triedru tridreptunghic.

Dacă, prin centrul O al sferei, vom duce trei plane respectiv paralele cu planele fețelor acestui triedru, planele vor fi perpendiculare pe tangentele

MA, MB şi MC şi vor trece, deci, prin punctele A, B şi C. Cele trei plane BMC, CMA şi AMB, împreună cu cele trei plane construite, formează un paralelipiped dreptunghic, în care razele OA, OB şi OC vor fi diagonalele a trei feţe. Din egalitatea acestor diagonale ($OA = OB = OC$), deducem uşor că paralelipipedul considerat este un cub. Aşadar, *distanţa punctului M la centrul sferei este egală cu diagonala cubului avînd diagonala feţei egală cu raza sferei.* Dacă R este raza sferei, atunci $OM = R\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Reciproc, dacă această din urmă condiţie este satisfăcută pentru un punct M, atunci, într-un cub constant astfel ca OM să fie diagonala sa (compară cu ex. 523), diagonala feţei va fi egală cu raza sferei $\left(\text{cf. relaţiei } OM = R\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Deoarece diagonalele feţelor OA, OB şi OC sînt respectiv perpendiculare pe dreptele MA, MB şi MC, rezultă că aceste trei drepte perpendiculare două cîte două vor fi tangente la sferă.

Aşadar, *locul geometric al punctelor M este o sferă concentrică cu cea dată; raza sa va fi* $R\sqrt{\frac{3}{2}}$, *unde R este raza sferei date.*

665. Să presupunem că, printr-un punct M, putem duce trei plane perpendiculare două cîte două, tangente la sfera de centru O şi de rază R. Dacă vom duce prin centrul sferei trei plane respectiv paralele la cele trei plane tangente, vom obţine un paralelipiped dreptunghic. Acest paralelipiped va fi un cub, deoarece muchiile sale duse din punctul O, vor trece respectiv prin cele trei puncte de contact şi vor coincide deci cu razele sferei. Aşadar, *distanţa punctului M la centrul sferei este egală cu diagonala cubului avînd ca muchie raza R a sferei*: $OM = R\sqrt{3}$.

Reciproc, dacă ultima condiţie este îndeplinită pentru un anumit punct M, putem duce prin acest punct trei plane perpendiculare tangente la sferă, construind un cub avînd ca diagonală segmentul OM.

Aşadar, *locul geometric al punctelor M este o sferă concentrică cu cea dată; raza ei este* $R\sqrt{3}$, *unde R este raza sferei date.*

666. Vom începe prin a menţiona că, pentru două sfere, va avea loc următoarea propoziţie:

Dacă două segmente sînt conjugate armonic, atunci sfera construită pe unul dintre ele ca diametru taie sub un unghi drept orice sferă care trece prin extremităţile celuilalt.

Aceasta rezultă din propoziţia corespunzătoare a geometriei plane (**189**), dacă tăiem ambele sfere cu un plan care trece prin dreapta dată şi prin centrul celei de-a doua sfere.

De aici urmează că sfera S, care este locul geometric al punctelor avînd raportul distanţelor la punctele A şi B constant (**447** *bis*) intersectează sub un unghi drept orice sferă care trece prin punctele A şi B. În adevăr, punctele A şi B împart armonic unul dintre diametrii sferei S (**116**).

Locul geometric al punctelor ale căror distanţe la trei puncte date A, B şi C sînt proporţionale cu trei numere date este curba de intersecţie a sferei S şi a sferei analoge S', care este locul geometric al punctelor avînd raportul distanţelor la punctele B şi C constant (bineînţeles, dacă sferele S şi S' sînt

Scanned with OKEN Scanner

secante; în caz contrar, locul geometric căutat se reduce la un punct sau nu există).

Deoarece ambele sfere S și S' intersectează sub un unghi drept orice sferă care trece prin punctele A, B și C, curba lor de intersecție se va bucura de aceeași proprietate.

667. Fie M unul dintre punctele pentru care conurile cu vîrful în M, circumscrise la două sfere de centre O și O', sînt egale. Să notăm cu A un punct de intersecție arbitrar al primului con cu prima sferă și cu A' un punct de intersecție arbitrar al celui de-al doilea con cu a doua sferă.

Condiția de egalitate a celor două conuri (mai exact, a celor două suprafețe conice) de rotație este ca unghiurile lor la vîrf să fie egale. Dacă, în cele două conuri considerate, unghiurile la vîrf sînt egale, vor fi egale și unghiurile AMO și $A'MO'$, deci triunghiurile dreptunghice AMO și $A'MO'$ vor fi asemenea. Din asemănarea acestor unghiuri, rezultă că $MO : MO' = AO : A'O'$. Așadar, punctul M aparține sferei S, care este locul geometric al punctelor avînd raportul distanțelor la punctele O și O' egal cu raportul dintre razele sferelor date (**447 bis**). Reciproc, orice punct al sferei S satisface condiția pusă, *dacă el este exterior celor două sfere date*. Ne convingem ușor de aceasta, reluînd raționamentele noastre în ordine inversă.

Dacă cele două sfere date sînt exterioare, atunci locul geometric al punctelor M este sfera S; dacă cele două sfere date sînt secante (sau tangente exterior), atunci locul geometric al punctelor M este partea din sfera S exterioară celor două sfere date; dacă cele două sfere sînt interioare (sau tangente interior), atunci, evident, punctul M nu există (compară cu soluția ex. 134).

În cazul a trei sfere date, locul geometric căutat este un cerc, anume intersecția sferei S, corespunzătoare la două dintre sferele date, cu sfera analogă S', corespunzătoare la alte două dintre sferele date (bineînțeles, dacă sferele S și S' sînt secante; în caz contrar, locul geometric căutat se reduce la un punct sau nu există).

668. Problema se rezolvă analog cu exercițiul 141 din Geometria plană. Fie suma pătratelor distanțelor unui punct M la punctele date A și B, înmulțite cu numerele date (pozitive sau negative), o valoare constantă, pe care o vom nota cu $\pm k^2$, unde k este un segment arbitrar:

$$m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 = \pm k^2. \qquad (1)$$

Cazul $m + n = 0$ este dat, evident, la exercițiul 446; de aceea, vom presupune că $m + n \neq 0$.

Dacă punctul O împarte segmentul AB (ca mărime și ca semn) în raportul $AO : OB$, invers raportului coeficienților dați, avem $OB : AO : AB = m : n : (m + n)$. Aplicînd teorema generalizată a lui Stewart (ex. 218) celor trei puncte A, B și O, care sînt coliniare, și punctului M, găsim $MO^2 \cdot AB + MA^2 \cdot BO + MB^2 \cdot OA + AB \cdot BO \cdot OA = 0$ sau, în virtutea egalității precedente,

$$MO^2 = \frac{m}{m+n} \cdot MA^2 + \frac{n}{m+n} \cdot MB^2 - \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot AB^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece punctul M satisface condiția (1), rezultă de aici că

$$OM^2 = \frac{\pm k^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot AB^2.$$

Locul geometric al punctelor M există, dacă membrul al doilea al ultimei egalități este pozitiv, și este o sferă cu centrul în O, avînd pătratul razei egal cu expresia din membrul al doilea al acestei egalități.

669. Pentru două sfere în spațiu, are loc următoarea propoziție.

Diferența puterilor unui punct arbitrar în raport cu cele două sfere este egală cu dublul produs dintre distanțele acestui punct la axa radicală și distanța dintre centre.

Această proprietate a două sfere se demonstrează în același mod ca și proprietatea corespunzătoare pentru două cercuri (**136**).

De aici, la fel ca în soluția exercițiului 149 din Geometria plană, tragem concluzia că locul geometric căutat este o sferă avînd planul radical comun cu cele două sfere date, cu condiția ca acest loc geometric să existe și să nu se reducă la un punct.

670. Locul geometric al punctelor ale căror puteri în raport cu două sfere date sînt proporționale cu două numere date este o sferă (ex. 669). De aici urmează că locul geometric căutat este un cerc, anume intersecția a două dintre aceste sfere (dacă ele sînt secante; în caz contrar, locul geometric căutat se reduce la un punct sau nu există).

671. Fie S și S' două sfere date. Dacă, prin toate punctele sferei S, vom duce segmente egale și paralele cu un segment dat și dirijate în același sens cu el, atunci locul geometric al celei de-a doua extremități a acestor segmente va fi o sferă S'', egală cu sfera S (compară cu soluția ex. 75). Punctele de intersecție ale sferei S'' cu sfera S' (dacă cele două sfere sînt secante) vor aparține locului geometric al extremităților segmentelor considerate, care se află pe sfera S'. Vom căpăta celelalte puncte ale acestui loc geometric, ducînd prin toate punctele sferei S segmente egale și paralele cu segmentul dat, însă orientate în sens contrar.

De aici rezultă că locul geometric al extremităților segmentelor considerate, situate pe sfera S', se compune, în cazul cel mai general, din două cercuri, putînd fiecare (independent de celălalt) să se reducă la un punct sau nici să nu existe.

Locul geometric al extremităților segmentelor considerate, situate pe sfera S, și al celor situate pe sfera S' se obțin unul din celălalt cu ajutorul unei translații și au, de aceea, în toate cazurile, aceeași formă (dacă unul dintre ele este format din două cercuri, vom avea aceeași situație și pentru al doilea; dacă primul este format dintr-un cerc și dintr-un punct, celălalt va fi de asemenea un cerc și un punct, etc.).

672. Fie vîrfurile M, M' și M'' ale triunghiului căutat $MM'M''$, care se obține printr-o translație din triunghiul dat $AA'A''$, situate respectiv pe trei sfere date S, S' și S''.

Punctul M al sferei S este una dintre extremitățile segmentului MM', egal și paralel cu segmentul dat AA' *și orientat în același sens cu el*; a doua extremitate a aceluiași segment este pe sfera S'. De aici rezultă că punctul M trebuie să fie situat pe un cerc C' perfect determinat, care se poate reduce

la un punct sau să nu existe de loc (compară cu soluția ex. 670). Considerînd, în mod analog, segmentul MM'', egal și paralel cu segmentul dat AA'' și dirijat în același sens cu el, vom ajunge la concluzia că punctul M trebuie să fie situat și pe un al doilea cerc perfect determinat C''. Punctul M trebuie să coincidă, de aceea, cu punctul de intersecție a cercurilor C' și C''. După ce am aflat acest punct M, punctele M și M'' se determină fără dificultate.

Numărul maxim de soluții este doi (cu excepția cazului cînd cercurile C' și C'' coincid; problema devine atunci nedeterminată).

673. Să considerăm intersecția D a planului secant cu planul radical al sferelor date. Orice punct A de pe această dreaptă are aceeași putere în raport cu toate cercurile care se obțin în secțiune, egală cu puterea punctului A în raport cu sferele date. De aceea, dreapta D va fi axa radicală comună a cercurilor de secțiune.

Teorema își pierde valabilitatea, dacă planul secant este paralel cu planul radical, adică perpendicular pe linia centrelor, deoarece, în acest caz, obținem în secțiune cercuri concentrice avînd ca centru comun intersecția planului secant cu linia centrelor.

Însă, dintr-un punct de vedere mai general, astfel de cercuri sînt considerate, uneori, ca avînd axa radicală comună aruncată la infinit (compară cu nr. **136**, nota).

674. Centrul sferei căutate se află pe axa cercului dat (**449**) și pe perpendiculara pe planul tangent dat în punctul de contact. Aceste două drepte sînt concurente, cum se poate demonstra ușor.

675. *Fie de aflat o sferă care trece printr-un cerc dat C și este tangentă la un plan dat P (fig. 187).*

Să ducem prin axa cercului dat C (**449**) un plan Q, perpendicular pe P. Să notăm cu I punctul de intersecție al planului Q cu planul P și cu planul cercului dat, iar cu A și B punctele de intersecție ale planului Q cu cercul dat C (compară cu nr. **159**, constr. 14). Pe dreapta de intersecție a planelor P și Q, luăm, din punctul I (într-o parte sau în cealaltă), segmentul IT, media proporțională între segmentele IA și IB. Punctul T va fi, cum ne convingem ușor, punctul de contact al sferei căutate cu planul P. Centrul O al sferei căutate coincide cu intersecția perpendicularei ridicate pe planul P în punctul T cu axa cercului dat, iar raza sferei va fi egală cu segmentul OA. Așadar, putem considera că sfera căutată este construită, deoarece i-am determinat centrul și raza.

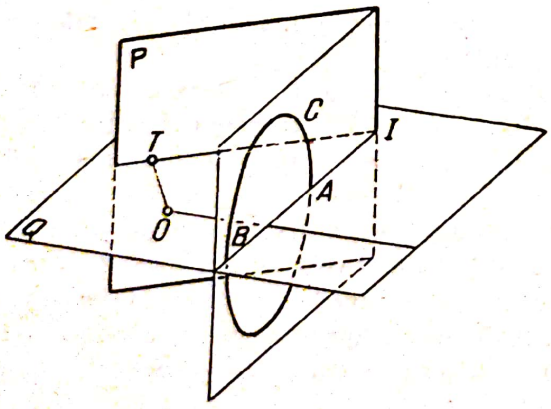


Fig. 187

Numărul maxim de soluții: două.

Construcția necesită modificări, dacă planul P este paralel cu planul cercului C. În acest caz, punctul de contact T va fi intersecția planului P cu axa cercului dat. Centrul sferei căutate va fi intersecția axei cercului dat

cu planul perpendicular pe segmentul AT, prin mijlocul acestuia. În acest caz, problema are o singură soluție.

Fie acum *de aflat o sferă care trece printr-un cerc dat C și este tangentă la o sferă dată S* (compară cu nr. **159**, constr. 15).

Să ducem prin cercul C o sferă arbitrară, secantă la sfera dată S; aceasta se face ușor, descriind o sferă prin cercul C și printr-un punct oarecare al sferei S. Să notăm cu C' intersecția celor două sfere. Planul tangent comun la sfera S și la sfera căutată, în punctul lor de contact T, trece prin intersecția planelor în care se află respectiv cercurile C și C' (**458**); aceasta ne permite să construim punctul de contact T (folosind cele arătate la nr. **452**). Centrul sferei căutate se află la intersecția axei cercului dat C cu dreapta care unește punctul T cu centrul sferei date. Sfera având centrul în acest punct și care trece prin punctul T va fi cea căutată.

Numărul maxim de soluții: doi.

Construcția necesită modificări, dacă planul cercului C' este paralel cu planul cercului C. În acest caz, punctul de contact T va fi intersecția sferei date cu axa cercului dat. Centrul sferei căutate va fi intersecția axei cercului dat cu planul perpendicular pe segmentul AT, prin mijlocul acestuia, unde A este un punct arbitrar al cercului dat.

676. Orice plan care trece prin centrele a două sfere ortogonale le intersectează după două cercuri ortogonale. De aici rezultă următoarea construcție.

Ducem un plan prin axa cercului dat (**449**), și prin centrul sferei date (dacă centrul sferei este situat pe axa cercului, atunci ducem un plan arbitrar, care trece prin axă). În acest plan, construim un cerc care trece prin punctele de intersecție ale planului cu cercul dat și este ortogonal curbei de intersecție a planului cu sfera dată (soluția ex. 258, Obs.). Sfera având cercul astfel construit ca un cerc mare va fi tocmai cea căutată.

Problema are o singură soluție, cu excepția cazului în care planul cercului dat trece prin centrul sferei date; problema are atunci o infinitate de soluții, dacă cercul dat este ortogonal la sfera dată, și nu are soluții, în cazul contrar.

677. Fie de aflat o sferă tangentă la dreapta D, având ca centru un punct de pe dreapta D_0 și trecînd prin punctul A.

Prin punctul A, ducem un plan P, perpendicular pe dreapta D_0, pe care trebuie să se afle centrul sferei căutate (fig. 188). Aceasta intersectează planul P după cercul C, care trece prin punctul A și are ca centru unul dintre punctele dreptei D_0. Puterea punctului M, care este intersecția dreptei date D cu planul P, în raport cu cercul C este egală cu puterea aceluiași punct în raport cu sfera căutată . Această observație ne permite să determinăm segmentul de pe tangenta dusă din punctul M la sfera dată și să construim punctul de contact T al sferei căutate cu dreapta dată D. Cercul C și punctul

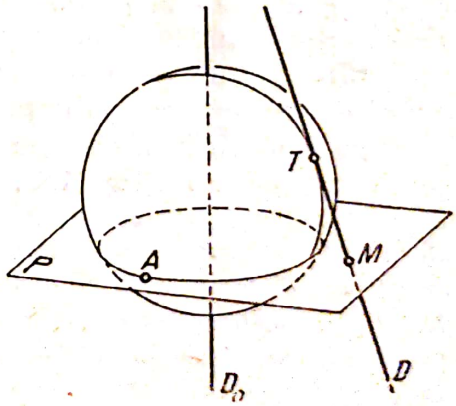


Fig. 188

T determină sfera căutată (**450**; dacă punctul T este situat pe cercul C, atunci v. ex. 674).

Problema are două soluții, o soluție sau nici una, după cum punctul M este exterior cercului C, pe cerc sau interior.

Dacă punctul A este situat pe dreapta D_0, cercul C se reduce la un punct și construcția se simplifică întrucîtva, deoarece vom avea atunci $MT = MA$.

Am presupus, în cursul construcției, că dreapta D intersectează planul P într-un punct M. Dacă dreapta D este paralelă cu planul P, adică perpendiculară pe dreapta D_0, construcția se modifică; punctul de contact T va fi atunci situat în planul care trece prin dreapta D_0 și este perpendicular pe dreapta D, iar problema va avea o soluție unică. În sfîrșit, dacă dreapta D este conținută în planul P, problema devine nedeterminată dacă dreapta D_0 este tangentă la cercul C, și nu are soluții în cazul contrar.

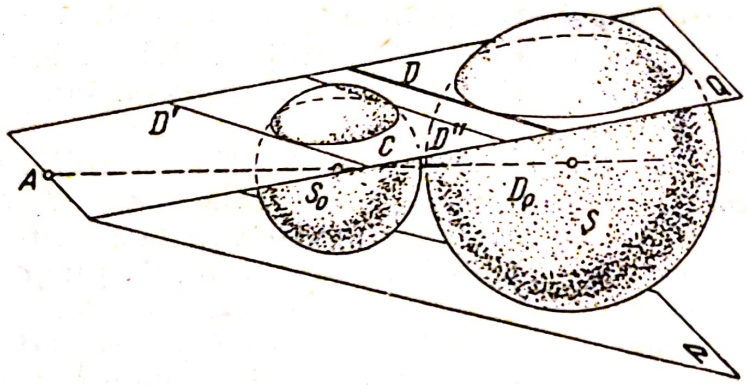


Fig. 189

678. Fie de aflat o sferă tangentă la o dreaptă D și la un plan P și avînd centrul într-unul din punctele dreptei D_0.

Să construim o sferă arbitrară S_0, avînd centrul pe dreapta D_0 și tangentă la planul P (fig. 189). Orice altă sferă cu centrul pe aceeași dreaptă D_0 și tangentă la același plan P, inclusiv sfera căutată, este omotetică cu sfera S_0, centrul de asemănare fiind punctul de intersecție A al dreptei D_0 cu planul P (sau se obține din sfera S_0 printr-o translație în direcția dreptei D_0, dacă aceasta este paralelă cu planul P). Pentru a determina raportul de asemănare (mărimea translației), ducem planul Q, care trece prin dreapta D și prin punctul A (care trece prin dreapta D și este paralel cu dreapta D_0). Fie C cercul după care acest plan Q intersectează sfera S_0. Construim tangentele D' și D'' la cercul C, paralele cu dreapta dată D. Omotetia de centru A (translația în direcția dreptei D_0) care transformă una dintre dreptele D' și D'' în dreapta D va transforma sfera S_0 în sfera căutată S.

Problema are două soluții, una singură sau nici una, după cum planul Q va fi secant la sfera S_0, tangent la ea sau nu va avea puncte comune cu sfera.

679. Fie de aflat o sferă care trece printr-un cerc C și este tangentă la un cerc C'.

Toate sferele care trec prin cercul C au planul radical comun și, deci, intersectează (ex. 673) planul cercului C' după cercuri avînd axa radicală comună, anume intersecția D a planelor celor două cercuri. Totodată, sfera căutată intersectează planul cercului C' după un cerc tangent la cercul C'. De aici rezultă următoarea construcție.

Prin cercul C, ducem o sferă arbitrară, care intersectează planul cercului C' după un cerc C_0. În planul cercului C', construim un nou cerc C'', tangent la cercul C', astfel ca axa radicală a cercurilor C_0 și C'' să fie dreapta D (compară cu nr. **311**). Cercurile C și C'' se situează, cum vedem ușor, pe aceeași sferă, deoarece fiecare punct al dreptei D are aceeași putere în raport cu cercurile C și C_0, deci și în raport cu cercurile C și C''. Sfera care trece prin cercurile C și C'' va fi tocmai cea căutată.

Numărul maxim de soluții este doi.

O discuție mai amănunțită ne duce, fără dificultate, la următoarea concluzie. Problema nu are soluții, dacă unul dintre punctele de intersecție ale cercului C cu planul cercului C' este interior acestuia din urmă, iar al doilea exterior, adică dacă cercurile sînt *înlănțuite* (așa cum se leagă între ele două verigi vecine ale unui lanț), precum și în cazul cînd cele două cercuri sînt secante sau tangente. Problema are o singură soluție, dacă cercurile au un singur punct comun, dar nu sînt tangente în acest punct comun. Problema are două soluții, dacă cercurile nu au puncte comune și nu sînt înlănțuite, cu excepția cazului în care cele două cercuri sînt situate în același plan.

680. Să considerăm cercurile în lungul cărora conurile circumscrise cu vîrful într-un punct dat A, situat în planul cercului C (și, bineînțeles, exterior acestuia), sînt tangente la sferele care trec prin acest cerc C. Toate aceste cercuri sînt situate pe aceeași sferă, deoarece și tangentele AT și AT' la cercul C, duse din punctul A, fac parte dintre generatoarele oricăruia dintre aceste conuri circumscrise. Centrul sferei S este punctul A, iar raza ei segmentul AT. Această sferă S (cu excepția punctelor situate în planul cercului C și distincte de T și de T') va fi locul geometric al cercurilor considerate. În adevăr, sfera care trece prin cercul C și printr-un punct M al sferei S, exterior planului cercului C, este tangentă în punctul M la dreapta AM, în virtutea egalității $AM = AT$. De aceea, punctul M se află pe unul dintre cercurile considerate.

Locul geometric al punctelor de contact ale planelor tangente la aceleași sfere și care trec printr-o dreaptă dată, situată în planul cercului C (și, bineînțeles, fără a-l intersecta pe acesta din urmă), este un cerc, anume intersecția sferei S, care corespunde — după cum am mai arătat mai sus — unui punct A de pe dreapta dată, cu o sferă analogă, corespunzătoare unui alt punct de pe aceeași dreaptă.

Fie acum T și T' două puncte date ale cercului C; A intersecția tangentelor în punctele T și T' la cercul C; AX intersecția planelor tangente în punctele T și T' la un cerc arbitrar, care trece prin C. Triedrul $A \cdot TT'X$ are, evident, diedrele, de muchii AT și AT' egale, deci și unghiurile plane TAX și $T'AX$ egale. De aceea, dreapta AX este situată (**346**) în planul P, care trece prin bisectoarea unghiului TAT' și este perpendicular pe planul lui. Planul P va fi tocmai, cum ne convingem ușor, locul geometric al dreptelor de intersecție a planelor tangente considerate. Aceasta rezultă din faptul că, dacă AX este o dreaptă arbitrară, situată în planul P și trecînd

Scanned with OKEN Scanner

prin punctul A, atunci există (ex. 674) o sferă care trece prin cercul C și este tangentă în punctul T la planul TAX.

Dacă tangentele în punctele T și T', la cercul C sînt paralele, atunci locul geometric al dreptelor de intersecție a planelor tangente în punctele T și T' la sferele care trec prin cercul C, va fi de asemenea, evident, un plan.

681. Fie P planul care trece prin punctele A și B și prin dreapta dată D, care taie prelungirea segmentului AB. Orice sferă care trece prin punctele A și B și este tangetă la dreapta D, intersectează planul P după un cerc care trece de asemenea prin punctele A și B și este tangent la dreapta D. În planul P, nu există însă decît două cercuri care se bucură de aceste proprietăți (nr. **159**, constr. 14); să le notăm cu C' și cu C''.

Așadar, fiecare dintre sferele despre care este vorba trece fie prin cercul C', fie prin cercul C''. Reciproc, orice sferă care trece prin unul dintre cercurile C' sau C'' se bucură, evident, de proprietățile cerute.

682. Fie A și B punctele date, iar P planul dat.

Dacă dreapta AB taie planul P într-un punct I, segmentul tangentei duse din punctul I la orice sferă care trece prin punctele A și B este medie proporțională între segmentele IA și IB. De aici rezultă că locul geometric căutat al punctelor de contact este un cerc de centru I și de rază egală cu $\sqrt{IA \cdot IB}$. Dacă însă dreapta AB este paralelă cu planul P, atunci locul geometric căutat al punctelor de contact este dreapta după care planul P taie planul perpendicular pe segmentul AB, prin mijlocul acestuia.

Fie acum dată o sferă S în locul planului P. Să ducem prin punctele A și B o sferă arbitrară S', secantă la S. Dacă dreapta AB intersectează planul radical al sferelor S și S' într-un punct I, atunci segmentul de tangentă din punctul I la sfera S și la oricare dintre sferele care trec prin punctele A și B este medie proporțională între segmentele IA și IB. De aici urmează că locul geometric căutat al punctelor de contact este linia de contact a conului cu vîrful în I, circumscris sferei S. Dacă dreapta AB este paralelă cu planul radical al sferelor S și S', atunci locul geometric căutat este cercul după care sfera S intersectează planul perpendicular pe segmentul AB, prin mijlocul acestuia.

683. Fie A și B punctele date, P și Q planele date. Vom presupune că nici unul dintre punctele date nu este situat în nici unul dintre planele date.

Centrul sferei căutate care trece prin punctele A și B și este tangent la planele P și Q, se află într-un plan perpendicular pe segmentul AB prin mijlocul acestuia, precum și într-un plan bisector perfect determinat al unghiurilor diedre formate de planele P și Q (anume în planul bisector care trece prin interiorul diedrului care cuprinde punctele A și B; dacă cele două puncte sînt situate în diedre diferite, atunci este evident că problema nu are soluții). Prin urmare, centrul sferei căutate se află pe dreapta de intersecție D_0 a acestor două plane.

Dacă planele date P și Q sînt paralele, atunci în locul planului bisector trebuie să luăm un plan paralel cu planele P și Q și egal depărtat de ele.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, *problema noastră se reduce la următoarea: să se găsească o sferă care trece printr-un punct A, este tangentă la un plan P și are ca centru un punct al dreptei D_0.*

Această din urmă problemă, se rezolvă în totul analog cu aceea considerată la exercițiul 678 (în locul dreptei D, tangentă la sfera dată, este dat unul dintre punctele acesteia, anume punctul A). Raportul de asemănare (mărimea translației) este determinat de condiția ca sfera căutată, omotetică cu sfera ajutătoare S_0 (sau obținută din ea printr-o translație), să treacă prin punctul dat A (compară cu soluția ex. 678) .

Numărul maxim de soluții este doi. Problema poate să nu aibă soluții, chiar în cazul cînd ambele puncte date sînt interioare aceluiași diedru format din planele date. Problema devine nedeterminată, dacă punctele date sînt situate ambele în interiorul aceluiași diedru, format de planele date și simetrice în raport cu planul bisector al acestuia (atunci ambele plane care determină dreapta D_0 coincid).

Observație. Ipoteza făcută la începutul soluției, anume că ambele puncte date sînt exterioare fiecăruia dintre planele date, este esențială.

În adevăr, de exemplu dacă punctul A este conținut în planul P, atunci condiția ca sfera S să fie tangentă la planele P și Q, și anume la primul în punctul A, determină două sfere: în general, nici una dintre ele nu va trece prin al doilea punct dat.

684. Fie D și D' două drepte care nu sînt situate în același plan, d și d' proiecțiile lor pe planul P paralel cu ele și aflat la distanță egală de ambele; O centrul situat în planul P al unei sfere tangente la dreptele D și D'; A și A' punctele de contact; a și a' proiecțiile lor pe planul P.

Triunghiurile dreptunghice OAa și $OA'a'$ sînt egale (deoarece $OA = OA'$ și $Aa = A'a'$), de unde $Oa = Oa'$. Așadar, punctul O este egal depărtat de dreptele d și d'. Reciproc, din egalitatea $Oa = Oa'$, rezultă că $OA = OA'$ și orice punct al planului P, egal depărtat de dreptele d și d', este centrul uneia dintre sferele considerate. De aici urmează că locul geometric al punctelor O este o pereche de drepte perpendiculare, anume bisectoarele unghiurilor formate de dreptele d și d'.

685. Dacă un punct O este centrul unei sfere tangente la trei plane date, el este egal depărtat de cele trei plane, și reciproc. În consecință, problema se reduce la aflarea locului geometric al punctelor egal depărtate de trei plane date.

În cazul cînd cele trei plane date se intersectează într-un punct, locul geometric căutat este format din patru drepte (compară cu ex: 479). Fiecare dintre aceste patru drepte este, totodată, axa unui con de rotație tangent la cele trei plane date (compară cu ex. 651).

Dacă cele trei plane date nu au puncte comune și se intersectează două cîte două după trei drepte paralele, cele șase plane bisectoare ale diedrelor formate de planele date se intersectează cîte trei după patru drepte, paralele cu dreptele de intersecție ale planelor date. Aceste patru drepte vor fi tocmai locul geometric căutat. Fiecare dintre cele patru drepte va fi, totodată, axa unui cilindru tangent la cele trei plane date (compară cu ex. 651).

Dacă două dintre planele date sînt paralele, iar al treilea le taie, atunci cele patru plane bisectoare ale diedrelor formate de planele date sînt paralele

două cîte două (compară cu nr. **94**); aceste plane bisectoare se intersectează două cîte două după două drepte, distincte de dreptele de intersecție ale planelor date. Aceste două drepte vor fi locul geometric căutat. Fiecare dintre cele două drepte va fi totodată axa căutată a unui cilindru tangent la cele trei plane date (compară cu ex. 651).

686. Fie de aflat o sferă tangentă la cele patru laturi AB, BC, CD și DA ale unui patrulater strîmb sau la prelungirile lor, altfel spus, o sferă tangentă la patru drepte AB, BC, CD și DA, nesituate în același plan. Pentru a scurta exprimarea, vom da acestei sfere denumirea de *sferă tangentă* și vom nota centrul ei cu O.

Punctul O trebuie să fie egal depărtat de cele patru drepte date și, reciproc, orice punct egal depărtat de cele patru drepte date este centrul uneia dintre sferele tangente. Însă locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de dreptele DA și AB este (ex. 441) format din două plane P și P', perpendiculare pe planul DAB și care trec prin bisectoarea unghiului DAB și prin bisectoarea suplementului său. Vom numi aceste plane, pentru a ușura exprimarea, *respectiv planele bisectoare interior și exterior* ale unghiului DAB al patrulaterului. Analog, vom nota cu Q, R, S și cu Q', R', S' respectiv planele bisectoare interioare și exterioare ale unghiurilor din B, C, D ale patrulaterului. Orice punct O, egal depărtat de cele patru drepte date, este situat în unul dintre planele P sau P', în unul dintre planele Q sau Q', în unul dintre planele R sau R' și, în sfîrșit, în unul dintre planele S sau S'. Reciproc, dacă un punct se află în unul dintre planele P sau P', precum și în unul dintre planele Q sau Q', și, totodată în unul dintre planele R sau R', el va fi egal depărtat de toate cele patru drepte, așadar, va fi situat și în unul dintre planele S sau S'. Prin urmare, *în cazul general*, există opt puncte egal depărtate de cele patru laturi ale patrulaterului; acestea vor fi punctele de intersecție, trei cîte trei, ale planelor bisectoare:

$$PQR,\ P'QR,\ PQ'R,\ PQR',$$
$$P'Q'R',\ PQ'R',\ P'QR',\ P'Q'R.$$

Așadar, există, în general, opt sfere tangente la toate laturile patrulaterului strîmb sau la prelungirile lor.

Dacă trei oarecare dintre planele noastre, să zicem P, Q și R, nu ar avea puncte comune, atunci sfera corespunzătoare nu ar exista (din cele ce urmează, se va vedea că acest caz este imposibil).

Dacă trei oarecare dintre planele enumerate se taie după o aceeași dreaptă, atunci fiecare dintre punctele acestei drepte va fi egal depărtat de cele patru drepte date și vom avea o infinitate de sfere tangente.

De exemplu, dacă laturile patrulaterului nostru satisfac condiția $AB + CD = BC + DA$, atunci planele P, Q și R trec prin aceeași dreaptă (v. soluția ex. 558, Obs.). Se poate arăta că, și reciproc, dacă planele P, Q și R trec prin aceeași dreaptă, avem $AB + CD = BC + DA$.

Pentru a discuta toate posibilitățile existente aici, vom alege ca pozitive pe dreptele AB, BC, CD și DA respectiv sensurile de la A la B, de la B

la C, de la C la D și de la D la A. În acest caz, vom avea, ca mărime și ca semn,

$$AK + KB = AB;\ BL + LC = BC;\ CM + MD = CD;$$
$$DN + NA = DA, \qquad 1)$$

pentru orice puncte K, L, M și N, situate respectiv pe cele patru drepte date.

Să notăm cu K, L, M și N punctele de contact ale sferei căutate cu dreptele AB, BC, CD și DA. Deoarece tangentele la sferă, duse din același punct sînt egale (ca mărime), vom avea

$$AK = \alpha \cdot AN;\ BL = \beta \cdot BK;\ CM = \gamma \cdot CL;\ DN = \delta \cdot DM, \qquad (2)$$

unde fiecare dintre coeficienții α, β, γ și δ este egal cu $+1$ sau cu -1.

Să arătăm acum că, și reciproc, *dacă pe dreptele AB, BC, CD și DA alegem patru puncte care să satisfacă relațiile* (2), *unde fiecare dintre coeficienții α, β, γ și δ este egal cu $+1$ sau cu -1, atunci există o sferă, tangentă la dreptele date în aceste patru puncte.*

Să presupunem inițial că nici unul dintre segmentele AK, BL, CM și DN nu este egal cu zero. În acest caz, în virtutea egalității $AK = \alpha \cdot AN$, există, în planul DAB, un cerc tangent la dreptele DA și AB, respectiv în punctele N și K. Prin acest cerc și prin punctul L, exterior planului DAB (dat fiind că *patrulaterul nostru este strîmb* și că $BL \neq 0$), putem duce o sferă. Dacă L' este al doilea punct de intersecție al dreptei BC cu această sferă, avem, ca mărime și ca semn, $BL \cdot BL' = BK^2 = \beta^2 \cdot BK^2$; însă deoarece $BL = \beta \cdot BK$, vom avea și $BL' = \beta \cdot BK = BL$, astfel că punctul L' coincide cu L. Sfera construită este tangentă la cele trei drepte DA, AB și BC, respectiv în punctele N, K și L. Să considerăm acum cercul după care planul BCD intersectează sfera construită. Dreapta BC este tangentă la acest cerc în punctul L. Tangenta dusă din punctul D la același cerc va fi egală (ca mărime) cu segmentul DN, deoarece dreapta DA este tangentă la sferă în punctul N. Egalitatea $CM + MD = CD$, care poate fi scrisă, cu ajutorul relației (2), sub forma $\gamma \cdot CL - \delta \cdot DN = CD$, ne arată că distanța dintre punctele C și D este egală cu suma sau cu diferența segmentelor (considerate ca mărime) tangentelor la cercul considerat, duse din punctele C și D. Însă aceasta este posibil numai în cazul cînd dreapta CD este tangentă la cerc (rezultă din cele arătate în soluția ex. 88 *bis*), deci și la sfera construită. Distanțele punctelor de contact ale dreptei CD cu sfera la punctele C și D trebuie să fie egale (ca mărime) cu segmentele CL și DN; în virtutea egalităților $CM = \gamma \cdot CL$ și $DN = \delta \cdot DM$, punctul de contact va fi punctul M. Așadar, sfera construită este tangentă la cele patru drepte date în punctele K, L, M și N.

Am presupus că nici unul dintre segmentele AK, BL, CM și DN nu este egal cu zero. Fie acum unul dintre aceste segmente nul, să zicem AK; în acest caz, va fi nul și segmentul AN (deoarece $AK = \alpha \cdot AN$). În acest caz, construim sfera tangentă la planul DAB în punctul A și care trece prin punctul L, exterior acestui plan (deoarece, în virtutea faptului că $AK = 0$, avem $BL = \beta \cdot BK \neq 0$). Ca și în cazul general, vom arăta că această sferă

va fi tangentă la dreapta BL în punctul L. Dacă acum $CM = \gamma . CL \neq 0$, demonstrația se încheie la fel ca în cazul general; dacă însă $CM = \gamma . CL = 0$, adică dacă punctul L coincide cu C, vom nota cu M' al doilea punct de intersecție al dreptei CD cu sfera construită. Avem, ca mărime și ca semn, $DM \cdot DM' = DN^2 = DA^2 = \delta \cdot DA^2$. Însă $DM = \delta \cdot DN = \delta \cdot DA$, de unde $DM' = \delta \cdot DA = DM$, astfel că sfera construită este tangentă, și în acest caz, la cele patru drepte date, în punctele K, L, M și N. Am obținut acest rezultat în ipoteza că $AK = 0$. Am ajunge la același rezultat, presupunînd că unul dintre segmentele BL, CM și DN este egal cu zero.

Prin urmare, *problema aflării sferelor tangente se reduce la determinarea pe dreptele date a punctelor K,L,M și N, care satisfac condițiile* (2), *unde fiecare dintre coeficienții* α, β, γ, δ *este egal cu* $+1$ *sau cu* -1.

Să stabilim acum sensul geometric al semnelor coeficienților α,β,γ, și δ. Centrul sferei tangente este, cum am arătat mai sus, situat într-unul dintre planele bisectoare P sau P' ale unghiului A. Dacă el se află în planul bisector interior P al unghiului A, atunci cele două puncte N și K vor fi situate (pentru $AK = \alpha \cdot AN \neq 0$) pe semidreptele AD și AB, sau ambele pe prelungirile lor dincolo de vîrful A. În ambele cazuri, $AK = -AN$ și deci $\alpha = -1$. Dacă însă centrul sferei tangente este situat în planul bisector exterior P' al unghiului A, atunci punctul N se află pe semidreapta AD, iar punctul K pe prelungirea lui AB dincolo de vîrful A, sau punctul N este situat pe prelungirea lui AD dincolo de vîrful A, iar punctul K pe AB. În ambele cazuri, $AK = AN$ și deci $\alpha = +1$. Prin urmare, *coeficientul* α *este egal cu* $+1$ sau *cu* -1 *după cum centrul sferei tangente se află în planul bisector exterior sau interior al unghiului* A. Coeficienții β, γ și δ joacă un rol analog pentru unghiurile B, C și D ale patrulaterului.

Să punem $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AK = k$, $BL = y$, $CM = z$, $DN = u$. Egalitățile (1) și (2) duc la sistemul de ecuații

$$x - \beta y = a; \quad y - \gamma z = b; \quad z - \delta u = c; \quad u - \alpha x = d. \tag{3}$$

Acest sistem de ecuații poate fi înlocuit, fără dificultate, prin următorul, care îi este echivalent:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\beta\gamma\delta)\ x &= a + \beta b + \beta\gamma c + \beta\gamma\delta d; \\ y &= b + \gamma c + \gamma\delta d + \gamma\delta\alpha x; \\ z &= c + \delta d + \delta\alpha x; \\ u &= d + \alpha x. \end{aligned} \tag{4}$$

Vom presupune inițial că membrul al doilea al primei ecuații (4) nu se anulează pentru nici un fel de combinări ale valorilor $+1$ și -1 ale coeficienților α,β,γ și δ. Cu alte cuvinte, vom presupune că laturile patrulaterului nu sînt legate prin nici una dintre relațiile de forma

$$a \pm b \pm c \pm d = 0. \tag{5}$$

Totodată, vom avea $\alpha\beta\gamma\delta \neq 1$ și deci

$$\alpha\beta\gamma\delta = -1. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, vom obține, din formulele (4), atribuind în mod independent coeficienților α, β și γ valorile $+1$ și -1 și determinînd, de fiecare dată, în modul cuvenit valoarea lui δ din egalitatea (6), opt sisteme de valori pentru x,y,z și u, satisfăcînd sistemul de ecuații (3) și deci opt sfere tangente. Așadar, ajungem la următorul rezultat definitiv:

Dacă laturile patrulaterului dat nu sînt legate printr-o dependență de forma (5), *există opt sfere tangente, și numai opt; poziția punctelor de contact pe laturile patrulaterului este determinată de egalitățile*

$$\begin{aligned} 2x &= a + \beta b + \beta\gamma c + \beta\gamma\delta d; \\ 2y &= b + \gamma c + \gamma\delta d + \gamma\delta\alpha a; \\ 2z &= c + \delta d + \delta\alpha a + \delta\alpha\beta b; \\ 2u &= d + \alpha a + \alpha\beta b + \alpha\beta\gamma c, \end{aligned} \tag{7}$$

unde trei dintre coeficienții α, β, γ *și* δ *iau independent unul de altul, valorile* $+1$ *și* -1, *iar valoarea corespunzătoare a celui de-al patrulea coeficient se determină, de fiecare dată, potrivit condiției* (6).

Formulele (7) se obțin ușor din ecuațiile (4), cu ajutorul egalității (6).

În cele ce urmează vom nota cele opt sfere găsite în modul următor cu cifrele I, II,...,IV,I′... IV′:

	I	II	III	IV	I′	II′	III′	IV′
α	+	−	−	−	−	+	+	+
β	−	+	−	−	+	−	+	+
γ	−	−	+	−	+	+	−	+
δ	−	−	−	+	+	+	+	−

În virtutea sensului geometric indicat mai sus al semnelor coeficienților α, β, γ și δ, și egalitatea (6) ne arată că centrele sferelor tangente se dispun în planele bisectoare P, P',... și S', în modul următor:

$PQRS$(I); $PQ'RS$ (II); $PQR'S$(III); $PQRS'$(IV);
$PQ'R'S'$(I′); $P'QR'S'$(II′); $P'Q'RS'$(III′); $P'Q'R'S$(IV′).

Cele opt sfere obținute vor fi, evident, sferele despre care a fost vorba la începutul soluției.

Egalitatea (6) ne permite să tragem, în cazul de față, și alte cîteva concluzii. După cum reiese din formulele (7), nici unul dintre segmentele $AK = x$, $BL = y$, $CM = z$ și $DN = u$ nu este egal cu zero, deoarece, în caz contrar, între laturile patrulaterului am avea o dependență de forma (5). De aceea, folosind relația (2), egalitatea (6) poate fi scrisă

$$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{AK}{AN}\cdot\frac{BL}{BK}\cdot\frac{CM}{CL}\cdot\frac{DN}{DM} = -1,$$

sau

$$\frac{KA}{KB}\cdot\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{ND}{NA}=-1.$$

Această egalitate ne arată că, *dintre cele patru puncte de contact ale fiecărei sfere cu dreptele date, sau trei sînt situate pe laturile patrulaterului și al patrulea pe prelungirea unei laturi, sau trei sînt pe prelungirile laturilor, iar al patrulea pe latura însăși.*

Mai departe, observînd că punctul de intersecție K' al planului LMN cu dreapta AB este dat (pr obl. 495) de egalitatea

$$\frac{K'A}{K'B}\cdot\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{ND}{NA}=+1$$

și că, din această egalitate și din cea precedentă, rezultă $KA : KB = -K'A : K'B$, ajungem la următoarele rezultate.

Punctele de contact ale fiecăreia dintre cele opt sfere cu dreptele date, nu se află în același plan; punctul de contact K este conjugat armonic, în raport cu punctele A și B, cu punctul de intersecție al dreptei AB cu planul care trece prin celelalte trei puncte de contact. Celelalte trei puncte de contact se bucură de o proprietate analogă.

Să trecem acum la cazul cînd între laturile patrulaterului are loc o relație de forma (5). Deoarece o latură a patrulaterului nu poate fi egală cu suma celorlalte trei, înseamnă că doi dintre cei patru termeni ai egalității (5) trebuie să fie precedați de semnul —, astfel că obținem două cazuri esențial diferite, și anume

$$a+c=b+d \tag{8}$$

și

$$a+d=b+c. \tag{9}$$

A treia ipoteză

$$a+b=c+d \tag{9'}$$

nu se deosebește geometric de a doua.

Să studiem mai amănunțit cazul (8), cînd *suma a două laturi opuse ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două laturi opuse.* În acest caz, găsim pentru sfera (I), pentru care avem $\alpha=+1$, $\beta=\gamma=\delta=-1$, din formulele (8), $x=0$, $u=d$. Aceasta înseamnă că sfera (I) este tangentă la laturile DA și AB în punctul A. Obținem rezultate analoge și pentru sferele (II) — IV). Așadar, *dacă suma a două laturi opuse ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două laturi opuse, atunci fiecare dintre sferele* (I)—(IV) *este tangentă într-un vîrf la două laturi ale patrulaterului.*

Mai departe, în acest caz, prima dintre ecuațiile (4) va fi satisfăcută dacă vom pune

$$\alpha\beta\gamma\delta=+1 \tag{10}$$

și $\beta=-1$; $\beta\gamma=+1$; $\beta\gamma\delta=-1$. De aici rezultă că pentru $\alpha=\beta=\gamma=\delta=-1$, sistemul (4) are o infinitate de soluții:

$$y=b-c+d-x=a-x;\ z=c-d+x;\ u=d-x, \tag{11}$$

unde x rămîne arbitrar. Aşadar, în cazul considerat, există o infinitate de sfere tangente, ale căror centre sînt situate (cf. relaţiei $\alpha=\beta=\gamma=\delta=-1$) simultan în toate cele patru plane P, Q, R şi S. Aceasta este posibil numai în cazul cînd cele patru plane trec printr-o aceeaşi dreaptă l (demonstraţia directă a acestei afirmaţii este dată în soluţia ex. 558, Obs.). Evident, această dreaptă va fi tocmai locul geometric al centrelor sferelor. Compararea formulelor (7) şi (11) arată că sferele (I) — (IV) fac parte din familia considerată, pe cînd nici una dintre sferele (I′) — (IV′) nu face parte, în general, din ea.

Aşadar, *dacă suma a două laturi opuse ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două laturi opuse, există o infinitate de sfere tangente. Locul geometric al centrelor lor este dreapta l, prin care trec planele bisectoare interioare ale celor patru unghiuri ale patrulaterului. Totodată, patrulaterul mai are, în general, încă patru sfere tangente.*

Egalitatea (10) ne arată că, dintre cele patru puncte de contact cu dreptele date ale fiecăreia dintre sferele mulţimii infinite (11), un număr par de puncte se află pe laturile patrulaterului şi un număr par pe prelungirile lor (dacă nici un punct de contact nu coincide cu un vîrf). Mai departe, din aceeaşi egalitate, urmează că cele patru puncte de contact sînt situate în acelaşi plan.

Pentru a alege, din familia de sfere tangente (11) cu centrele pe axa l, sfera de rază minimă, este suficient să luăm ca centru al ei piciorul perpendicularei comune dreptei l şi uneia dintre dreptele date, de exemplu AB (fiecare punct al dreptei l este egal depărtat, cum rezultă din cele arătate, de cele patru drepte date, astfel că cele patru perpendiculare comune dreptei l şi fiecăreia dintre dreptele date taie, dreapta l în acelaşi punct).

Dacă vom alege acum ca punct O un punct al dreptei l, interior tetraedrului $ABCD$, vom putea arăta, cum s-a procedat în soluţia exerciţiului 558, că suma diedrelor de muchii AB şi CD ale tetraedrului va fi egală cu suma diedrelor de muchii BC şi DA.

Am cercetat amănunţit cazul în care laturile patrulaterului satisfac condiţia (8). Am fi obţinut rezultate analoge şi în cazul (9), cînd *suma a două laturi vecine ale patrulaterului este egală cu suma celorlalte două laturi vecine*. În acest caz, sistemul (4) are o infinitate de soluţii ($\alpha=\gamma=-1$, $\beta=\delta=+1$): $y=x-a$; $z=a+b-x=c+d-x$; $u=d-x$. Locul geometric al centrelor acestor sfere va fi dreapta de intersecţie comună a planelor P, Q', R şi S'. Sferele (I′), (II), (III′) şi (IV) fac parte din familia considerată; sferele (I), (II′), (III) şi (IV′) nu vor face parte, în general, din familie.

Dacă laturile patrulaterului satisfac două relaţii de forma (5), adică două dintre relaţiile (8), (9) şi (9′), atunci *patrulaterul are două perechi de laturi egale* (opuse sau vecine). Obţinem atunci două familii de sfere tangente. Vom obţine trei familii de sfere tangente, dacă vor fi îndeplinite toate trei condiţiile (8), (9) şi (9′), adică *dacă toate laturile patrulaterului sînt egale*.

687. Să presupunem că există o sferă tangentă la muchiile BC, CA, AB, DA, DB şi DC ale unui tetraedru $ABCD$ dat (şi nu la prelungirile lor;

Scanned with OKEN Scanner

fig. 190), respectiv în punctele L, M, N, L', M' și N'. Deoarece tangentele duse la sferă din același punct sînt egale (**451**), avem $AM = AN = AL' = a$; $BN = BL = BM' = b$; $CL = CM = CN' = c$; $DL' = DM' = DN' = d$, unde am notat cu a, b, c și d lungimile acestor tangente egale. De aici avem, $AD + BC = AL' + L'D + BL + LC = a + b + c + d$. Analog, găsim că și $BD + CA = a + b + c + d$ și $CD + AB = a + b + c + d$.

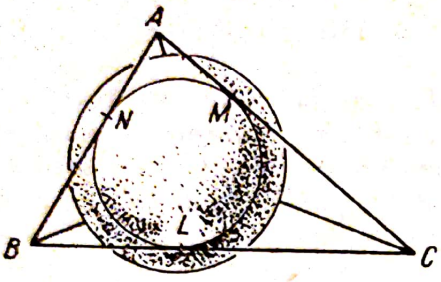


Fig. 190

Așadar, *dacă există o sferă tangentă la muchiile unui tetraedru dat* (și nu la prelungirile lor), *atunci sumele celor trei perechi de laturi opuse ale tetraedrului sînt egale*

$$AD + BC = BD + CA = CD + AB. \quad (1)$$

Fie acum, reciproc, condițiile (1) satisfăcute într-un tetraedru oarecare $ABCD$. Din aceste condiții rezultă că $CA + AB - BC = AD + AB - BD$. Însă $\frac{1}{2}(CA + AB - BC)$ este segmentul AN de pe latura AB a triunghiului ABC, luat din vîrful A și pînă la punctul de contact al cercului înscris (compară cu ex. 90 *bis*.), iar $\frac{1}{2}(AD + AB - BD)$ are aceeași semnificație pentru vîrful A și pentru latura AB în triunghiul ABD. Așadar, cercurile înscrise în fețele ABC și ABD ale tetraedrului dat sînt tangente la muchia comună AB a acestor fețe, într-un același punct N. Deoarece egalitățile (1) sînt simetrice în raport cu toate muchiile tetraedrului, vom avea aceeași situație și pentru cercurile înscrise în orice pereche de fețe. Astfel, se determină pe muchiile BC, CA, AB, AD, BD și CD ale tetraedrului punctele de contact L, M, N, L', M' și N'. Cele două cercuri înscrise în fețele ABC și ABD, tangente la muchia AB într-un același punct N și, de aceea, tangente între ele, determină o sferă S (**450**, Obs. 1). Această sferă S este, evident, tangentă la cele cinci muchii BC, CA, AB, AD și BD ale tetraedrului. Sfera S intersectează fața ACD după un cerc. Acest cerc va fi tangent la muchiile AC și AD, în aceleași puncte M și L' în care sînt tangente la ele cercurile înscrise în fețele ABC și ABD, adică în aceleași puncte în care cercul înscris în fața ACD este tangent la muchiile AC și AD. De aceea, cercul după care sfera S taie fața ACD va fi înscris în această față. De aici rezultă că sfera S va fi tangentă și la a șasea muchie CD a tetraedrului.

Prin urmare, *dacă sînt satisfăcute condițiile* (1), *atunci există o sferă tangentă la toate cele șase muchii ale tetraedrului dat.*

Condițiile problemei pot fi concepute și mai larg, în sensul ca sfera să fie tangentă nu numai la muchiile tetraedrului, ci și la prelungirile lor. Să presupunem pentru a fixa ideile, că sfera S', tangentă la fiecare muchie a tetraedrului sau la prelungirea ei, este tangentă în punctul L'' la prelungirea muchiei AD dincolo de vîrful A. În acest caz, sfera S' intersectează, evident, planul fețelor ABD și ACD după cercuri exînscrise, tangente la muchiile AB și AC și la prelungirile muchiilor AD, BD și CD, respectiv dincolo de vîrfurile A, B

și C. De aici rezultă că fața ABC va fi intersectată de sfera S' după un cerc înscris, iar fața BCD, după un cerc exînscris.

Așadar, *dacă sfera considerată este tangentă la prelungirea cel puțin a uneia dintre muchii, atunci ea este tangentă la trei muchii ale tetraedrului situate în aceeași față* (și nu la prelungirile lor) *și la prelungirile celorlalte trei muchii.*

Fie sfera S' tangentă la muchiile BC, CA și AB ale tetraedrului $ABCD$ (fig. 191) și la prelungirile muchiilor AD, BD și CD, respectiv în punctele L, M, N, L'', M'' și N''. Ca și mai sus, vom avea $AM = AN = AL'' = a'$; $BN = BL = BM'' = b'$; $CL = CM = CN'' = c'$; $DL'' = DM'' = DN'' = d'$. De aici obținem $AD - BC = (DL'' - AL'') - (BL + CL) = d' - a' - b' - c'$. Analog, găsim și $BD - CA = d' - a' - b' - c'$; $CD - AB = d' - a' - b' - c'$.

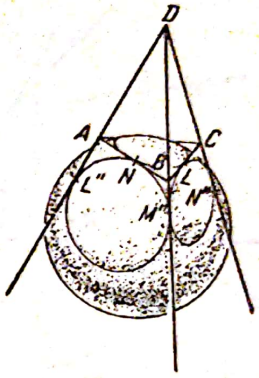


Fig. 191

Avem, așadar, următoarea propoziție: *dacă există o sferă tangentă la cele trei muchii ale feței ABC și la prelungirile celorlalte trei muchii ale tetraedrului $ABCD$, atunci au loc egalitățile*

$$AD - BC = BD - CA = CD - AB. \qquad (2)$$

Reciproca este și ea adevărată. Demonstrarea reciprocei se efectuează ca mai sus, pentru condițiile (1).

În caz că există o sferă tangentă la cele trei muchii ale feței ABD și la prelungirile celorlalte trei muchii ale tetraedrului $ABCD$, au loc egalitățile analoge

$$AC - BD = BC - DA = DC - AB. \qquad (2')$$

Aceasta este valabil și pentru celelalte două fețe BCD și CDA.

Este posibil, mai departe, cazul în care sînt satisfăcute atît condițiile (1), cît și condițiile (2) în același timp. Atunci avem $AD = BD = CD$ și $BC = CA = AB$. Așadar, *dacă există o sferă tangentă la cele șase muchii ale unui tetraedru și, totodată, o sferă tangentă la trei muchii ale tetraedrului și la prelungirile celorlalte trei, atunci tetraedrul este o piramidă regulată, și reciproc.*

Condițiile (2) și (2') pot fi de asemenea îndeplinite simultan. În acest caz, $AD = BC$, $BD = CA$, $CD = AB$. Condițiile analoge relațiilor (2) și (2') și corespunzătoare celorlalte două fețe vor fi și ele satisfăcute. De aici rezultă că, *într-un tetraedru în care muchiile opuse ale fiecărei perechi sînt egale, există sfere tangente fiecare la cîte trei muchii ale unei fețe și la prelungirile celorlalte trei muchii ale tetraedrului.* Într-un tetraedru regulat, există toate cele cinci sfere considerate.

688. Centrul oricărei sfere înscrise sau exînscrise unui tetraedru dat $SABC$, adică tangentă la planele celor patru fețe, este egal depărtat de aceste patru plane. Reciproc, orice punct egal depărtat de planele celor patru fețe ale unui tetraedru este centrul uneia dintre sferele căutate. Așadar, problema se reduce *la găsirea unui punct egal depărtat de planele celor patru fețe ale tetraedrului.*

Locul geometric al punctelor egal depărtate de planele celor trei fețe BSC, CSA și ASB este format (compară cu soluția ex. 479) din patru drepte D, D_1, D_2 și D_3, care trec prin vîrful S al tetraedrului. Dintre aceste drepte, numai una — să o numim D — trece prin regiunea interioară a tetraedrului.

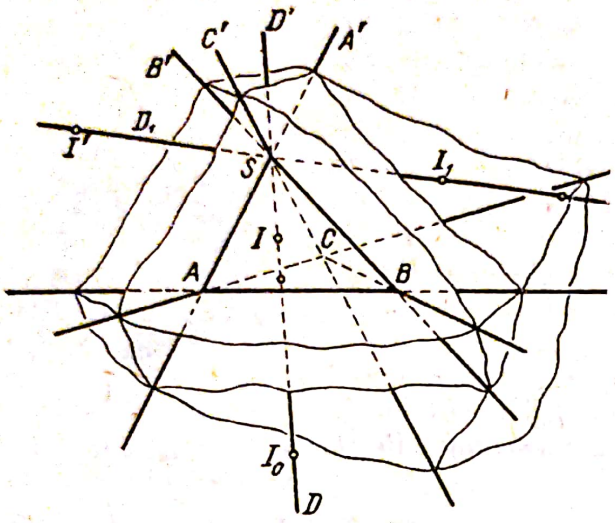


Fig. 192

Locul geometric al punctelor egal depărtate de planul uneia dintre cele trei fețe considerate, pentru a fixa ideile, să zicem de planul feței BSC și de planul celei de-a patra fețe ABC este format din cele două plane care taie în părți egale diedrele de muchie BC ale tetraedrului. Să notăm cu P pe acela care împarte în părți egale diedrul interior de muchie BC al tetraedrului și cu P' celălalt plan. Dintre aceste două plane, numai unul, anume P, trece prin regiunea interioară a tetraedrului.

De aici rezultă că *centrele sferelor căutate vor fi, în cazul general, cele opt puncte de intersecție ale fiecăreia dintre cele patru drepte* D, D_1, D_2 *și* D_3 *cu fiecare dintre planele* P *și* P'.

Dreapta D va intersecta, evident, întotdeauna planul P într-un punct I, interior tetraedrului (fig. 192 și 193; compară cu ex. 532). Acest punct va fi

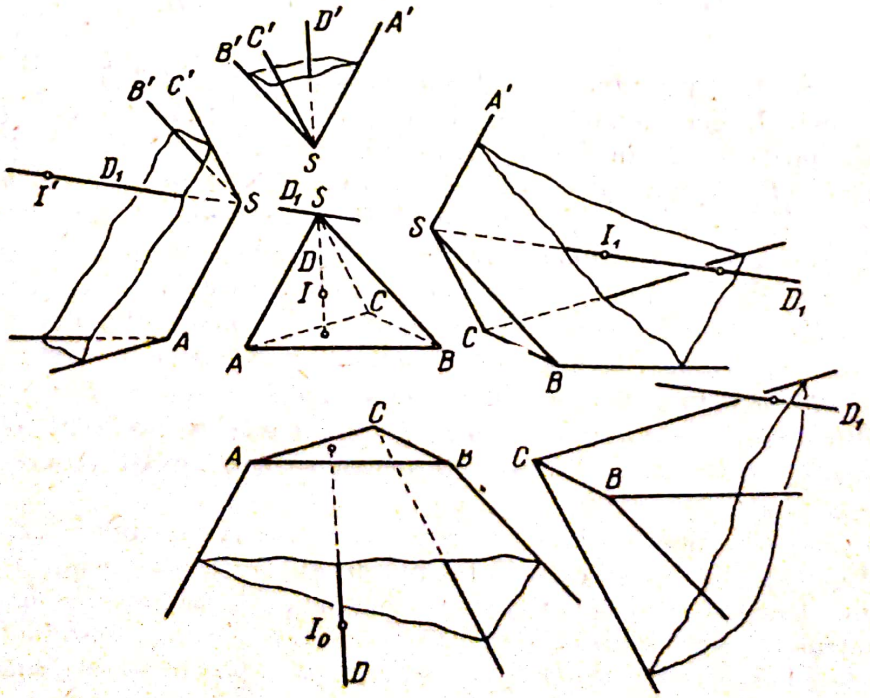


Fig. 193

centrul sferei înscrise, în tetraedrul dat. Celelalte puncte de intersecție sînt exterioare tetraedrului (deoarece nici una dintre dreptele D_1,D_2 și D_3 nu trece prin regiunea interioară a tetraedrului, ceea ce este valabil și pentru planul P') și vor fi, de aceea, centrele sferelor exînscrise.

Prin urmare, *în orice tetraedru, putem înscrie o sferă, și numai una.*

Pentru a obține expresia care dă raza R a sferei înscrise, vom nota cu V volumul tetraedrului $SABC$, iar cu Δ_0,Δ_1,Δ_2 și Δ_3 respectiv ariile fețelor ABC, BSC, CSA și ASB. Avem egalitatea evidentă

$$\text{vol. } SABC = \text{vol. } IABC + \text{vol. } ISBC + \text{vol. } ISCA + \text{vol. } ISAB,$$

de unde

$$V = \frac{1}{3} R(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3).$$

Așadar, *volumul tetraedrului este egal cu produsul dintre o treime a razei sferei înscrise și aria tetraedrului* (compară cu ex. 299).

Pentru raza sferei înscrise, obținem de aici expresia

$$R = \frac{3V}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}.$$

Trecem la studiul sferelor exînscrise. Dreapta D taie evident planul bisector P' al diedrului exterior de muchie BC al tetraedrului într-un punct I_0 (acest fapt poate fi demonstrat, *v.* mai jos). Punctul I_0 este exterior tetraedrului, se află în regiunea vecină cu fața ABC (fig. 192 și 193) și va fi centrul sferei exînscrise tangente la fața ABC și la prelungirile celorlalte trei fețe ale tetraedrului. O astfel de sferă exînscrisă, tangentă la o față a tetraedrului și la prelungirile celorlalte trei fețe, o vom denumi sferă exînscrisă de *speța întîi*.

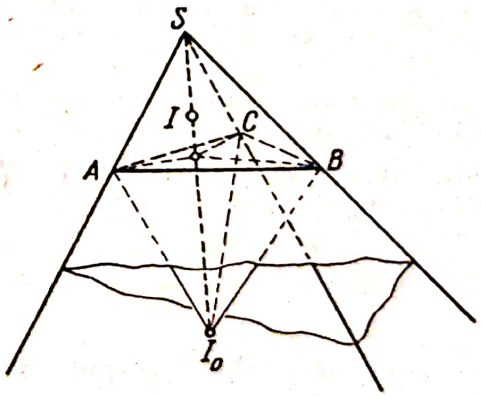


Fig. 194

Pentru a obține expresia care dă raza R_0 a sferei exînscrise de speța întîi, avînd centrul în I_0, vom considera hexaedrul $SABCI_0$ (fig. 194). Acest hexaedru este format din două tetraedre $SABC$ și I_0ABC, avînd baza ABC comună. Pe de altă parte, același hexaedru poate fi descompus în trei tetraedre I_0SBC, I_0SCA și I_0SAB, avînd muchia comună I_0S, și două cîte două fața comună I_0SA, I_0SB și I_0SC. De aceea, are loc egalitatea

$$\text{vol. } SABC + \text{vol. } I_0ABC = \text{vol. } I_0SBC + \text{vol. } I_0SCA + \text{vol. } I_0SAB, \quad (2)$$

de unde

$$V + \frac{1}{3} R_0 \Delta_0 = \frac{1}{3} R_0 \Delta_1 + \frac{1}{3} R_0 \Delta_2 + \frac{1}{3} R_0 \Delta_3$$

sau

$$V = \frac{1}{3} R_0(-\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3).$$

Așadar, *volumul unui tetraedru este egal cu produsul dintre o treime a razei sferei exînscrise de speța întîi, tangentă la oricare dintre fețele tetraedrului* (și la prelungirile celorlalte trei fețe), *și diferența dintre aria tetraedrului și dublul ariei acestei fețe* (compară iarăși cu ex. 299).

Pentru raza sferei exînscrise de speța întîi, tangentă la fața tetraedrului a cărei arie este egală cu Δ_0 și la prelungirile celorlalte trei fețe, obținem următoarea expresie:

$$R_0 = \frac{3V}{-\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}. \qquad (3)$$

Menționăm că numitorul din membrul al doilea al egalității (3) este întotdeauna pozitiv, deoarece suma ariilor a trei fețe ale unui tetraedru este mai mare decît aria celei de a patra fețe (compară cu nr. **573**, lema I).

Am considerat mai sus *evident* că dreapta D intersectează planul P'. Vom da acum *demonstrația* acestei propoziții și, totodată, demonstrația existenței sferei exînscrise de care ne ocupăm.

În acest scop, vom nota cu I_0 punctul dreptei D situat de părți diferite ale planului ABC cu punctul S și la distanța R_0 de acest plan, dată de formula (3). La fel cu orice alt punct al dreptei D, punctul I_0 este egal depărtat de planele celorlalte trei fețe ale tetraedrului; să notăm cu ρ distanța punctului I_0 la fiecare dintre aceste trei plane. Egalitatea (2), valabilă pentru punctul I_0, ne dă $V + \frac{1}{3} R_0 \Delta_0 = \frac{1}{3} \rho\Delta_1 + \rho\Delta_2 + \rho\Delta_3$. Din această egalitate, combinată cu egalitatea (3), găsim că $\rho = R_0$. Așadar, punctul I_0, pe care l-am construit, este egal depărtat de toate cele patru fețe ale tetraedrului. De aceea, el este situat în planul P' și este centrul unei sfere exînscrise.

În mod analog, mai există trei sfere exînscrise de speța întîi. Fiecare dintre ele este tangentă la cîte una dintre fețele BSC, CSA și ASB și la prelungirile celorlalte trei fețe ale tetraedrului. Raza R_1 a sferei tangente la fața BSC este dată de următoarea formulă, în totul analogă cu cea de la (3):

$$R_1 = \frac{3V}{\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}. \qquad (3')$$

Vom obține relații corespunzătoare și pentru razele celorlalte două sfere exînscrise de speța întîi.

Prin urmare, *orice tetraedru are patru sfere exînscrise de speța întîi*, adică tangente la cîte o față și la prelungirile celorlalte trei.

Fie D_1 aceea dintre dreptele D_1, D_2 și D_3 care trece prin interiorul celor două triedre $S{\cdot}AB'C'$ și $S{\cdot}A'BC$, unde SA', SB' și SC' sînt prelungirile muchiilor SA, SB și SC. Această dreaptă D_1 intersectează planul P' într-un punct I_1 (fig. 192 și 193), situat evident în interiorul regiunii vecine cu fața BSC a tetraedrului. Punctul I_1 este centrul sferei exînscrise de speța întîi cu raza R_1, considerată mai sus, care este tangentă la fața BSC și la prelungirile celorlalte trei fețe ale tetraedrului.

Să presupunem acum că dreapta D_1 taie planul P într-un punct I'. Acest punct I' poate fi situat, fie în regiunea spațiului care este vecină cu muchia SA a tetraedrului și are forma unui „acoperiș" sau a unui „jgheab" (ca în fig. 192 și 193), fie în partea analogă a spațiului, vecină cu muchia BC, și va fi centrul unei sfere exînscrise, tangentă la prelungirile tuturor fețelor tetraedrului. O astfel de sferă exînscrisă tangentă la prelungirile tuturor fețelor tetraedrului o vom numi sferă exînscrisă *de speța a doua*. În virtutea celor arătate mai sus, sfera exînscrisă de speța a doua poate exista numai în una dintre cele două regiuni ale spațiului, avînd forma de „acoperiș" și vecine cu muchiile opuse AB și CD ale tetraedrului.

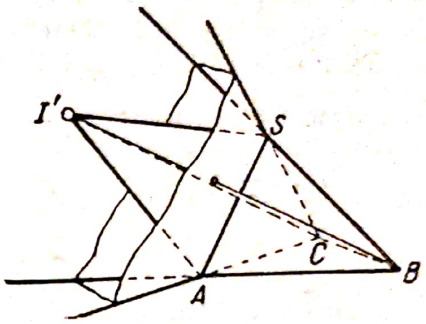


Fig. 195

Pentru a obține expresia care dă raza R' a sferei exînscrise de speța a doua cu centrul în punctul I', vom presupune, pentru a fixa ideile, că această sferă este situată în partea din spațiu vecină cu muchia SA (ca în fig. 195), și nu cu muchia BC. Să considerăm hexaedrul $SBCI'A$. Acest hexaedru este format din două tetraedre $SBCI'$ și $ABCI'$, avînd baza BCI' comună. Pe de altă parte, același hexaedru poate fi descompus în trei tetraedre $SABC$, $SACI'$ și $ABCI'$, avînd muchia comună SA și două cîte două cîte o față comună SAB, SAC și SAI'. De aceea, are loc egalitatea

$$\text{vol. } SBCI' + \text{vol. } ABCI' = \text{vol. } SABC + \text{vol. } SACI' + \text{vol. } SAI'B,$$

de unde

$$\frac{1}{3}R'\Delta_0 + \frac{1}{3}R'\Delta_1 = V + \frac{1}{3}R'\Delta_2 + \frac{1}{3}R'\Delta_3$$

sau

$$V = \frac{1}{3}R'(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_0 - \Delta_1).$$

Așadar, *volumul unui tetraedru este egal cu produsul dintre o treime a razei sferei exînscrise de speța a doua, situată în regiunea din spațiu vecină cu o anumită muchie a tetraedrului, și diferența dintre aria acestuia și dublul sumei ariilor celor două fețe nevecine cu această muchie.*

Pentru raza sferei exînscrise de speța a doua, situată în regiunea din spațiu vecină cu muchia comună la cele două fețe ale tetraedrului avînd ariile egale cu Δ_2 și Δ_3, obținem următoarea expresie:

$$R' = \frac{3V}{-\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}.$$

Presupunînd că sfera de centru I' este situată în partea din spațiu vecină cu muchia BC, vom avea, evident,

$$R' = \frac{3V}{\Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}. \qquad (4)$$

În ambele cazuri, raza sferei exînscrise de speța a doua avînd centrul în punctul I' de pe dreapta D_1 este dată de egalitatea

$$R' = \frac{3V}{|\Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3|}.$$

Din această formuulă, rezultă că sfera exînscrisă de speța a doua avînd centrul în punctul I' de pe dreapta D_1 poate exista numai cu condiția ca $\Delta_0 + \Delta_1 \neq \Delta_2 + \Delta_3$. Dacă suma ariilor a două fețe este egală cu suma ariilor celorlalte două fețe, și anume $\Delta_0 + \Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3$, această arie nu există.

Am dedus formula (4), *presupunînd* că sfera exînscrisă de speța a doua avînd centrul pe dreapta D_1 există. Se poate însă *demonstra* că această sferă există efectiv, dacă $\Delta_0 + \Delta_1 \neq \Delta_2 + \Delta_3$. Demonstrația este în totul analogă cu cea efectuată mai sus pentru existența sferei exînscrise de speța întîi.

În mod analog, mai pot exista încă două sfere exînscrise de speța a doua. Una dintre aceste două sfere are centrul în punctul de intersecție al planului P' cu dreapta D_2, care trece prin interiorul triedrelor $S{\cdot}A'BC'$ și $S{\cdot}AB'C$. Această sferă este situată ori în regiunea alăturată muchiei SB, ori în regiunea alăturată muchiei CA; raza ei se exprimă după cum urmează

$$R'' = \frac{3V}{|\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3|}. \qquad (4')$$

În sfîrșit, utima sferă exînscrisă este situată fie în regiunea alăturată muchiei SC, fie în regiunea alăturată muchiei AB. Raza ei este dată de o expresie în totul analogă cu formulele (4) și (4').

Așadar, ajungem la următoarele concluzii:

Dacă suma ariilor a două fețe oarecare ale unui tetraedru nu este egală cu suma ariilor celorlalte două fețe, atunci există, după cum rezultă din cele de mai sus, *trei sfere exînscrise de speța a doua, adică tangente fiecare la prelungirile tuturor celor patru fețe ale tetraedrului.*

Dacă suma ariilor unei perechi de fețe ale unui tetraedru este egală cu suma ariilor celorlalte două fețe, adică dacă are loc una și numai una dintre următoarele trei egalități

$$\Delta_0 + \Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3;\ \Delta_0 + \Delta_2 = \Delta_3 + \Delta_1;\ \Delta_0 + \Delta_3 = \Delta_1 + \Delta_2,$$

există două sfere exînscrise de speța a doua.

Fie acum satisfăcute două și numai două dintre aceste trei egalități, să zicem a doua și a treia; în acest caz, $\Delta_0 = \Delta_1 \neq \Delta_2 = \Delta_3$. Prin urmare, *dacă ariile fețelor unui tetraderu sînt două cîte două egale, există numai o singură sferă exînscrisă de speța a doua.*

În sfîrșit, dacă sînt satisfăcute toate trei egalitățile, atunci $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_0$. Prin urmare, *dacă toate cele patru fețe ale tetraedrului sînt echivalente, nu avem de loc sfere exînscrise de speța a doua.*

689. Mulțimea tuturor sferelor tangente la un plan dat într-un punct dat A se obține din una oarecare dintre ele, prin omotetii de centru A și cu raportul de asemănare arbitrar. Dat fiind că, la una dintre aceste sfere, putem duce *două* plane tangente paralele cu planul dat și că segmentul care unește

Scanned with OKEN Scanner

cele două puncte de contact se vede din punctul A sub un unghi drept, rezultă că punctele de contact despre care este vorba în enunțul problemei formează două drepte perpendiculare, care trec prin punctul A.

Va face excepție numai cazul în care unul dintre cele două puncte de contact cu sfera inițială va coincide cu punctul A, cu alte cuvinte, cînd vom considera locul geometric al punctelor de contact ale planelor tangente, paralele cu planul tangent comun în punctul A. În acest caz, locul geometric căutat este, evident, o dreaptă.

690. La rezolvarea acestui exercițiu și a unora dintre cele ce urmează, este rațional să folosim următoarea considerație generală.

Fie C' și C'' două cercuri date. Să ducem prin cercul C' două sfere arbitrare S_1 și S_2, iar prin cercul C'' de asemenea două sfere arbitrare S_3 și S_4.

Să considerăm întîi cazul general cînd axele (**449**) cercurilor date nu sînt situate în același plan. În acest caz, centrele celor patru sfere S_1, S_2, S_3 și S_4 nu vor fi nici ele în același plan și cele patru sfere au un centru radical I perfect determinat. Evident, acest centru radical I mai poate fi determinat ca unicul punct al dreptei de intersecție a planelor cercurilor date avînd aceeași putere în raport cu cele două cercuri. De aici rezultă că poziția punctului I nu depinde de alegerea sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4, care trec două cîte două prin cercurile date. Acest punct I va fi numit, pentru a scurta exprimarea, *centrul radical* al celor două cercuri date.

Să presupunem acum că axele celor două cercuri date sînt situate în același plan P, însă nu coincid. În acest caz, cele șase plane radicale ale sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4, luate două cîte două, sînt perpendiculare pe planul P. Să presupunem, în primul rînd, că aceste șase plane radicale nu trec toate prin aceeași dreaptă. În acest caz, sferele S_1, S_2, S_3 și S_4 nu au centru radical și nici axa radicală comună. Nici un punct al dreptei de intersecție a planelor cercurilor date nu are aceeași putere în raport cu ambele cercuri, sau planele cercurilor date sînt paralele. De aici rezultă că inexistența centrului radical al sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4 nu depinde de alegerea acestor sfere, care trec cîte două prin cercurile date.

Mai departe, să presupunem că axele cercurilor date se află în același plan, însă nu coincid, și că cele șase plane radicale ale celor patru sfere S_1, S_2, S_3 și S_4, luate două cîte două, trec printr-o aceeași dreaptă D. Dreapta D va fi axa radicală comună a celor patru sfere; ea coincide cu intersecția planelor cercurilor date, dacă acestea nu sînt situate în același plan, și cu axa radicală a cercurilor date, dacă ele se află în același plan. Fiecare punct al dreptei D are aceeași putere în raport cu ambele cercuri date și poate fi considerat, de aceea, ca centru radical al lor. De aici rezultă că existența dreptei D nu depinde de alegerea sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4, care trec cîte două prin cercurile date. În acest caz, pentru a scurta exprimarea, vom spune că dreapta D este *axa radicală* a cercurilor date, indiferent dacă ele sînt situate sau nu în același plan.

Vom demonstra că *două cercuri care au o axă radicală și nu sînt situate în același plan se află pe aceeași sferă* (și anume, în plane secante).

În adevăr, fie cercurile C' și C'' situate în plane diferite și avînd ca axă radicală dreapta de intersecție a planelor lor .Vom duce o sferă S prin cercul C' și printr-un punct A al cercului C'', exterior dreptei D. Vom nota cu $\overline{C}$

cercul după care această sferă intersectează planul cercului C''. Fiecare punct al dreptei D are în raport cu cercurile C'' și $\overline{C}$ aceeași putere, egală cu puterea acestui punct în raport cu cercul C'. Dacă cercurile C'' și $\overline{C}$ ar fi distincte, dreapta D ar fi axa lor radicală, iar punctul comun A al cercurilor C'' și $\overline{C}$ ar fi situat pe dreapta D. Dat fiind însă că punctul A nu se află pe dreapta D, cercurile C'' și $\overline{C}$ coincid. Așadar, cercul C'' este situat și el pe sfera S, care trece prin cercul C'.

Reciproca este evidentă: două cercuri situate pe aceeași sferă, în plane secante, au ca axă radicală intersecția celor două plane.

Mai rămîne un ultim caz, acela în care cele două cercuri au o axă comună; pentru a ușura exprimarea, vom spune că aceste două cercuri sînt *coaxiale*. Două cercuri coaxiale sînt ori situate pe aceeași sferă, în plane paralele, ori în același plan și au centrul comun.

Așadar, la rezolvarea problemei de față și a unora dintre cele ce urmează, va trebui să ținem seama de următoarele *patru posibilități de așezare relativă a celor două cercuri*:

1° *Cazul general*: *cercurile au centru radical.*

2° *Cercurile nu au centru radical*[1]) *și nu sînt coaxiale.*

3° *Cercurile au axă radicală.*

4° *Cercurile sînt coaxiale.*

În primele două cazuri, cercurile nu sînt situate pe aceeași sferă sau în același plan; *în ultimele două, ele sînt situate pe aceeași sferă sau în același plan.*

După aceste considerații preliminare, trecem la rezolvarea problemei noastre.

Să presupunem că o sferă $I(R)$ taie cele două cercuri date C' și C'' respectiv în punctele A', B' și A'', B'', sub un unghi drept. Razele IA' și IB' vor fi tangente în punctele A' și B' la cercul C', iar razele IA'' și IB'' vor fi tangente în punctele A'' și B'' la cercul C''. Centrul I al sferei căutate se află atît în planul cercului C', cît și în planul cercului C'' și are aceeași putere *pozitivă* (anume R^2) în raport cu cele două cercuri. Reciproc, dacă un punct se bucură de aceste proprietăți, el este, evident, centrul uneia dintre sferele căutate.

Folosind considerațiile generale dezvoltate mai sus, ajungem direct la următoarele rezultate.

Dacă cercurile date au centru radical și acest centru radical este *exterior* unuia dintre cercurile date (deci și celuilalt), problema are o singură soluție. Centrul sferei căutate va fi centrul radical I al cercurilor date; pătratul razei este egal cu puterea punctului I în raport cu fiecare dintre cercurile date.

Dacă cercurile date au axă radicală, problema devine nedeterminată. Putem lua ca centru al sferei căutate orice punct I al axei radicale, exterior unuia dintre cercurile date (deci și celuilalt); raza sferei căutate se determină ca mai sus.

În celelalte cazuri, problema nu are soluții.

---

[1]) Deoarece fiecare punct al axei radicale a celor două cercuri poate fi considerat ca centrul lor radical, înseamnă că atunci cînd spunem că două cercuri nu au centru radical, presupunem că ele nu au nici axă radicală.

Scanned with OKEN Scanner

691. La rezolvarea acestui exercițiu, vom folosi considerațiile generale dezvoltate la începutul soluției exercițiului 690.

Să presupunem că un cerc C, situat într-un plan Q, intersectează două cercuri date C' și C'', respectiv în punctele A', B' și A'', B'' (fig. 196).

Dacă dreptele $A'B'$ și $A''B''$ sînt concurente, intersecția lor I se află atît în planul cercului C' cît și în planul cercului C'' și are, în raport cu ambele cercuri, aceeași putere (anume $IA' \cdot IB' = IA'' \cdot IB''$). Reciproc, dacă un punct I se bucură de aceste proprietăți, atunci orice plan Q care trece prin acest punct I și taie cele două cercuri date le intersectează în patru puncte de pe același cerc.

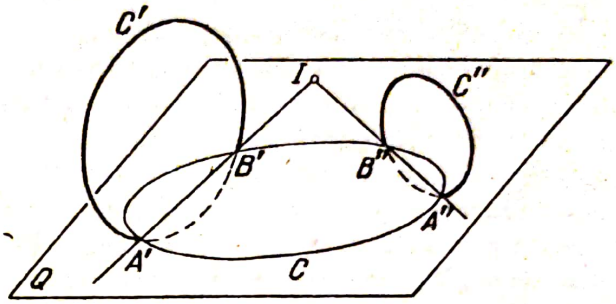


Fig. 196

Dacă dreptele $A'B'$ și $A''B''$ sînt paralele, segmentele $A'B'$ și $A''B''$ sînt bazele unui trapez isoscel, deoarece punctele A', B', A'' și B'' sînt situate pe același cerc. Axele cercurilor date se află, atunci, într-un același plan P, care trece prin mijlocul segmentelor $A'B'$ și $A''B''$ și este perpendicular pe planul Q al cercului C (în particular, axele celor două cercuri pot coincide). Reciproc, dacă axele celor două cercuri sînt situate într-un același plan P (în particular, dacă axele celor două cercuri coincid și P este un plan care trece prin axa lor comună), atunci orice plan Q, perpendicular pe P și care intersectează cele două cercuri date, le intersectează în patru puncte simetrice două cîte două în raport cu planul P și situate, de aceea, pe același cerc sau pe aceeași dreaptă.

De aici rezultă soluția problemei noastre.

Dacă cercurile date au centru radical, toate planele despre care este vorba trec prin acesta. Reciproc, orice plan care trece prin centrul radical și intersectează cele două cercuri date, le taie în patru puncte situate pe un același cerc.

Dacă cercurile date nu au centru radical și nu sînt coaxiale, atunci toate planele despre care este vorba sînt perpendiculare pe planul P, în care sînt situate axele cercurilor date. Reciproc, orice plan perpendicular pe planul P și care intersectează cercurile date le taie în patru puncte de pe un același cerc.

Dacă cele două cercuri date se află pe aceeași sferă, problema devine nedeterminată: orice plan care intersectează ambele cercuri date, le intersectează în patru puncte de pe un același cerc.

În sfîrșit, dacă cercurile date sînt situate în același plan, însuși enunțul problemei își pierde sensul.

692. La rezolvarea acestui exercițiu, vom folosi considerațiile generale dezvoltate la începutul soluției exercițiului 690, precum și cele arătate în soluția exercițiului 691.

Fie un cerc C, situat într-un plan Q, care taie în părți egale cele două cercuri date C' și C''. În acest caz, planul Q al cercului C va avea poziția indicată în soluția exercițiului 691 și va trece, totodată, prin centrele O' și

O'' ale cercurilor C' și C''. Din această observație rezultă soluția problemei noastre.

Dacă cercurile date au centrul radical I și acest centru radical nu este coliniar cu centrele O' și O'' ale cercurilor date, problema are o soluție unică. Planul cercului căutat va fi planul $IO'O''$; cercul pe care se află punctele de intersecție ale celor două cercuri date cu acest plan va fi tocmai cercul căutat.

Dacă centrul radical I al cercurilor date este coliniar cu punctele O' și O'', problema nu are soluții. În adevăr, orice plan care trece prin această dreaptă și nu conține nici unul dintre cercurile date, le intersectează pe acestea în patru puncte coliniare; planul care trece prin aceeași dreaptă și care conține unul dintre cercurile date nu duce nici el la rezultat.

Dacă cercurile date nu au centru radical, și nu sînt coaxiale, problema are, în general, o soluție unică. Planul cercului căutat va fi planul care trece prin centrele cercurilor date și este perpendicular (compară cu soluția ex. 691) pe planul P care conține axa. Dacă însă centrele cercurilor date coincid, problema nu are soluție.

Dacă cercurile date sînt situate pe aceeași sferă, problema devine nedeterminată: cercul căutat va fi intersecția acestei sfere cu orice plan care trece prin centrele cercurilor date (sau prin centrul lor comun).

În sfîrșit, dacă cercurile date sînt situate în același plan, problema este iarăși nedeterminată. În legătură cu acest caz, v. mai jos, soluția ex. 695, Obs. 2.

693. La rezolvarea acestui exercițiu, vom folosi considerațiile generale dezvoltate la începutul soluției exercițiului 690.

Fie un cerc C, de centru I și de rază R, împărțit în două părți egale de fiecare dintre cercurile date C' și C''. Altfel spus, să presupunem că cercul C' taie cercul căutat C în două puncte diametral opuse A' și B' ale acestuia, iar cercul C'' taie același cerc C, iarăși în două puncte diametral opuse A'' și B''. În acest caz, centrul I al cercului căutat are, în raport cu ambele cercuri date, aceeași putere *negativă*, anume $-R^2$. Dacă punctul I este distinct de centrul O' al primului cerc dat C', atunci coarda $A'B'$ a cercului C' este perpendiculară pe dreapta $O'I$, iar coarda $A''B''$ a cercului C'' va avea aceeași proprietate.

De aici rezultă soluția problemei noastre.

Dacă cercurile date au centrul radical I și acest centru radical este *interior* unuia dintre cercurile date (deci și celuilalt), atunci centrul radical I va fi centrul cercului căutat. Problema are o soluție unică, dacă punctul I este distinct de centrele celor două cercuri date; punctele A', B', A'' și B'', prin care trece cercul căutat, se determină cum s-a arătat mai sus. Dacă însă punctul I coincide cu centrul unuia dintre cercurile date, să zicem cu centrul cercului C', atunci putem lua drept coardă $A'B'$ oricare din diametrii cercului C', pe cînd coarda $A''B''$ se determină cum s-a arătat mai sus; în acest caz, cercul C căutat coincide, cum se vede ușor, cu cercul dat C'.

Dacă cercurile date au axă radicală și aceasta intersectează ambele cercuri în două puncte comune, adică dacă cercurile date sînt secante în două puncte A și B, problema devine nedeterminată: ca centru al cercului căutat putem lua orice punct al axei radicale, interior unuia dintre cercurile date

(deci și celuilalt), adică orice punct al segmentului AB. Poziția punctelor A', B', A'' și B'', deci și poziția cercului căutat, este determinată atunci după cum s-a indicat în cazul existenței centrului radical.

În celelalte cazuri, problema nu are soluții.

694. La rezolvarea acestui exercițiu, vom folosi considerațiile generale dezvoltate la începutul soluției exercițiului 690.

Fie un cerc C, tangent la două cercuri date C' și C'', respectiv în punctele T' și T''.

Dacă tangentele comune la cercul C și la fiecare dintre cercurile date în punctele T' și T'' sînt concurente, atunci punctul lor de intersecție I se află atît în planul cercului C', cît și în planul cercului C'' și are în raport cu ambele cercuri aceeași putere *pozitivă* (anume $IT'^2 = IT''^2$). Reciproc, dacă punctul I se bucură de aceste proprietăți, tangentele duse la ambele cercuri din punctul I sînt egale. Dacă IT' este una dintre tangentele duse din punctul I la primul cerc C', iar IT'' una dintre tangentele duse din același punct la al doilea cerc C'', avem $IT' = IT''$. În planul $IT'T''$, există un cerc tangent în punctele T' și T'' la dreptele IT' și IT''. Acest cerc este tangent în aceleași puncte la cercurile date C' și C''. Deoarece, din punctul I, putem duce două tangente la cercul C' și două tangente la cercul C'', și fiecare dintre cele două tangente la cercul C' poate fi considerată împreună cu fiecare dintre cele două tangente la cercul C'', vom obține astfel (pornind de la un același punct I), în general, patru cercuri căutate.

Dacă tangentele comune la cercul C și la fiecare dintre cercurile date în punctele T' și T'' sînt paralele, atunci axele celor două cercuri date sînt situate în același plan, anume în planul care trece prin diametrul $T'T''$ al cercului C și este perpendicular pe planul cercului. Reciproc, fie axele celor două cercuri date situate în același plan P (în particular, fie axele celor două cercuri coincidente, iar P un plan care trece prin axa lor comună). Dacă T' este unul dintre punctele de intersecție ale planului P cu cercul C' iar T'' unul dintre punctele de intersecție ale aceluiași plan cu cercul C'', tangentele la cele două cercuri în punctele T' și T'' vor fi perpendiculare pe planul P. Deci, există evident un cerc tangent la ambele cercuri date, respectiv în punctele T' și T''. Așadar, obținem, în general (pornind de la un același plan P), patru cercuri căutate.

De aici rezultă și soluția problemei noastre.

Dacă cercurile date au centru radical și acest centru radical este *exterior* unuia dintre cercurile date (deci și celuilalt), problema are patru soluții. Punctele de contact ale cercurilor căutate cu fiecare dintre cercurile date vor fi punctele de contact ale tangentelor la cercurile date, duse din centrul lor radical.

Dacă centrul radical al cercurilor date este situat pe unul dintre ele sau în interiorul lui, problema nu are soluții.

Dacă cercurile date nu au centru radical și nu sînt coaxiale, problema iarăși are patru soluții. Punctele de contact ale cercurilor căutate cu fiecare dintre cercurile date vor fi punctele de intersecție ale acestuia cu planul în care sînt situate axele cercurilor date.

Dacă cercurile date au axa radicală comună, problema devine nedeterminată. Punctele de contact ale oricăruia dintre cercurile căutate cu fiecare dintre cercurile date vor fi punctele de contact ale tangentelor la cercurile date,

Scanned with OKEN Scanner

duse dintr-un punct al axei radicale, exterior cercurilor date, precum și punctele de intersecție ale cercurilor date cu planul care conține axele lor.

În sfîrșit, fie cercurile date coaxiale. Problema va fi iarăși nedeterminată. Cercurile căutate formează două familii avînd proprietatea că toate cercurile unei familii se obțin din unul dintre ele printr-o rotație în jurul axei comune a cercurilor date (pentru cazul plan, compară cu soluția ex. 265). Pentru a construi cîte un cerc al fiecărei familii, ducem prin axa comună un plan P și considerăm, cum s-a arătat mai sus, punctele sale de intersecție cu cercurile date.

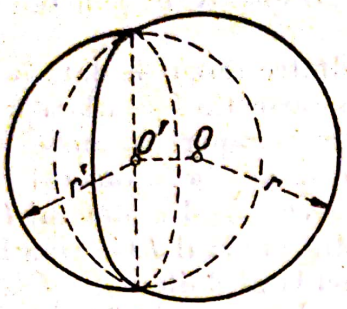


Fig. 197

695. Fie $O'(r')$ și $O''(r'')$ două sfere date. Să notăm cu $O(r)$ o a treia sferă, pe care o vom considera drept cea căutată. Dacă această sferă căutată intersectează prima sferă dată astfel ca intersecția să fie un cerc mare pe sfera dată, vom avea evident (fig. 197), $OO'^2 + r'^2 = r^2$. Dacă intersecția va fi un cerc mare pe sfera căutată, va trebui, în egalitatea precedentă, să permutăm între ele literele r și r', de unde obținem condiția $OO'^2 - r'^2 = -r^2$.

Să presupunem acum că sfera căutată intersectează cele două sfere, astfel ca intersecțiile să fie cercuri mari pe *sferele date*. Vom avea, evident,

$$OO'^2 + r'^2 = r^2; \quad OO''^2 + r''^2 = r^2, \tag{1}$$

de unde

$$OO'^2 - OO''^2 = r''^2 - r'^2. \tag{2}$$

Locul geometric al punctelor care satisfac această condiție (2) este un plan (ex. 446), pe care-l vom nota cu P, dacă centrele sferelor date nu coincid. Așadar, centrele tuturor sferelor căutate sînt situate în același plan P.

Reciproc, orice punct O din planul P este centrul unei sfere căutate. Raza r a acestei sfere este dată de oricare dintre egalitățile (1). În adevăr, fiecare dintre cele două egalități (1) este o consecință a egalității (2) și a celeilalte egalități (1).

Observații. 1° Orice punct M din planul radical al sferelor date satisface condiția $MO'^2 - MO''^2 = r'^2 - r''^2$. Comparînd această egalitate cu relațiile (1), ajungem la concluzia că planul radical al sferelor date și planul P, despre care este vorba, sînt ambele perpendiculare pe linia centrelor și simetrice în raport cu mijlocul segmentului care unește centrele celor două sfere.

2° În cazul planului, problema corespunzătoare poate fi enunțată astfel: *să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care taie în părți egale pe fiecare dintre două cercuri date situate în același plan.* Ecuațiile (1) și (2) rămîn valabile. Locul geometric căutat este dreapta perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri și simetrică cu axa lor radicală în raport cu mijlocul segmentului care unește centrele cercurilor (dacă centrele cercurilor date nu coincid).

Observația analogă rămîne valabilă și pentru celelalte probleme studiate în exercițiul de față.

Dacă ambele intersecții sînt cercuri mari pe *sfera căutată*, vom avea, cu aceleași notații,

$$OO'^2 + r^2 = r'^2 \text{ și } OO''^2 + r^2 = r''^2,$$

de unde

$$OO'^2 - r'^2 = OO''^2 - r''^2 = -r^2 < 0.$$

Locul geometric al punctelor O va fi, în acest caz, evident o parte din planul radical, anume cea interioară uneia dintre sferele date (deci și celeilalte). Locul geometric există numai în cazul cînd cele două sfere sînt secante.

În sfîrșit, dacă intersecția cu *prima* dintre sferele date va fi un cerc mare *pe această sferă*, iar intersecția cu a *doua* sferă dată va fi un cerc mare *pe sfera căutată*, vom avea, păstrînd aceleași notații,

$$OO'^2 + r'^2 = r^2; \quad OO''^2 + r^2 = r''^2,$$

de unde

$$OO'^2 + OO''^2 = r''^2 - r'^2.$$

Locul geometric al punctelor O care satisfac această condiție există, dacă $r''^2 - r'^2 > \frac{1}{2} O'O''^2$ și este o sferă S, avînd centrul în mijlocul segmentului $O'O''$ (ex. 668). Reciproc, orice punct de pe această sferă este centrul uneia dintre sferele căutate. Locul geometric al punctelor O se reduce la un punct, dacă $r''^2 - r'^2 = \frac{1}{2} O'O''^2$ și nu există dacă $r''^2 - r'^2 < \frac{1}{2} O'O''^2$.

În cazul a trei sfere date $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ și $O_3(r_3)$, putem considera *locul geometric al centrelor sferelor $O(r)$ care intersectează trei sfere date astfel ca intersecțiile*

a) *cu toate trei sferele date să fie cercuri mari pe sferele date*;

b) *cu toate cele trei sfere date să fie cercuri mari pe sfera căutată*;

c) *cu două oarecare dintre sferele date să fie cercuri mari pe aceste sfere, iar cu a treia, un cerc mare pe sfera căutată*;

d) *cu două oarecare dintre sferele date să fie cercuri mari pe sfera căutată, iar cu a treia sferă dată să fie un cerc mare pe aceasta.*

Să luăm pe rînd posibilitățile enumerate aici.

a) În acest caz, trebuie să fie satisfăcute condițiile $OO_1^2 + r_1^2 = OO_2^2 + r_2^2 = OO_3^2 + r_3^2 = r^2$. Locul geometric al punctelor O este intersecția a două plane, analoge cu planul P considerat mai sus, dacă centrele sferelor date nu sînt coliniare. Dacă centrele sferelor date sînt pe aceeași dreaptă, atunci locul geometric nu există sau se reduce la un plan.

b) În acest caz, trebuie să fie satisfăcute condițiile $OO_1^2 - r_1^2 = OO_2^2 - r_2^2 = OO_3^2 - r_3^2 = -r^2 < 0$. Locul geometric al punctelor O este, evident, partea din axa radicală a celor trei sfere date, care este interioară uneia dintre sferele date (deci și celorlalte două), dacă centrele lor nu sînt coliniare. Dacă centrele celor trei sfere date se află pe aceeași dreaptă, atunci locul geometric nu există sau se reduce la partea planului radical comună celor trei sfere, luate două cîte două, interioară în raport cu una dintre sferele date (deci și cu celelalte două).

c) Să presupunem că intersecțiile sferei căutate cu *primele două* dintre sferele date vor fi cercuri mari pe aceste sfere. Vom avea egalitățile $OO_1^2 + r_1^2 = OO_2^2 + r_2^2 = r_3^2 - OO_3^2 = r^2$. Locul geometric al punctelor O (dacă

există și nu se reduce la un punct) este cercul după care un plan analog cu planul P, considerat la începutul soluției și corespunzător primelor două sfere date, intersectează sfera analogă cu sfera S, menționată mai sus și corespunzînd primei (sau celei de-a doua) și celei de-a treia dintre sferele date.

d) Să presupunem că intersecțiile sferei căutate cu *primele* două dintre sferele date vor fi cercuri mari pe sfera căutată. Vom avea egalitățile $r_1^2 - OO_1^2 = r_2^2 - OO_2^2 = r_3^2 + OO_3^2 = r^2$. Locul geometric al punctelor O (dacă există și nu degenerează într-un punct) este cercul după care planul radical al primelor două sfere date intersectează sfera analogă cu sfera S, considerată mai sus și corespunzătoare celei de a treia și primei (sau celei de-a doua) dintre sferele date.

696. Să considerăm un plan arbitrar, care trece prin centrele O' și O'' ale celor două sfere date. Poziția punctelor limită P și Q ale cercurilor C' și C'' obținute în secțiune (ex. 152), pe dreapta $O'O''$ nu depinde, evident, de alegerea planului secant. Punctele P și Q, considerate ca sfere de rază nulă, au cu cele două sfere date un plan radical comun, deoarece ele se bucură de proprietatea corespunzătoare în raport cu cercurile C' și C''.

Dacă o sferă O este ortogonală la cele două sfere date O' și O'', atunci planul centrelor $OO'O''$ intersectează prima sferă O după un cerc C, ortogonal la intersecțiile C' și C'' ale planului cu cele două sfere date. În virtutea acestui fapt, cercul C, deci și sfera O, trec prin punctele limită ale cercurilor C' și C'' (ex. 152), adică prin punctele limită P și Q ale sferelor considerate.

Observație. Pentru a evita necesitatea de a face anumite rezerve la rezolvarea unora dintre exercițiile care urmează, vom generaliza întrucîtva noțiunea de punct limită a două sfere.

Dacă două sfere sînt tangente, atunci punctul lor de contact are, evident, următoarele proprietăți. Dacă vom considera punctul de contact drept o sferă (de rază nulă), aceasta va avea cu cele două sfere date planul radical comun; orice sferă ortogonală la cele două sfere tangente date trece prin punctul lor de contact. Aceste două proprietăți ne permit să considerăm punctul de contact drept unic *punct limită a două sfere tangente*.

Mai departe, este normal să luăm ca puncte limite *ale unei sfere și ale unui plan*, care nu au puncte comune, două puncte avînd următoarea proprietate: dacă fiecare dintre ele este considerat ca o sferă (de rază nulă), atunci planul dat va fi planul radical al acestei sfere și al sferei date. Totodată, orice sferă ortogonală la sfera dată și la planul dat va trece prin punctele lor limită.

Pentru a demonstra existența acestor puncte, este suficient să luăm o sferă oarecare, astfel ca planul dat să fie planul radical al acestei sfere și al sferei date, și să considerăm punctele limită ale celor două sfere.

În sfîrșit, este firesc să adoptăm ca (unic) *punct limită al unei sfere și al planului tangent la ea* punctul lor de contact.

Se pot face observațiile corespunzătoare și în privința punctelor limită a două cercuri în plan.

697. Fie $O(r)$, $O'(r')$, $O''(r'')$ cele trei sfere date. Deoarece ele nu au puncte comune, *axa lor radicală* nu are puncte comune cu nici una dintre aceste sfere și *este în întregime exterioară fiecăreia dintre ele*. În adevăr, punctul comun al axei radicale și al uneia dintre sferele date ar fi punct comun al tuturor trei sferelor date, deoarece puterea unui astfel de punct în raport cu una dintre sferele date, deci și în raport cu celelalte, ar fi nulă.

Să notăm acum cu O_1 și cu O_2 două puncte arbitrare de pe axa radicală, iar cu r_1 și cu r_2 razele sferelor avînd aceste puncte ca centre și ortogonale la

Scanned with OKEN Scanner

cele trei sfere date. Punctul O are aceeași putere r^2 în raport cu fiecare dintre sferele $O_1(r_1)$ și $O_2(r_2)$, după cum rezultă din ortogonalitatea sferei $O(r)$ la fiecare dintre sferele $O_1(r_1)$ și $O_2(r_2)$. Tot astfel, puterea punctului O' în raport cu fiecare dintre sferele $O_1(r_1)$ și $O_2(r_2)$ este egală cu r'^2, iar puterea punctului O'' în raport cu fiecare dintre aceste sfere va fi r''^2. Așadar, planul $OO'O''$, adică *planul centrelor celor trei sfere* date este planul radical al sferelor $O_1(r_1)$ și $O_2(r_2)$, deci și *planul radical comun al tuturor sferelor ortogonale la cele trei sfere date.*

Dacă una dintre sferele ortogonale taie planul centrelor după cercul C, atunci și toate sferele ortogonale la cele trei sfere date vor trece prin același cerc C, deoarece aceste sfere au planul radical comun. Deoarece însă axa radicală este în întregime exterioară fiecăreia dintre sferele date, putem alege ca centru al sferei $O_1(r_1)$, ortogonală la ele, în particular, punctul de intersecție al axei radicale cu planul centrelor. În acest caz, sfera $O_1(r_1)$ va intersecta evident planul centrelor.

Prin urmare *dacă cele trei sfere ale căror centre sînt necoliniare nu au nici un punct comun, atunci sferele ortogonale la ele trec printr-un același cerc C.*

Fie P un punct arbitrar de pe cercul C. Puterea punctului O_1 de pe axa radicală în raport cu fiecare dintre cele trei sfere date este egală cu r_1^2, unde r_1 are aceeași semnificație ca mai sus. Puterea punctului O_1 în raport cu punctul P, considerat ca sferă de rază nulă, este egală, prin definiție, cu O_1P^2. Avem însă $O_1P = r_1$, deoarece punctul P este situat, prin ipoteză, pe sfera $O_1(r_1)$. Așadar, *toate punctele cercului C, considerate ca sfere de rază nulă, au axa radicală comună cu cele trei sfere date.*

Reciproc, dacă un punct X are această proprietate, va trebui să avem pentru el relația $O_1X^2 = r_1^2$ și, analog, $O_2X^2 = r_2^2$. De aceea punctul X este unul dintre punctele de intersecție ale sferelor $O_1(r_1)$ și $O_2(r_2)$, deci este situat pe cercul C.

Prin urmare, *cercul C este locul geometric al punctelor care, ca sfere de rază nulă, au axa radicală comună cu cele trei sfere date.*

698. Să presupunem că există o sferă ortogonală la cele patru sfere date. Centrul ei este centrul radical I al sferelor date. Pătratul razei ei r este puterea punctului I în raport cu fiecare dintre sferele date. Dacă vom considera un punct P de pe această sferă ortogonală ca pe o sferă de rază nulă, atunci puterea punctului I în raport cu această din urmă sferă va fi de asemenea egală cu $IP^2 = r^2$. Reciproc, dacă un punct X are proprietatea cerută, va trebui să avem $IX^2 = r^2$, și punctul X va fi situat pe sfera ortogonală.

Așadar, o sferă ortogonală la patru sfere date este locul geometric al punctelor avînd proprietatea considerată.

699. La rezolvarea acestui exercițiu, vom folosi rezultatele obținute la exercițiile 690 și 691.

Să considerăm întîi cazul general, cînd *cercurile date C_1 și C_2 au centrul radical I.* Să presupunem că sfera S_1, care trece prin cercul C_1, și sfera S_2, care trece prin cercul C_2, nu au puncte comune (sau că sînt tangente). Vom nota cu U unul dintre punctele lor limită (sau punctul lor limită unic, care coincide cu punctul de contact).

Deoarece punctul I are aceeași putere, pe care o vom nota cu h, în raport cu cercurile date C_1 și C_2, el este situat în planul radical al sferelor S_1 și S_2.

Scanned with OKEN Scanner

De aceea, puterea punctului I în raport cu punctul U, considerat ca sferă (de rază nulă), trebuie să fie egală tot cu h, astfel că $IU^2 = h$. Această egalitate arată că, în cazul considerat, centrul radical al cercurilor date are, în raport cu fiecare dintre ele, puterea pozitivă și că *punctul limită U al sferelor S_1 și S_2 se află pe o sferă Σ, care intersectează ambele cercuri date sub un unghi drept* (compară cu soluția ex. 690).

Fie acum U un punct arbitrar al acestei sfere Σ. Vom arăta cum urmează să construim sferele S_1 și S_2, care trec respectiv prin cercurile C_1 și C_2 și au pe U ca punct limită. Centrul O_1 al sferei căutate S_1 trebuie să fie situat pe axa cercului C_1, centrul O_2 al sferei căutate S_2 pe axa cercului C_2, iar dreapta O_1O_2 trebuie să treacă prin punctul U. Prin urmare, pentru construirea punctelor O_1 și O_2, este suficient să ducem prin punctul U o dreaptă care intersectează axele nesituate într-un același plan ale cercurilor C_1 și C_2 (ex. 424).

Dacă această dreaptă există, atunci intersecțiile ei O_1 și O_2 cu axele celor două cercuri vor fi centrele sferelor căutate, care sînt astfel determinate. În adevăr, dacă sferele S_1 și S_2 sînt construite, cum am indicat mai sus, atunci punctul I are aceeași putere h, atît în raport cu sferele S_1 și S_2, cît și în raport cu punctul U, considerat ca sferă (de rază nulă). Prin urmare, planul radical comun al celor trei sfere va fi planul care trece prin punctul I și este perpendicular pe dreapta construită O_1O_2, iar punctul U este punct limită al sferelor S_1 și S_2[1]).

Acum, dacă prin punctul U nu putem duce o dreaptă care taie axele celor două cercuri date, atunci, prin același punct U, va trece o dreaptă paralelă cu una dintre aceste axe și care o va intersecta pe cealaltă (compară cu soluția ex. 424). Să presupunem, pentru a fixa ideile, că această dreaptă este paralelă cu axa cercului C_1, adică perpendiculară pe planul acestuia, și că intersectează în punctul O_2 axa cercului C_2. Atunci punctul I are aceeași putere în raport cu punctul U, considerat ca sferă (de rază nulă), și cu sfera S_2, de centru O_2, care trece prin cercul C_2. Planul radical al acestor două sfere va fi planul care trece prin punctul I și este perpendicular pe dreapta UO_2, adică planul cercului C_1. Așadar, punctul U este punct limită al sferei S_2, care trece prin cercul C_2, și al planului cercului C_1 (compară cu soluția ex. 696, Obs.).

Așadar, dacă cercurile date au centru radical și acesta este *exterior* unuia dintre cercurile date (deci și celuilalt), atunci locul geometric căutat al punctelor limită va fi sfera considerată la exercițiul 690, care intersectează ambele cercuri date sub un unghi drept.

Dacă centrul radical I al cercurilor date este situat pe unul dintre ele (deci și pe celălalt), locul geometric căutat se reduce la punctul I, iar dacă acesta este interior unuia dintre cercuri (deci și celuilalt), locul geometric nu există.

Să presupunem acum că *cercurile date nu au centru radical și nu sînt coaxiale*. În acest caz, axele cercurilor căutate sînt situate într-un același plan P. În același plan P, sînt situate și centrele sferelor S_1 și S_2, deci și punctele lor limită. Se poate demonstra că, și în acest caz, locul geometric căutat al punctelor limită va fi *întregul* plan P.

[1]) Problema construirii dreptei O_1O_2 devine nedeterminată, dacă punctul U este situat pe axa unuia dintre cercurile date. Însă fiecare dintre cercurile date taie sub un unghi drept sfera Σ, pe care este situat punctul U, de unde conchidem ușor că axele cercurilor date nu au puncte comune cu sfera Σ.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta, trebuie să arătăm că orice punct U al planului P este punct limită al unei sfere S_1, care trece prin cercul C_1, și al unei sfere S_2, care trece prin cercul C_2. Să notăm cu C' și cu C'' cercurile după care planul P taie respectiv sferele S_1 și S_2. Punctul U va fi punct limită și pentru cercurile C' și C'', deoarece planul P trece prin linia centrelor sferelor S_1 și S_2 (compară soluția ex. 696).

Să notăm cu A_1 și cu B_1 punctele de intersecție ale cercului C_1 cu planul P și cu A_2 și cu B_2 punctele de intersecție ale cercului C_2 cu același plan. Cercul C' trece prin punctele A_1 și B_1, iar cercul C'', prin punctele A_2 și B_2. Prin punctul limită U trece o infinitate de cercuri ortogonale la cele două cercuri C' și C''. Să alegem printre aceste cercuri pe cel care este ortogonal la încă un cerc care trece prin punctele A_1 și B_1. Acest cerc Γ va fi ortogonal, cum ne dăm ușor seama, la *toate* cercurile care trec prin punctele A_1 și B_1 (compară cu nr. **139**, Obs.). Există însă un cerc unic care trece prin punctul U și este ortogonal la două cercuri care trec prin punctele A_1 și B_1, deci și la toate cercurile care trec prin aceste puncte (compară cu ex. 259, pentru cazul cînd al treilea dintre cercurile date acolo se reduce la un punct). Așadar, cercul căutat C'' este ortogonal la cercul Γ_1, care trece prin punctul U și este ortogonal la cercuri care trec prin punctele A_1 și B_1. Analog, cercul căutat C' este ortogonal la cercul Γ_2, care trece prin punctul U și este ortogonal la toate cercurile care trec prin punctele A_2 și B_2.

De aici rezultă următoarea construcție a cercurilor C' și C'' (deci și a sferelor căutate S_1 și S_2). Prin punctul U, ducem cercul Γ_1, ortogonal la două oarecare dintre cercurile ce trec prin punctele A_1 și B_1, și cercul Γ_2, ortogonal la două oarecare dintre cercurile ce trec prin punctele A_2 și B_2. Cercul C', care trece prin punctele A_1 și B_1 și este ortogonal la Γ_2 (compară cu ex. 258), și cercul C'', care trece prin punctele A_2 și B_2 și este ortogonal la cercul Γ_1, vor fi tocmai cele căutate. În adevăr, cercul Γ_1 este ortogonal atît la cercul C' (deoarece acesta trece prin punctele A_1 și B_1), cît și la cercul C'' (prin construcție); cercul Γ_2 este de asemenea ortogonal la cercurile C' și C''. Deoarece, prin punctul U, trec ambele cercuri Γ_1 și Γ_2, ortogonale la cele două cercuri C' și C'', punctul U va fi efectiv punct limită al acestor două cercuri.

Raționamentul de mai sus își pierde valabilitatea, dacă cercurile Γ_1 și Γ_2 coincid sau dacă C' și C'' coincid. În ambele cazuri, cercurile C_1 și C_2 sînt situate pe aceeași sferă și vor avea, de aceea, contrar ipotezei, axă radicală sau vor fi coaxiale. Trecem acum la analiza acestor din urmă cazuri.

Să presupunem acum că *cercurile date au axă radicală*. În acest caz, obținem rezultate care diferă esențial de cele precedente.

Să presupunem întîi că cercurile date nu au puncte comune, astfel că toate punctele axei radicale sînt exterioare fiecăruia dintre ele. Să presupunem că sfera S_1, care trece prin cercul C_1, și sfera S_2, care trece prin cercul C_2, nu au puncte comune (sau sînt tangente). Să notăm cu U unul dintre punctele lor limită (sau punctul lor limită unic).

Dat fiind că orice punct al axei radicale a cercurilor date are aceeași putere *pozitivă* h în raport cu cercurile C_1 și C_2, axa lor radicală va fi situată în planul radical al sferelor S_1 și S_2. De aceea, puterea unui punct I al axei radicale în raport cu punctul U, considerat ca sferă (de rază nulă), trebuie să fie egală cu puterea h a punctului I în raport cu fiecare dintre sferele S_1 și S_2, adică egală cu puterea h a punctului I în raport cu fiecare dintre cercurile date, astfel că $IU^2=h$. Această egalitate arată că punctul U se află pe sfera Σ de centru I, care intersectează sub un unghi drept ambele cercuri date. Acest raționament poate fi reluat pentru *orice* punct I al axei radicale. De aceea, punctul U este comun tuturor sferelor Σ, care intersectează sub un unghi drept ambele cercuri date. Din exercițiul 697, rezultă ușor că toate aceste sfere trec printr-un același cerc C (ca cele trei sfere despre care este vorba în ex. 697 putem lua sferele S_1, S_2 și sfera pe care se află cercurile date, care au axă radicală). Așa-

Scanned with OKEN Scanner

dar, *punctul limită U al sferelor S_1 și S_2 este situat, în cazul de față, pe cercul comun C al tuturor sferelor care intersectează sub un unghi drept cele două cercuri date*. Se poate demonstra că, în acest caz, locul geometric căutat al punctelor limită va fi *întregul* cerc C.

Pentru aceasta, trebuie să arătăm că orice punct U de pe cercul C este punct limită al unei sfere S_1, care trece prin cercul C_1, și al unei sfere S_2, care trece prin cercul C_2.

Ca sferă S_1, vom lua o sferă arbitrară, care trece prin cercul C_1. Planul radical M al sferei S_1 și al punctului U, considerat ca sferă, trece prin axa radicală a cercurilor date, deoarece fiecare punct al acesteia are aceeași putere în raport cu cele două sfere. Să ducem acum, printr-un punct arbitrar A al cercului C_2, o sferă S_2, astfel ca planul M să fie planul radical al sferelor S_1 și S_2 (nu vom insista asupra metodei de a construi o astfel de sferă). Se demonstrează ușor că intersecția sferei S_2 cu planul cercului C_2 coincide cu acest cerc (compară cu demonstrația coincidenței cercurilor $\overline{C}$ și C'' în soluția ex. 690). Punctul U, considerat ca sferă, are planul radical M comun cu sferele S_1 și S_2 și este, de aceea, un punct limită al acestora.

Prin urmare, dacă cercurile date au axă radicală și dacă această axă radicală nu are puncte comune cu unul dintre cercurile date (deci nici cu celălalt), atunci locul geometric căutat al punctelor limită va fi un cerc, anume cel comun tuturor sferelor care intersectează sub un unghi drept cele două cercuri date.

Dacă axa radicală a celor două cercuri date este tangentă la unul dintre ele (deci ambele cercuri sînt tangente în acest punct de contact), locul geometric căutat se reduce la punctul de contact, iar dacă axa radicală intersectează unul dintre cercurile date (deci ambele cercuri vor fi secante în aceleași două puncte de intersecție), locul geometric nu există.

În sfîrșit, dacă cercurile date sînt coaxiale, locul geometric căutat al punctelor limită va fi axa lor comună.

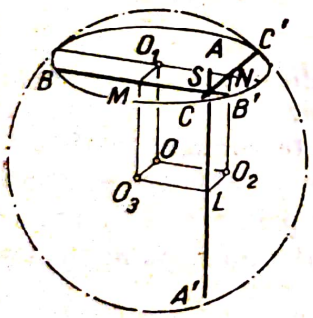


Fig. 198

700. Să presupunem că cele trei drepte perpendiculare două cîte două, care trec prin punctul dat S, intersectează o sferă dată $O(R)$, una în punctele A și A', a doua în punctele B și B', a treia în punctele C și C' (fig. 198).

Să notăm cu L, M și N mijloacele coardelor AA', BB' și CC'. Punctele L, M, N, O, și S sînt vîrfurile unui paralelipiped dreptunghic, avînd celelalte trei vîrfuri în centrele O_1, O_2 și O_3 ale cercurilor după care sfera dată intersectează respectiv fețele BSC, CSA și ASB ale triedrului $S{\cdot}ABC$. Conform teoremei relative la pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic (**391**), avem

$$OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2 = OS^2. \qquad (1)$$

Mai departe, avem $OL^2 = OO_2^2 + OO_3^2$; $OM^2 = OO_3^2 + OO_1^2$ și $ON^2 = OO_1^2 + OO_2^2$, de unde obținem

$$OL^2 + OM^2 + ON^2 = 2(OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2) = 2OS^2. \qquad (2)$$

1° Expresia pentru suma pătratelor celor trei coarde, determinate pe muchiile triedrului, poate fi transformată acum astfel: $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 =$

$=4AL^2+4BM^2+4CN^2=4(OA^2-OL^2)+4(OB^2-OM^2)+4(OC^2-ON^2)=12R^2-$ $-4(OL^2+OM^2+ON^2)$, de unde, în virtutea egalității (2), căpătăm

$$AA'^2+BB'^2+CC'^2=12R^2-8OS^2. \tag{3}$$

Această egalitate ne arată că suma pătratelor coardelor considerate este constantă (pentru un punct S dat).

Observație. Din ultima egalitate pentru vîrful S al triedrului tridreptunghic ale cărui muchii intersectează toate o sferă, avem condiția $12R^2-8OS^2>0$ sau $2OS<R\sqrt{6}$.

2° Punctul S poate fi atît interior sferei (fig. 198), cît și pe ea sau în exteriorul ei. Alegînd în mod arbitrar pe fiecare dintre cele trei drepte SA, SB și SC cîte un sens pozitiv, vom avea în toate cazurile, ca mărime și ca semn, $SA^2+SB^2+SC^2+SA'^2+SB'^2+SC'^2=(SA-SA')^2+(SB-SB')^2+$ $+(SC-SC')^2+2(SA\cdot SA'+SB\cdot SB'+SC\cdot SC')=AA'^2+BB'^2+$ $+CC'^2+2(SA\cdot SA'+SB\cdot SB'+SC\cdot SC')$. Notînd acum cu h puterea punctului S în raport cu sfera, avem (**457**): $SA\cdot SA'=SB\cdot SB'=SC\cdot SC'=$ $=h=OS^2-R^2$. Mai luînd în considerare și egalitatea (3), obținem

$$SA^2+SB^2+SC^2+SA'^2+SB'^2+SC'^2=6R^2-2OS^2.$$

Această egalitate arată că suma pătratelor celor șase segmente considerate este constantă.

3° În sfîrșit, pentru suma ariilor celor trei cercuri considerate, avem $\pi\cdot O_1B^2+\pi\cdot O_2C^2+\pi\cdot O_3A^2=\pi(OB^2-OO_1^2)+\pi(OC^2-OO_2^2)+\pi(OA^2-$ $-OO_3^2)=3\pi R^2-\pi(OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2)$.

Ținînd seama de egalitatea (1), obținem pentru suma ariilor celor trei cercuri mărimea constantă $3\pi R^2-\pi\cdot OS^2$.

701. Păstrînd notațiile de la exercițiul 700, să presupunem că am coborît din punctul S perpendiculara SH pe planul ABC (fig. 199). În acest caz, H va fi punctul de concurență al înălțimilor triunghiului ABC (problema 513, I°). Să notăm acum cu D intersecția planului SAH cu dreapta BC și cu E al doilea punct de intersecție al dreptei AD cu sfera; deoarece E este intersecția înălțimii AD a triunghiului ABC cu cercul circumscris, avem $DE=DH$ (ex. 70).

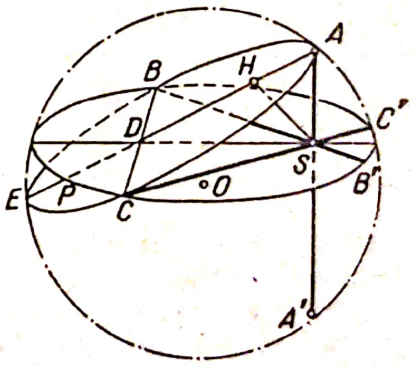


Fig. 199

Deoarece dreapta SA este perpendiculară pe dreptele SB și SC, ea este perpendiculară și pe dreapta SD. Din triunghiul dreptunghic ADS, găsim $SH^2=\frac{1}{2}HA\cdot HE=-\frac{1}{2}h=-\frac{1}{2}(OH^2-R^2)$, unde h este puterea punctului H în raport cu sfera. Această din urmă egalitate ne dă

$$OH^2+2SH^2=R^2. \tag{1}$$

Așadar, *piciorul H al perpendicularei coborîte din punctul dat S pe oricare dintre planele ABC satisface condiția* (1).

Reciproc, fie un punct, H, distinct de S, care satisface relația (1). Planul P, care trece prin punctul H și este perpendicular pe dreapta SH, intersectează sfera, deoarece, în virtutea relației (1), avem $OH<R$. Să notăm cu A unul dintre punctele de intersecție ale planului P cu sfera, cu E al doilea punct de intersecție al dreptei AH cu sfera și cu D mijlocul segmentului HE. Deoarece punctul H este interior sferei, va fi interior și punctul D. De aceea, dreapta situată în planul P și perpendiculară pe AD în punctul D taie sfera în două puncte, pe care le vom nota cu B și cu C.

Să arătăm că triedrul $S{\cdot}ABC$, unde S este un punct dat iar A, B, C, sînt punctele definite mai sus, este tridreptunghic. Deoarece, în baza egalității (1), avem $SH^2=-\frac{1}{2}(OH^2-R^2)=-\frac{1}{2}h$, unde h este puterea punctului H în raport cu sfera, iar $HD=\frac{1}{2}HE$, căpătăm $SH^2=HA{\cdot}HD$. Deoarece, în afară de aceasta, dreapta SH este perpendiculară pe planul P și deci pe dreapta AD, rezultă că, în virtutea ultimei egalități, unghiul ASD este drept. Totodată, dreapta BC, perpendiculară (prin construcție) pe proiecția AH a dreptei SA pe planul P, este perpendiculară și pe dreapta SA. Așadar, dreapta SA este perpendiculară pe dreptele SB și BC din planul BSC, deci ea este perpendiculară și pe planul BSC. Prin urmare, unghiurile plane ASB și ASC ale triedrului $S{\cdot}ABC$ sînt drepte. Mai departe, avem $DB{\cdot}DC=DA{\cdot}DE=DS^2$. Deoarece dreapta DS este perpendiculară (prin construcție) pe dreapta BC, rezultă că și unghiul BSC este drept. În consecință, *orice punct H care satisface condiția* (1) *este piciorul perpendicularei coborîte din punctul S pe un plan ABC.*

Ne mai rămîne să găsim locul geometric al punctelor H care satisfac condiția (1). În virtutea soluției exercițiului 668, *locul geometric al punctelor H este o sferă*. Centrul acestei sfere este punctul O_1, care împarte segmentul OS (interior) în raportul $O_1O:O_1S=2:1$; raza sferei este $\frac{1}{3}R^2-\frac{2}{9}OS^2$ (v. soluția ex. 668). Această sferă există, dacă $OS^2<\frac{3}{2}R^2$; prin urmare, în aceleași condiții, există și triedrele care se bucură de proprietățile considerate (compară cu soluția ex. 700, Obs.).

Să luăm acum cazul cînd punctul S se află chiar pe sferă. Să notăm cu A, B și C celelalte puncte de intersecție respective ale muchiilor triedrului cu sfera. Punctele S, A, B și C vor aparține, evident, vîrfurilor unui paralelipiped dreptunghic, înscris în sferă și avînd centrul O al sferei ca punct de concurență al diagonalelor. Planul ABC trece prin extremitățile celor trei muchii ale paralelipipedului care pornesc din vîrful S. De aceea, diagonala OS a paralelipipedului trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC, iar punctul G împarte segmentul OS în raportul constant $GO:GS=1:2$(ex. 524). De aici rezultă că, în acest caz, toate planele ABC trec prin același punct G.

702. Să luăm ca centre ale celor trei sfere trei puncte necoliniare arbitrare. Razele celor trei sfere le vom alege astfel încît să nu fie egale două cîte două, iar suma razelor fiecărei perechi de sfere să fie mai mică decît distanța dintre ele (iar în rest, arbitrar). În aceste condiții, toate cele trei sfere vor fi exterioare. Dacă acum una dintre axele de asemănare intersectează sferele alese (sau

este tangentă la ele), vom micșora într-un același raport razele celor trei sfere, fără a schimba poziția centrelor lor, astfel ca nici una dintre axele de asemănare să nu intersecteze sferele transformate; dat fiind că centrele și axele de asemănare vor rămîne, în aceste condiții, pe loc, această micșorare a razelor este posibilă.

În cazul acestei alegeri a celor trei sfere, vor trece prin fiecare dintre cele patru axe de asemănare cîte două plane tangente la una oarecare dintr cele trei sfere. Aceste opt plane vor fi planele tangente comune la cele trei sfere.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL IV

706. Aria sferei este egală cu produsul dintre lungimea unui cerc mare și diametrul sferei; aria unei zone sferice este egală cu produsul dintre lungimea unui cerc mare și înălțimea zonei. Dacă aria zonei — este în raportul $m:n$ față de aria sferei, atunci și înălțimea ei va fi în raportul $m:n$ cu diametrul sferei. De aceea, planele care determină pe sfera dată zone a căror arie este egală cu $m:n$ din aria sferei sînt tangente la o aceeași sferă, concentrică cu cea dată; această sferă împarte toți diametrii sferei date în raportul $m:(n-m)$.

De aici rezultă soluția problemei noastre. Pentru a împărți suprafața sferei considerate în n părți echivalente cu ajutorul unor plane care trec printr-o dreaptă D dată, este suficient să împărțim unul dintre diametrii sferei în n segmente egale, să ducem prin toate punctele de diviziune sfere concentrice cu cea dată și să construim planele tangente la aceste sfere care trec prin dreapta D. În fig. 200, construcția este reprezentată pentru $n = 5$ (figura redă intersecția sferei considerate cu un plan care trece prin centrul sferei și este perpendicular pe dreapta D).

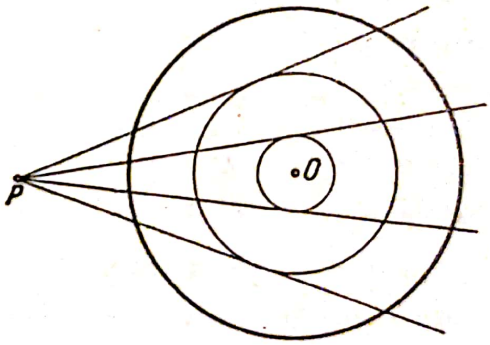


Fig. 200.

707. Aria unei zone sferice este egală cu lungimea unui cerc mare al sferei, înmulțită cu înălțimea. Partea considerată din suprafața laterală a cilindrului este egală cu produsul dintre lungimea cercului de bază al cilindrului, adică lungimea unui cerc mare, și distanța dintre cele două plane secante, egală cu înălțimea zonei. De aici rezultă egalitatea ariei zonei sferice și a părții considerate din suprafața cilindrului.

708. 1° Fie P' un plan paralel cu planul P și situat la distanța x de centrul sferei, mai mică decît raza ei R. Acest plan P' va intersecta conul despre care este vorba după un cerc de rază x, iar sfera după un cerc de rază $\sqrt{R^2-x^2}$. Suma ariilor celor două secțiuni va fi egală cu $\pi x^2 + \pi(R^2 - x^2) = \pi R^2$, adică va fi egală cu aria intersecției cilindrului cu același plan P'.

2° Fie P' același plan ca mai sus, iar P_0 planul paralel cu P și care trece prin centrul sferei. Volumul părții de cilindru cuprinse între cele două plane

P_0 și P' este egal cu $V' = \pi R^2 x$; volumul părții corespunzătoare a conului este $V_1' = \frac{1}{3}\pi x^3$; partea corespunzătoare a sferei este o zonă sferică la care razele bazelor sînt R și $\sqrt{R^2 - x^2}$, iar înălțimea este egală cu x; volumul ei va fi deci $V_2' = \frac{1}{2}\pi R^2 x + \frac{1}{2}\pi x(R^2 - x^2) + \frac{1}{6}\pi x^3 = \pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi x^3$. De aici avem

$$V' = V_1' + V_2'. \tag{1}$$

Să ducem acum un al doilea plan P'', analog cu P', și să notăm cu V'', V_1'' și V_2'' volumele respective ale părții de cilindru, de con și de sferă, cuprinse între planele P_0 și P''. În analogie cu cele de mai sus, vom avea

$$V'' = V_1'' + V_2''. \tag{2}$$

În sfîrșit să notăm cu V, V_1 și V_2 volumele respective ale părții de cilindru, de con și de sferă, cuprinse între planele P' și P''; vom avea egalitățile evidente $V = V' + V''$, $V_1 = V_1' + V_1''$ și $V_2 = V_2' + V_2''$, dacă planele P' și P'' sînt situate de o parte și de cealaltă a centrului sferei, și egalitățile $V = V' - V''$, $V_1 = V_1' - V_1''$ și $V_2 = V_2' - V_2''$, dacă planele P' și P'' se află de aceiași parte a centrului sferei, iar planul P'' este mai apropiat de centru decît P' (putem alege astfel notațiile, încît această din urmă condiție să fie îndeplinită). Din aceste egalități, deducem — cu ajutorul egalităților (1) și (2) — că, în toate cazurile, are loc egalitatea căutată $V = V_1 + V_2$.

709. În cazul unui cilindru, propoziția este evidentă, deoarece $B = B' = B''$ și $\frac{1}{6}h(B + B' + 4B'') = Bh = V$.

În cazul unui con de rotație, ariile secțiunilor paralele cu baza sînt în același raport ca pătratele distanțelor lor la vîrf, astfel că raportul dintre razele acestor secțiuni este egal cu raportul dintre distanțele lor la vîrf. Prin urmare, $B' = O$, $B'' = \frac{1}{4}B$ și deci $\frac{1}{6}h(B + B' + 4B'') = \frac{1}{3}Bh = V$.

În cazul unui trunchi de con de rotație, avînd razele bazelor R și R', raza secțiunii mediane este $\frac{1}{2}(R + R')$.

De aceea,

$$B = \pi R^2;$$
$$B' = \pi R'^2;$$
$$B'' = \frac{1}{4}\pi(R + R')^2,$$

de unde

$$\frac{1}{6}h(B + B' + 4B'') = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR') = V.$$

În sfîrșit, volumul unui segment sferic este (**489**) $V = \frac{1}{2}h(B + B') + \frac{1}{6}\pi h^3$. Tot astfel, volumul celorlalte două segmente sferice în care un plan

paralel cu baza și situat la distanțe egale împarte segmentul respectiv, vor fi respectiv

$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)(B+B'')+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$ și $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)(B''+B')+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$. Așadar, pentru determinarea lui B'', obținem ecuația

$$\frac{1}{4}h(B+B'')+\frac{1}{48}\pi h^3+\frac{1}{4}h(B''+B')+\frac{1}{48}\pi h^3=\frac{1}{2}h(B+B')+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

din care avem

$$B''=\frac{1}{2}(B+B')+\frac{1}{4}\pi h^2.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{6}h(B+B'+4B'')=\frac{1}{6}h[B+B'+2(B+B')+\pi h^2]=$$

$$=\frac{1}{2}h(B+B')+\frac{1}{6}\pi h^3=V.$$

Așadar, formula din enunț a fost demonstrată pentru toate cazurile.

710. Fie C și C' două cercuri mici, polare unul în raport cu celălalt (fig. 201 și 202), A polul lor comun, H și H' centrele lor, M și M' două puncte arbitrare de pe cele două cercuri, astfel ca razele HM și $H'M'$ să fie paralele și orientate în același sens, O centrul sferei.

Lungimea cercului C, egală cu $2\pi\cdot MH$, se va exprima prin numărul $x=\frac{2\pi\cdot MH}{2\pi\cdot OA}=\frac{MH}{OA}$, dacă luăm ca unitate de lungime lungimea unui cerc mare, egală cu $2\pi\cdot OA$. Aria calotei sferice mai mici, mărginită de cercul C', $2\pi\cdot OA\cdot H'A$, va fi exprimată prin numărul $y=\frac{2\pi\cdot OA\cdot H'A}{2\pi\cdot OA^2}=\frac{H'A}{OA}$, dacă luăm ca unitate de arie aria unei emisfere, egală cu $2\pi\cdot OA^2$. Însă în virtutea proprietăților cercurilor mici polare (soluția ex. 488), $\widehat{AOM}+\widehat{AOM'}=90°$, triunghiurile OMH și $M'OH'$ sînt egale și $MH=OH'$ Prin urmare, avem

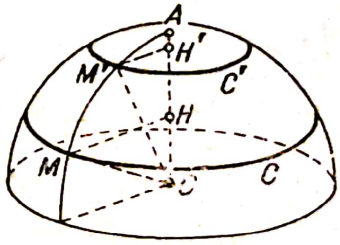


Fig. 201

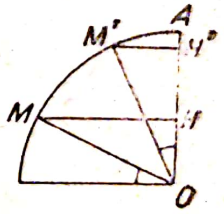


Fig. 202

$$x+y=\frac{MH}{OA}+\frac{H'A}{OA}=\frac{OH'+H'A}{OA}=1,$$

de unde $x=1-y$.

711. Un poliedru arbitrar circumscris unei sfere date poate fi descompus în piramide avînd vîrful comun în centrul sferei și ca baze toate fețele poliedrului. Volumul fiecăreia dintre aceste piramide este egal cu produsul dintre

aria feței respective a poliedrului și o treime din raza sferei (deoarece înălțimea piramidei coincide cu raza sferei). De aici rezultă că volumul poliedrului dat este egal cu produsul dintre aria sa și o treime din raza sferei.

Așadar, raportul dintre volum și arie are aceiași valoare pentru toate poliedrele considerate, anume o treime din raza sferei.

712. Volumul unui cilindru și aria lui totală sînt egale cu limitele către care tind respectiv volumul și aria totală ale unei prisme *circumscrise*, cînd numărul laturilor bazelor ei crește nemărginit, astfel ca lungimea fiecărei laturi să tindă către zero (pentru volumul și aria laterală, nr. **441**, Obs.; pentru aria bazei, nr. **259**). Dacă cilindrul considerat este circumscris unei sfere, atunci prisma circumscrisă cilindrului va fi circumscrisă și sferei. Prin urmare, raportul dintre volumul prismei și aria ei totală va fi egal cu o treime din raza sferei (compară cu soluția ex. 718). Această dependență dintre volum, aria totală și raza sferei se păstrează și în cadrul trecerii la limită, adică ea va avea loc (cf. celor arătate la începutul soluției) și pentru cilindrul circumscris.

Raționamente analoage vor fi aplicabile și în celelalte cazuri despre care este vorba în enunțul problemei.

713. Fie a și b laturile paralelogramului, h și k înălțimea corespunzătoare, V și V' volumele corpurilor generate prin rotația paralelogramului dat, respectiv în jurul laturilor a și b.

Corpul format prin rotația paralelogramului în jurul laturii a este, evident, echivalent cu un cilindru avînd raza bazei egală cu h, și înălțimea a. De aici, $V = \pi ah^2$ și, analog, $V' = \pi bk^2$. Prin urmare, $V:V' = ah^2:bk^2$ sau (în virtutea egalității $ah = bk$) $V:V' = h:k = b:a$.

Așadar, volumele considerate sînt invers proporționale cu laturile în jurul cărora se produce rotația.

714. Fie $A_1A_2A_3$ triunghiul căutat; $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$ și $A_1A_2 = a_3$ laturile sale; h_1, h_2 și h_3 înălțimile corespunzătoare; r_1, r_2 și r_3 razele date ale celor trei sfere despre care este vorba în enunț.

În virtutea celor de la nr. **470** 1°, volumul unui corp generat prin rotația triunghiului $A_1A_2A_3$ în jurul laturii A_2A_3 va fi egal cu $\frac{1}{3}\pi a_1h_1^2$, astfel că trebuie să avem $\frac{1}{3}\pi a_1h_1^2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. Așadar, ajungem la sistemul de ecuații

$$a_1h_1^2 = 4r_1^3;\ a_2h_2^2 = 4r_2^3;\ a_3h_3^2 = 4r_3^3 \qquad (1)$$

La aceste ecuații, mai trebuie adăugate cele care dau expresia înălțimilor triunghiului $A_1A_2A_3$ în funcție de laturi. Aceste din urmă ecuații se pot scrie

$$a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3 = 2S(a_1, a_2, a_3), \qquad (2)$$

unde am notat cu $S(u,v,w)$ aria triunghiului de laturi u, v, w, adică expresia

$$S(u, v, w) = \frac{1}{4}\sqrt{(u+v+w)\,(v+w-u)\,(w+u-v)\,(u+v-w)}. \qquad (3)$$

Problema se reduce, așadar, la determinarea necunoscutelor a_1, a_2 și a_3 din sistemul de ecuații (1) și (2). Aceasta se poate realiza în modul următor.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile (1), ținînd seama de egalitățile $a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3$, găsim ușor

$$h_1 : h_2 : h_3 = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3;$$

$$a_1 : a_2 : a_3 = (1 : r_1^3) : (1 : r_2^3) : (1 : r_3^3).$$

De aceea, putem pune

$$h_1 = r_1^3 : m^2;\ h_2 = r_2^3 : m^2;\ h_3 = r_3^3 : m^2$$

și

$$a_1 = n^4 : r_1^3;\ a_2 = n^4 : r_2^3;\ a_3 = n^4 : r_3^3,$$

unde m și n sînt segmente necunoscute. Pentru aceste valori ale lui h_1, h_2, h_3 și a_1, a_2, a_3, ecuațiile (1) se reduc la o singură ecuație $n^4 = 4m^4$, de unde

$$h_1 = r_1^3 : m^2;\ \ldots;a_1 = 4m^4 : r_1^3;\ldots \qquad (4)$$

Mai trebuie să fie satisfăcute doar ecuațiile (2). Substituind valorile (4) în ecuațiile (2), obținem o singură ecuație:

$$2m^2 = S\left(\frac{4m^4}{r_1^3},\ \frac{4m^4}{r_2^3},\ \frac{4m^4}{r_3^3}\right).$$

Folosind egalitatea (3), ne convingem ușor că

$$S\left(\frac{4m^4}{r_1^3},\ \frac{4m^4}{r_2^3},\ \frac{4m^4}{r_2^3}\right) = 16m^8 \cdot S\left(\frac{1}{r_1^3},\ \frac{1}{r_2^3},\ \frac{1}{r_3^3}\right),$$

astfel că egalitatea precedentă devine

$$8m^6 \cdot S\left(\frac{1}{r_1^3},\ \frac{1}{r_2^3},\ \frac{1}{r_3^3}\right) = 1.$$

Determinînd, din această ecuație, valoarea lui m^2 și substituind-o în expresiile (4), găsim laturile a_1, a_2 și a_3 ale triunghiului căutat, dacă problema are soluție.

715. Fie O centrul și R raza sferei date, H centrul cercului căutat, M unul dintre punctele sale, P vîrful conului circumscris, tangent la sferă după cercul căutat (fig. 203).

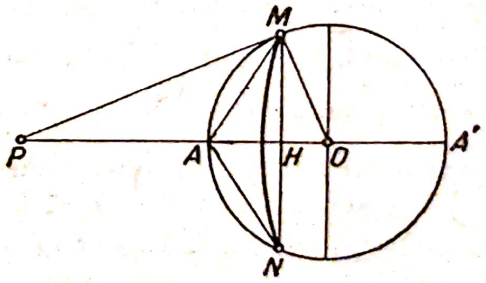


Fig. 203

Dacă vom pune $OH = x$, atunci aria secțiunii va fi egală cu $\pi(R^2 - x^2)$, diferența dintre ariile celor două segmente va fi $2\pi R(R + x) - 2\pi R(R - x) = 4\pi Rx$. De aici obținem ecuația

$$R^2 - x^2 = 4Rx, \qquad (1)$$

din rezolvarea căreia căpătăm o valoare pozitivă $x = R(\sqrt{5} - 2)$. Mai departe, $HM^2 = R^2 - x^2 = 4Rx = 4R^2(\sqrt{5} - 2)$. Din triunghiul dreptunghic OMP, găsim pentru înălțimea PH a conului circumscris valoarea $PH = HM^2 : OH =$

$= (R^2 - x^2) : x = 4R$, în virtutea ecuației (1). Așadar, înălțimea conului circumscris este egală cu dublul diametrului sferei.

716. Fie H centrul bazei calotei sferice căutate, M unul dintre punctele cercului de bază, HA înălțimea calotei și A' punctul de pe sferă, diametral opus lui A (fig. 203).

Aria calotei căutate este $\pi \cdot AA' \cdot HA$, aria cercului care îi servește ca bază este $\pi \cdot HM^2 = \pi \cdot HA \cdot HA'$. Raportul dintre aria calotei și aria cercului este, de aceea, AA'/HA'. Cunoscînd acest raport, putem construi pe diametrul AA' punctul H, deci și calota sferică căutată.

717. Fie R raza sferei date, h înălțimea segmentului sferic căutat, r raza bazei sale, V și V' volumele respective ale segmentului și ale sectorului sferic căutate, despre care este vorba în enunț.

Avem (**474**) $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$. Înlocuind aici pe r^2 prin valoarea sa $r^2 = h(2R - h)$, obținem $V = \pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$. Pentru volumul sectorului, vom avea $V' = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Să presupunem acum că planul bazei segmentului trebuie astfel ales, încît să avem $V = \lambda V'$, unde λ este un număr dat ($\lambda > 0$). Substituind aici pentru V și V' expresiile de mai sus și simplificînd factorul πh (soluția $h = 0$ nu prezintă interes), obținem ecuația de gradul al doilea $h^2 - 3Rh + 2\lambda R^2 = 0$, de unde

$$h = \frac{1}{2} R \left(3 \pm \sqrt{9 - 8\lambda}\right).$$

Pentru ca valorile obținute pentru h să fie reale, valorile lui λ trebuie să satisfacă condiția $\lambda \leqslant \frac{9}{8}$. În afară de aceasta, valoarea lui h trebuie, conform sensului problemei, să mai satisfacă și condiția $0 < h < 2R$. De aici se vede că valoarea mai mică a lui h, anume $\frac{1}{2} R \left(3 - \sqrt{9 - 8\lambda}\right)$, va satisface condițiile problemei pentru *toate* valorile lui λ care nu depășesc pe $9/8$. În schimb, valoarea mai mare a lui h, anume $\frac{1}{2} R \left(3 + \sqrt{9 - 8\lambda}\right)$, va avea sens numai pentru $\sqrt{9 - 8\lambda} < 1$, adică pentru $\lambda > 1$.

Așadar, pentru $0 < \lambda \leqslant 1$, problema are o soluție: obținem un segment sferic care nu depășește emisfera; pentru $1 < \lambda < \frac{9}{8}$, problema are două soluții, anume ambele segmente sferice obținute sînt mai mari decît emisfera; pentru $\lambda = 9/8$, obținem iarăși o singură soluție, în sfîrșit pentru $\lambda > 9/8$, problema nu are soluții.

718. În aceleași notații ca la soluția exercițiului 716 (fig. 203) volumul conului despre care este vorba va fi egal cu $\frac{1}{3}\pi \cdot HM^2 \cdot HA$, iar volumul segmentului (compară cu nr. **474**) va fi $\frac{1}{2}\pi \cdot HM^2 \cdot HA + \frac{1}{6}\pi \cdot HA^3$. Dacă raportul

dat al volumelor se notează cu λ, vom avea ecuația $\frac{1}{3} HM^2 \cdot HA = \lambda \left(\frac{1}{2} HM^2 \cdot HA + \frac{1}{6} HA^3 \right)$. Substituind aici $HA \cdot HA'$ pentru HM^2 și simplificînd cu HA^2 (soluția $HA = 0$ nu prezintă interes), căpătăm $\frac{1}{3} HA' = \lambda \left(\frac{1}{2} HA' + \frac{1}{6} HA \right)$, de unde

$$\frac{HA}{HA'} = \frac{2 - 3\lambda}{\lambda}.$$

Cunoscînd valoarea lui λ, putem determina poziția punctului H pe diametrul AA', deci și cercul căutat. Pentru ca problema să aibă soluție, trebuie satisfăcută condiția $\lambda < \frac{2}{3}$.

Din ultima ecuație, găsim

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HA}{HA'} + \frac{3}{2}.$$

De aici se vede că, dacă HA tinde către zero, λ are ca limită numărul 2/3.

719. Fie R raza sferei date, r raza sferei echivalente cu segmentul căutat, r_1 raza cercului echivalent cu aria zonei care mărginește segmentul căutat, h înălțimea segmentului căutat, x distanța de la centrul sferei date pînă la mijlocul înălțimii segmentului.

Egalînd aria zonei cu aria cercului dat, căpătăm ecuația $2\pi Rh = \pi r_1^2$, de unde $h = r_1^2 : 2R$. Așadar, înălțimea h poate fi construită. În cele ce urmează, o vom considera cunoscută.

Distanțele de la centrul sferei la planele celor două baze ale segmentului căutat sînt $x + \frac{h}{2}$ și $\left| x - \frac{h}{2} \right|$. Egalînd volumul segmentului cu volumul sferei de rază r, căpătăm ecuația

$$\frac{1}{2}\pi h \left[R^2 - \left(x + \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}\pi h \left[R^2 - \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{6}\pi h^3 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

de unde

$$x^2 = R^2 - \frac{1}{12} h^2 - \frac{4r^3}{3h}.$$

Această egalitate determină distanța x și ne permite să construim segmentul sferic căutat. Problema are soluție pentru $R^2 - \frac{1}{12} h^2 - \frac{4r^3}{3h} \geqslant 0$. Volumul maxim al segmentului sferic căutat se va obține pentru valoarea maximă a lui r, adică pentru $R^2 - \frac{1}{12} h^2 - \frac{4r^3}{3h} = 0$. În acest caz, $x = 0$, și înălțimea segmentului căutat este împărțită în părți egale în centrul sferei. În aceste condiții, segmentul va avea volumul maxim (în virtutea egalității precedente) egal cu $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{12} \right)$.

720. Să ducem prin punctul de contact A un plan perpendicular pe planele celor două cercuri date, tangente în punctul A. Planul va trece prin punctele de contact B și C, precum și prin centrul O al sferei, și va intersecta primele două cercuri, egale între ele, în punctele lor diametral opuse A, B și A, C (fig. 204 și 205), iar al treilea cerc în punctele sale diametral opuse B și C.

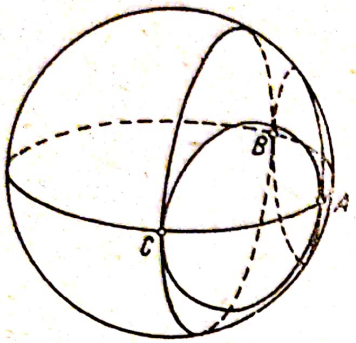


Fig. 204

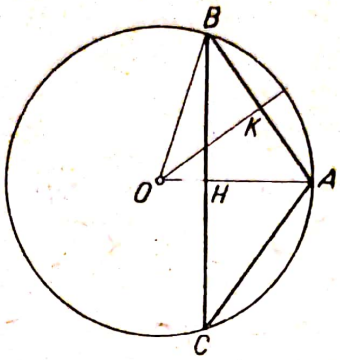


Fig. 205

Fie H centrul ultimului dintre cele trei cercuri, K centrul unuia dintre primele două, $x = AH$ înălțimea celei mai mari dintre calotele considerate. Condițiile problemei cer ca aria fiecăreia dintre cele două calote mai mici să fie de patru ori mai mică, deci înălțimea fiecăreia dintre ele trebuie să fie $x/4$. Asemănarea triunghiurilor dreptunghice ABH și AOK ne dă $BH : AB = OK : AO$ sau, dacă notăm cu R raza sferei date,

$$\sqrt{x(2R - x)} : \sqrt{2Rx} = \left(R - \frac{x}{4}\right) : R.$$

Această ecuație nu are soluții diferite de zero. De aici rezultă că problema noastră nu are soluții (bineînțeles, cazul $x = 0$, cînd fiecare dintre cele trei cercuri se reduce la un punct, nu poate fi considerat o soluție).

721. Fie t și t' proiecțiile punctelor T și T' pe linia centrelor (fig. 206), T_0 intersecția tangentei comune la cele două cercuri în punctul lor de contact A cu tangenta comună TT', t_0 proiecția punctului A pe dreapta TT'.

Volumul inelului sferic despre care este vorba va fi (**473**)

$$V = \frac{1}{6}\pi \cdot TT'^2 \cdot tt'. \qquad (1)$$

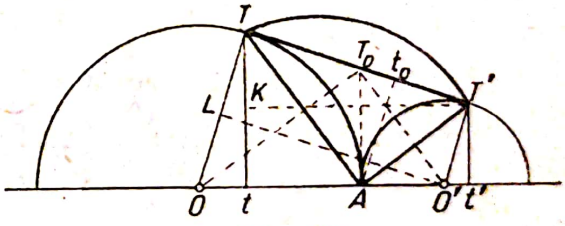


Fig. 206

Mai departe, volumul V_1 al corpului format prin rotația triunghiului ATT' în jurul liniei centrelor va fi (**470**, și **445**, Cor. 1)

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot At_0 \cdot TT' \cdot (tT + t'T').$$

Însă în virtutea egalității celor două perechi de triunghiuri dreptunghice AtT, At_0T și $At'T'$, At_0T', avem $At = At' = At_0 = \frac{1}{2}\,tt'$; $tT + t'T' = Tt_0 + t_0T' = TT'$, astfel că

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi \cdot tt' \cdot TT'^2. \qquad (2)$$

Volumele ultimelor două inele sferice, despre care este vorba în enunț, sînt respectiv egale cu (473) $V' = \frac{1}{6}\pi \cdot AT^2 \cdot At$ și cu $V'' = \frac{1}{6}\pi \cdot AT'^2 \cdot At'$, de unde $\left(\text{în virtutea egalităților } At = At' = \frac{1}{2}tt'\right)$, avem

$$V' + V'' = \frac{1}{12}\pi \cdot tt' \cdot (AT^2 + AT'^2).$$

Însă dreptele AT și AT' sînt perpendiculare, ca bisectoare ale unghiurilor suplementare tAt_0 și t_0At', astfel că $AT^2 + AT'^2 = TT'^2$. Prin urmare,

$$V' + V'' = \frac{1}{12}\pi \cdot TT'^2 \cdot tt'. \tag{3}$$

În sfîrșit, volumul părții din trunchiul de con, exterioară sferelor S și S', va fi, în virtutea relațiilor (2) și (3),

$$V_1 - (V' + V'') = \frac{1}{12}\pi \cdot TT'^2 \cdot tt'. \tag{4}$$

Din compararea egalităților (1) și (4), precum și (3) cu (4) rezultă ambele afirmații de demonstrat.

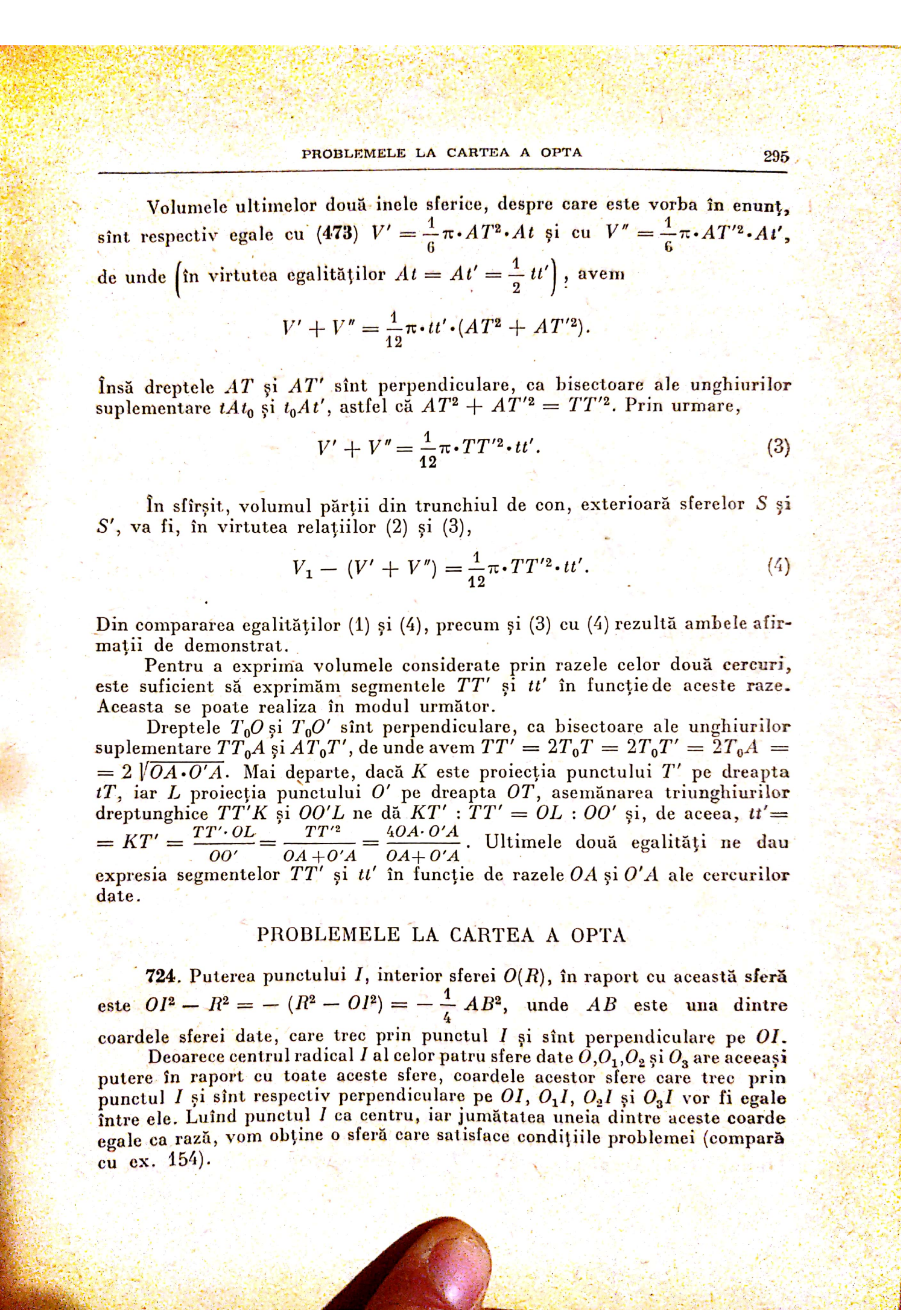
Pentru a exprima volumele considerate prin razele celor două cercuri, este suficient să exprimăm segmentele TT' și tt' în funcție de aceste raze. Aceasta se poate realiza în modul următor.

Dreptele T_0O și T_0O' sînt perpendiculare, ca bisectoare ale unghiurilor suplementare TT_0A și AT_0T', de unde avem $TT' = 2T_0T = 2T_0T' = 2T_0A = 2\sqrt{OA \cdot O'A}$. Mai departe, dacă K este proiecția punctului T' pe dreapta tT, iar L proiecția punctului O' pe dreapta OT, asemănarea triunghiurilor dreptunghice $TT'K$ și $OO'L$ ne dă $KT' : TT' = OL : OO'$ și, de aceea, $tt' = KT' = \frac{TT' \cdot OL}{OO'} = \frac{TT'^2}{OA + O'A} = \frac{4OA \cdot O'A}{OA + O'A}$. Ultimele două egalități ne dau expresia segmentelor TT' și tt' în funcție de razele OA și $O'A$ ale cercurilor date.

PROBLEMELE LA CARTEA A OPTA

724. Puterea punctului I, interior sferei $O(R)$, în raport cu această sferă este $OI^2 - R^2 = -(R^2 - OI^2) = -\frac{1}{4}AB^2$, unde AB este una dintre coardele sferei date, care trec prin punctul I și sînt perpendiculare pe OI.

Deoarece centrul radical I al celor patru sfere date O, O_1, O_2 și O_3 are aceeași putere în raport cu toate aceste sfere, coardele acestor sfere care trec prin punctul I și sînt respectiv perpendiculare pe OI, O_1I, O_2I și O_3I vor fi egale între ele. Luînd punctul I ca centru, iar jumătatea uneia dintre aceste coarde egale ca rază, vom obține o sferă care satisface condițiile problemei (compară cu ex. 154).



725. Fie date două drepte concurente OA și OB și un punct M, situat în planul acestor drepte (fig. 207).

Locul geometric al axelor conurilor de rotație care trec prin dreptele OA și OB este o pereche de plane perpendiculare pe planul AOB și care trec respectiv prin bisectoarele OX și OY ale unghiurilor formate de dreptele date (compară cu soluția ex. 645). Punctul dat M va fi, evident, exterior acelora dintre conurile considerate ale căror axe sînt situate în unul dintre aceste două plane (în fig. 207, acesta va fi planul care trece prin OX); acest punct va fi interior celorlalte conuri.

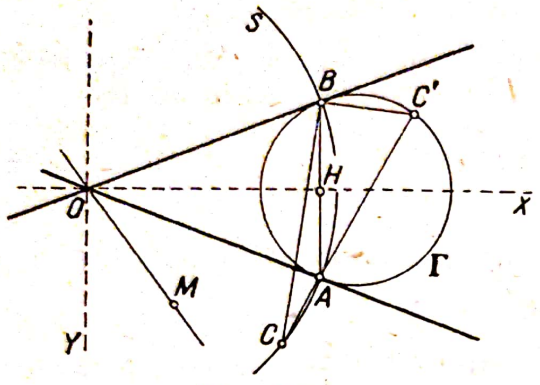


Fig. 207

Să înscriem acum, în fiecare dintre conurile considerate în raport cu care punctul M este exterior, o sferă (**451**) tangentă la generatoarea OA într-un anumit punct A. Toate aceste sfere vor intersecta planul AOB după un același cerc avînd centrul pe dreapta OX, tangent în punctul A la dreapta OA. Dat fiind că planele tangente la toate aceste sfere, care trec prin dreapta OM, sînt tangente la ele în punctele aceluiași cerc, avînd ca axă dreapta OM (compară cu soluția ex. 680), *locul geometric căutat al generatoarelor în lungul cărora are loc tangența, va fi un con de rotație*. Vîrful acestui con va fi punctul O, iar axa lui, dreapta OM; directoarea va fi cercul menționat mai sus. Într-un caz particular, acest con poate degenera într-un plan sau într-o porțiune de plan (dacă punctul O se află în planul cercului).

Să presupunem acum că, prin punctele A și B ale sferei S de centru O (fig. 207), au fost descrise diferite cercuri mici, iar dintr-un punct C al cercului mare AB au fost duse cercurile mari tangente la ele. Unind toate punctele cercurilor mici considerate și toate punctele cercurilor mari tangente la ele cu centrul O al sferei S, obținem familia de conuri considerată mai sus, care trec prin dreptele OA și OB, și planele tangente la aceste conuri, care trec prin punctul C al planului AOB. Deoarece locul geometric al generatoarelor în lungul cărora are loc contactul este un con de rotație de axă OC sau, într-un caz particular, un plan, *locul geometric al punctelor T în care cercurile mari trecînd prin punctul C sînt tangente la cercurile mici trecînd prin punctele A și B este un cerc mic sau, într-un caz particular, un cerc mare, avînd polul în punctul C.*

Pentru a obține expresia care dă segmentul CT, vom înscrie, în fiecare dintre conurile construite, cîte o sferă tangentă la con în lungul cercului mic după care conul intersectează sfera dată S. Toate aceste sfere înscrise vor intersecta planul AOB după același cerc Γ, tangent la dreptele OA și OB, respectiv în punctele A și B, și care, de aceea, va intersecta sfera S sub un unghi drept. Dreapta CT, situată în planul tangent COT la con, este tangentă la aceasta în punctul T. Prin urmare, ea este tangentă în punctul T și la sfera înscrisă în con. De aici rezultă că CT^2 este puterea punctului C în raport cu

sfera considerată, adică în raport cu cercul Γ. Dacă dreapta CA intersectează a doua oară cercul Γ într-un punct C', vom avea

$$CT^2 = CA \cdot CC'. \tag{1}$$

Pentru transformarea acestei expresii, vom folosi următoarea propoziție:

Dacă o secantă, care trece printr-un punct de intersecție A a două cercuri, le taie a doua oară în punctele C și C', atunci segmentul CC' se vede din al doilea punct de intersecție al cercurilor date sub un unghi egal cu unul dintre unghiurile formate de cele două cercuri date (compară cu soluția ex. 69). În virtutea acestei propoziții, unghiul CBC' este drept. Dacă vom coborî acum din punctul O perpendiculara $OH = d$ pe coarda AB, triunghiurile dreptunghice OAH și $CC'B$ vor fi asemenea ($\widehat{AOH} = \widehat{C'CB}$), de unde

$$CC' \cdot OH = OA \cdot CB. \tag{2}$$

Eliminînd din egalitățile (1) și (2) segmentul CC' și substituind lui OA și lui OH respectiv R și d, obținem expresia căutată pentru CT^2.

726. Fie HH' perpendiculara comună celor două drepte perpendiculare HX și $H'X'$, nesituate în același plan (fig. 208), M și M' punctele lor de intersecție cu unul dintre planele considerate, paralele cu un plan dat P, iar O mijlocul segmentului MM', adică centrul sferei corespunzătoare.

În virtutea rezultatelor obținute în soluția exercițiului 432 *bis*, locul geometric al punctelor O este o dreaptă YZ situată într-un plan paralel cu fiecare dintre dreptele date și care trece prin mijlocul segmentului HH'. Mai departe, toate sferele considerate trec prin punctele H și H', deoarece unghiurile MHM' și $MH'M'$ sînt drepte. Să ducem acum, prin dreapta HH', un plan perpendicular pe dreapta YZ. *Toate sferele considerate vor intersecta acest plan*

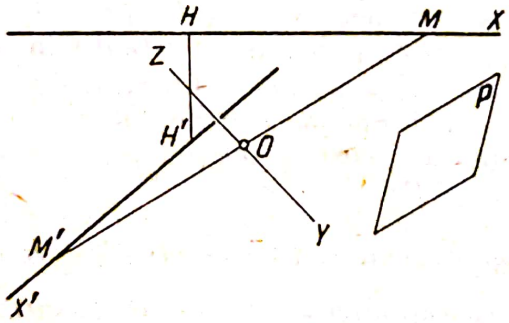


Fig. 208

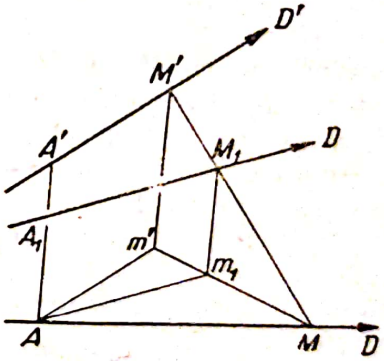


Fig. 209

după un același cerc, care trece prin punctele H și H' și are ca centru punctul de intersecție al planului cu dreapta YZ.

727. Fie stabilit, pe fiecare dintre dreptele date, un sens determinat, pe care-l vom numi pozitiv.

Vom obține o familie de sfere despre care este vorba, luînd segmentele AM și $A'M'$, care satisfac condiția $A'M' : AM = k$, ambele în sens pozitiv (fig. 209) sau ambele în sens negativ. Vom obține o a doua familie, luînd unul

dintre segmente în sens pozitiv, iar pe celălalt în sensul negativ. Deoarece a doua familie de sfere se poate obține pe aceeași cale ca și prima, schimbînd sensul pozitiv pe una dintre dreptele date în cel opus, va fi suficient să ne ocupăm numai de prima familie. Ca atare, nu vom mai menționa, în cele ce urmează, că ambele segmente sînt purtate în sens pozitiv sau ambele în sens negativ.

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că *dreptele D și D' nu sînt situate în același plan.*

Dacă segmentele AM și $A'M'$ satisfac condiția $A'M' : AM = k$, atunci toate dreptele MM' pe care le obținem și dreapta AA' sînt paralele cu un același plan (ex. 431). Mai departe, sfera care este locul geometric al punctelor P, pentru care avem $PM' : PM = k$, va intersecta dreapta MM' în două puncte diametral opuse M_1 și M_2, care împart segmentul MM', respectiv interior și exterior, în raportul $M_1M' : M_1M = M_2M' : M_2M = k$ (în fig. 209, este reprezentat numai punctul M_1). În baza rezultatelor din soluția exercițiului 432 *bis*, rezultă de aici că locul geometric al punctelor M_1 (al punctelor M_2), care împart segmentul MM' interior (respectiv, exterior) în raportul dat, este o dreaptă D_1 (respectiv o dreaptă D_2). Dreapta D_1 (dreapta D_2) este situată într-un plan paralel cu dreptele D și D' și împarte interior segmentul $A'A$, în punctul A_1, în raportul $A_1A' : A_1A = k$ (respectiv, exterior, în punctul A_2, în raportul $A_2A' : A_2A = k$). Să ducem prin dreapta D un plan paralel cu dreapta D', deci și cu dreptele D_1 și D_2 și să notăm cu m', m_1 și m_2 punctele de intersecție ale acestui plan cu dreptele paralele cu dreapta AA' și care trec respectiv prin punctele M', M_1 și M_2. Vom avea $m_1m' : m_1M = M_1M' : M_1M = k = A'M' : AM = Am' : AM$. De aici rezultă că dreapta Am_1, paralelă cu dreapta D_1, este bisectoare în triunghiul AMm'. În același mod vom demonstra că dreapta D_2 este paralelă cu bisectoarea Am_2 a unghiului exterior cu vîrful în A din același triunghi. De aceea, dreptele D_1 și D_2 sînt perpendiculare.

Așadar, extremitățile M_1 și M_2 ale segmentelor M_1M_2, paralele cu un același plan, se dispun pe două drepte perpendiculare nesituate în același plan. Prin urmare, *toate sferele din prima familie trec printr-un cerc* C_1 (ex. 726). Locul geometric al centrelor O ale sferelor din prima familie, adică al mijloacelor segmentelor M_1M_2, va fi o dreaptă D_0, situată într-un plan paralel cu dreptele D_1 și D_2, deci și cu dreptele D și D'.

Raționamentele de mai sus necesită modificări, *dacă dreptele D și D' sînt situate în același plan.*

Să luăm, pe dreptele D și D', două segmente arbitrare AM_0 și $A'M_0'$, care satisfac condiția $A'M_0' : AM_0 = k$. Evident, segmentele AM_0 și $A'M_0'$ pot fi considerate ca segmente omoloage a două figuri asemenea în plan, care au *același sens de rotație*. Aceste două figuri vor avea (**150**) un punct dublu U, care satisface condițiile $UA' : UA = UM_0' : UM_0 = A'M_0' : AM_0 = k$. Considerînd aceleași segmente AM_0 și $A'M_0'$ ca segmente omoloage în două figuri asemenea din plan, avînd *sensul de rotație opus*, vom obține punctul lor dublu V (punctul S din soluția ex. 161)[1]. În aceste condiții, vom avea două perechi de triunghiuri asemenea, anume triunghiurile UAM_0, $UA'M_0'$ și triunghiurile VAM_0, $VA'M_0'$.

[1]) Nu insistăm asupra cazului particular cînd punctul V coincide cu U; în acest caz, toate sferele din prima familie sînt tangente între ele în punctul U.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom purta acum pe dreptele D și D' două segmente arbitrare AM și $A'M'$, satisfăcînd condiția $A'M' : AM = k$, vom obține încă două perechi de triunghiuri asemenea, anume triunghiurile UAM, $UA'M'$ și triunghiurile VAM, $V'A'M'$. Din asemănarea acestor triunghiuri, vom avea $UM' : UM = UA' : UA = k$ și $VM' : VM = VA' : VA = k$. Prin urmare, punctele U și V aparțin ambelor locului geometric al punctelor P pentru care $PM' : PM = k$. De aceea, toate sferele din prima familie vor trece prin punctele U și V, și deoarece centrele acestor sfere se află în planul dreptelor D și D', *toate sferele din prima familie trec prin cercul* C_1, *avînd ca diametru segmentul* UV. Centrele sferelor din prima familie se situează pe aceeași dreaptă D_0.

Raționamentele noastre ulterioare vor fi valabile în egală măsură, și pentru cazul cînd dreptele D și D' nu sînt situate în același plan, și pentru cazul cînd dreptele D și D' se află în același plan.

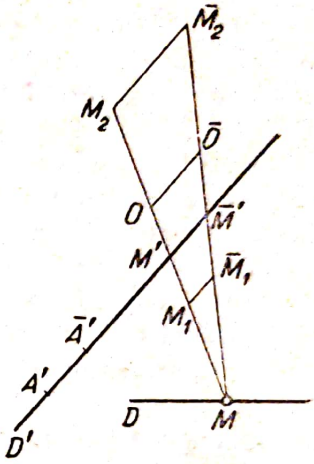


Fig. 210

Să presupunem acum, pentru a fixa ideile, că am ales astfel notațiile dreptelor D și D', încît raportul k să fie subunitar (raportul k își schimbă valoarea în cea inversă, dacă dreptele D și D' își schimbă rolurile). În acest caz, punctul M_2 va fi situat pe prelungirea dincolo de punctul M' a segmentului MM' (fig. 210). Lăsînd fix punctul A de pe dreapta D, să înlocuim punctul A' din raționamentele anterioare printr-un alt punct $\bar{A}'$, de pe aceeași dreaptă D'. Dacă punctul M rămîne pe loc, atunci punctul M' va fi înlocuit prin punctul $\bar{M}'$ al dreptei D', pentru care (potrivit relației $A'M' = \bar{A}'\bar{M}'$) segmentele $A'\bar{A}'$ și $M'\bar{M}'$ vor fi egale și de același sens. Punctele M_1 și M_2 vor fi înlocuite, în aceste condiții, prin noi puncte $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$, care împart segmentul $M\bar{M}'$, interior și exterior, într-un raport dat. În virtutea asemănării triunghiurilor $MM'\bar{M}'$, $MM_1\bar{M}_1$ și $MM_2\bar{M}_2$, segmentele $M_1\bar{M}_1$ și $M_2\bar{M}_2$ vor fi ambele paralele cu segmentul $M'\bar{M}'$, adică cu segmentul $A'\bar{A}'$, orientate în același sens cu el și respectiv egale cu

$$M_1\bar{M}_1 = \frac{1}{k+1} \cdot M'\bar{M}' = \frac{1}{k+1} \cdot A'\bar{A}'; \quad M_2\bar{M}_2 = \frac{1}{1-k} \cdot A'\bar{A}'.$$

Centrul O al sferei va fi înlocuit atunci prin centrul $\bar{O}$ al unei noi sfere, care va fi mijlocul segmentului $\bar{M}_1\bar{M}_2$. În aceste condiții, segmentul $O\bar{O}$ va fi iarăși paralel cu segmentul $M'\bar{M}'$, orientat în același sens cu el și egal cu

$$O\bar{O} = \frac{1}{2}(M_1\bar{M}_1 + M_2\bar{M}_2) = \frac{1}{1-k^2} \cdot A'\bar{A}'.$$

Deoarece locul geometric al punctelor O este dreapta D_0, locul geometric al punctelor $\bar{O}$ va fi atunci dreapta $\bar{D}_0$, care se obține din D_0 printr-o translație, a cărei mărime și al cărei sens sînt date de segmentul $\frac{1}{1-k^2} \cdot A'\bar{A}'$.

Dreapta $\bar{D}_0$ va fi, în aceste condiții, paralelă cu D_0. De aici rezultă că *direcția planului în care este situat cercul* C_1, *nu depinde* (pentru k dat) *de alegerea punctului* A' *pe dreapta* D', deoarece acest plan este perpendicular pe

dreapta D_0. În același mod demonstrăm că direcția acestui plan nu depinde nici de alegerea punctului A pe dreapta D.

După cum am menționat mai sus, dreapta D_0 este situată într-un plan paralel cu dreptele D și D', și, de aceea, ea este perpendiculară pe perpendiculara comună dreptelor D și D'. Prin urmare, planul cercului C_1 va fi paralel, pentru orice k, cu perpendiculara comună dreptelor D și D'.

Fie acum P un punct arbitrar al cercului C_1. Dacă vom lua pe dreptele D și D', așa cum s-a indicat mai sus, două perechi de segmente AM și $A'M'$, AN și $A'N'$, care satisfac condiția $A'M' : AM = A'N' : AN = k$, atunci punctul P, ca punct comun al sferelor din prima familie, va satisface condiția $PM' : PM = PN' : PN = k$. Triunghiurile PMN și $P'M'N'$ vor fi asemenea (în virtutea proporționalității laturilor). Prin urmare, înălțimile PH și PH' ale acestor triunghiuri, adică distanțele punctului P la dreptele D și D' satisfac condiția $PH' : PH = k$. Așadar, *raportul dintre distanțele oricărui punct al cercului C_1 la cele două drepte date este egal cu k.*

Reciproc, fie P un punct arbitrar din spațiu, având raportul dintre distanțele sale la cele două drepte date egal cu k. Să luăm ca puncte A și A' picioarele perpendicularelor coborîte din punctul P pe dreptele D și D' și să purtăm pe acestea, cum s-a indicat mai sus, două segmente arbitrare AM și $A'M'$, care satisfac condiția $A'M' : AM = k$. Triunghiurile dreptunghice PAM și $PA'M'$ vor fi asemenea (în virtutea proporționalității catetelor), de unde $PM' : PM = PA' : PA = k$. De aici se vede că punctul nostru P este unul dintre punctele cercului C_1, corespunzător punctelor A și A', alese cum s-a arătat mai sus. Prin urmare, *prin orice punct din spațiu având raportul distanțelor la două drepte date egal cu k, trece unul dintre cercurile C_1.*

728. Fie date două sfere S_1 și S_2 și un punct P. Să notăm cu A un punct *arbitrar* al sferei S_1 și cu B un punct din spațiu, astfel ca segmentul AB să fie împărțit de punctul P (interior sau exterior) în raportul $m : n$, unde m și n sînt două segmente date. Locul geometric al punctelor B este sfera S', care se obține din sfera S_1 prin omotetia (respectiv inversă sau directă), având punctul P ca centru de asemănare și raportul de omotetie egal cu $n : m$. Dacă punctul B este situat, în afară de aceasta, pe sfera S_2, atunci el se află pe intersecția sferelor S' și S_2. Așadar, locul geometric al dreptelor PB există și este, în general, un con circular, dacă sferele S' și S_2 sînt secante.

Acest con degenerează însă într-un plan (sau într-o porțiune de plan), dacă punctul P este situat în același plan cu intersecția sferelor S' și S_2, adică dacă el se află în planul radical al acestor sfere. Notînd cu p_1, p_2 și p' puterile punctului P în raport cu sferele S_1, S_2 și S', vom avea $p' = p_2$. Mai departe, deoarece punctul P este centrul de asemănare al sferelor S_1 și S', iar raportul de asemănare al sferei S' față de sfera S_1 este egal cu $n : m$, rezultă că $p_1 : p' = m^2 : n^2$. De aici rezultă că $p_1 : p_2 = m^2 : n^2$. Locul geometric al punctelor P pentru care conul de rotație se reduce la un plan (dacă aceste puncte există) este o sferă (ex. 669).

729. Dacă, în condițiile de la exercițiul 462, dreptele D și D' sînt concurente, atunci muchiile diedrelor drepte ale căror fețe trec respectiv prin dreptele D și D' vor trece prin punctul de intersecție al acestor drepte și vor forma, deci, un con. Din soluția exercițiului 462, rezultă că acest con intersectează după un cerc planul perpendicular pe dreapta D și, de aceea, el va fi un con circular.

Scanned with OKEN Scanner

730. Fie date două drepte D și D', concurente în punctul S, și se cere să se afle locul geometric al punctelor P ale căror distanțe PA și PA' la dreptele D și D' satisfac condiția

$$PA' : PA = k, \tag{1}$$

unde k este o constantă dată.

În virtutea rezultatelor de la exercițiul 727, prin fiecare punct P din spațiul, care satisface condiția (1), trece un cerc C_1, ale cărui puncte satisfac toate aceeași condiție; toate aceste cercuri C_1 se situează în plane paralele, iar centrele lor sînt situate în planul dreptelor D și D'. Pe de altă parte, dacă un punct P satisface condiția (1), atunci și toate punctele dreptei SP satisfac această condiție. De aici rezultă *că locul geometric căutat este un con cu baza circulară*, avînd ca vîrf punctul S, *sau un ansamblu de mai multe conuri de acest fel*. În acest din urmă caz, *fiecare* dintre aceste conuri intersectează planul dreptelor D și D' după două generatoare, dat fiind că centrele tuturor cercurilor C_1 sînt situate în planul dreptelor D și D'.

Însă locul geometric al punctelor P care satisfac condiția (1) și care sînt situate în planul dreptelor D și D' este format din *două* drepte care trec prin punctul S (**157**). Prin urmare, locul geometric căutat al punctelor P din spațiu este *un singur* con cu baza circulară.

Acest con va fi oblic deoarece, prin fiecare punct al său, trece (ex. 727), în afară de cercul C_1 pe care l-am folosit și un al doilea cerc C_2 care aparține locului geometric considerat, adică aceluiași con (v. mai departe nr. **678**).

731. Fie de aflat locul geometric al bisectoarelor unghiurilor ASB, avînd ca una dintre laturi o dreaptă SA dată, iar a doua latură SB, situată într-un plan P dat (fig. 211).

Să alegem pe dreapta SA un punct arbitrar A și să ducem prin el un plan Q, paralel cu planul P. Să notăm cu C intersecția bisectoarei unghiului ASB

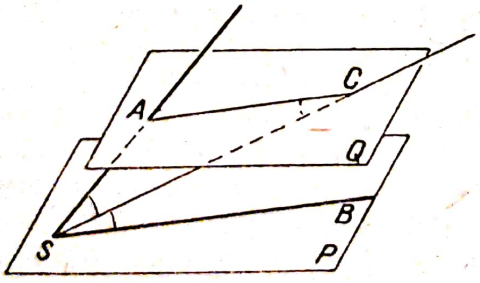


Fig. 211

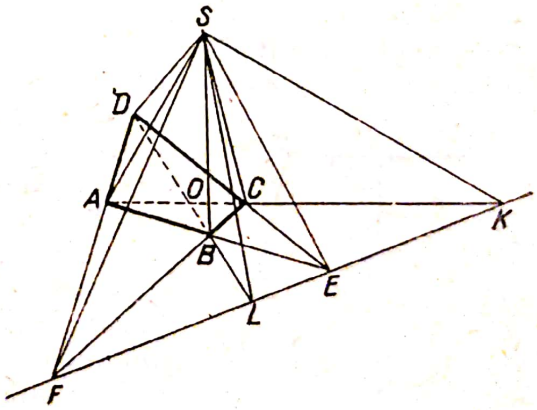


Fig. 212

cu planul Q. Dat fiind că dreptele AC și SB sînt paralele, unghiurile ACS și CSB sînt egale; deoarece unghiurile ASC și CSB sînt de asemenea egale, vor fi egale și unghiurile ACS și ASC, astfel că $SA = AC$. De aici rezultă că locul geometric al dreptelor SC este un con avînd ca directoare un cerc cu centrul în punctul A și cu raza egală cu segmentul SA.

732. Fie $ABCD$ un patrulater plan dat (fig. 212), O punctul de intersecție al diagonalelor sale, E și F punctele de intersecție a două perechi de laturi

opuse, K și L punctele de intersecție ale diagonalelor AC și BD cu dreapta EF (presupunem că toate cele patru puncte E, F, K și L există).

Să considerăm unghiul poliedru cu patru fețe $SABCD$, avînd vîrful într-un punct S și ale cărui fețe trec prin laturile patrulaterului dat. Planul care intersectează acest unghi poliedru cu patru fețe după un paralelogram trebuie să fie paralel (v. soluția ex. 500) cu intersecțiile fețelor opuse, adică cu dreptele SE și SF. Totodată, laturile secțiunii vor fi paralele cu dreptele SE și SF, iar diagonalele sale, cu dreptele SK și SL.

Pentru ca paralelogramul obținut în secțiune să fie un dreptunghi, unghiul ESF trebuie să fie drept; locul geometric corespunzător al punctelor S este o sferă avînd ca diametru segmentul EF. Pentru ca paralelogramul obținut în secțiune să fie romb, unghiul KSL trebuie să fie drept. Locul geometric corespunzător al punctelor S este o sferă avînd ca diametru segmentul KL.

Dacă unghiul poliedru cu patru fețe poate fi secționat după un pătrat, atunci punctul S trebuie să fie situat simultan pe ambele sfere menționate. Locul geometric corespunzător al punctelor S este cercul după care se intersectează cele două sfere (aceste sfere sînt evident secante, deoarece unul dintre punctele K și L este situat pe segmentul EF, iar celălalt pe prelungirea lui). În aceste condiții, centrele pătratelor obținute în secțiune se vor situa pe dreapta care unește punctul S cu punctul O. Deoarece locul geometric al punctelor S este un cerc, locul geometric al centrelor pătratelor va fi conul cu vîrful în punctul O și a cărui bază este acest cerc.

În cele de mai sus, am presupus că cele două perechi de laturi opuse ale patrulaterului dat se intersectează respectiv în punctele E și F și că ambele diagonale taie dreapta EF.

Să presupunem acum că laturile AB și CD ale patrulaterului sînt paralele, în timp ce laturile AD și BC se intersectează în punctul E. În acest caz, intersecția fețelor ASB și CSD va fi paralelă cu dreptele AB și CD. Pentru ca să obținem în secțiune un dreptunghi, dreapta SF trebuie să fie perpendiculară pe aceste drepte; locul geometric corespunzător al punctelor S este planul care trece prin punctul E și este perpendicular pe bazele AB și CD ale trapezului. Pentru ca să obținem în secțiune un romb, punctul S trebuie să fie situat pe sfera avînd ca diametru segmentul KL, unde K și L sînt intersecțiile diagonalelor trapezului cu dreapta care trece prin punctul E și este paralelă cu bazele.

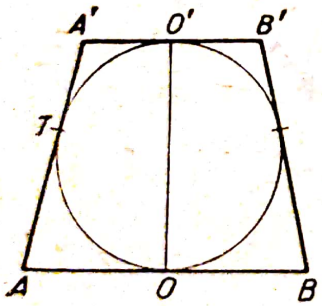


Fig. 213

Studiul celorlalte cazuri particulare posibile aici nu prezintă o deosebită dificultate.

733. Fie O și O' centrele bazelor trunchiului de con, iar $ABB'A'$ una dintre secțiunile sale axiale (fig. 213).

În planul acestei secțiuni axiale, construim un cerc de diametru OO', iar din punctul A, ducem la el o tangentă distinctă de AO. Dacă vom nota cu A'' punctul de intersecție al acestei tangente cu dreapta $O'A'$ (punctul A'' nu este indicat în figură), vom avea $OA \cdot O'A'' = \frac{1}{4} OO'^2$ (v. soluția ex. 135). Comparînd această egalitate cu egalitatea $OO'^2 = AB \cdot A'B'$, care are loc prin

ipoteză, tragem concluzia că punctul A'' coincide cu punctul A'. Altfel spus, generatoarea AA' este tangentă la cercul de diametru OO'. De aici rezultă că *segmentul OO' este diametrul sferei înscrise în trunchiul de con considerat* (în sensul de la ex. 712).

Notînd cu T punctul de contact al generatoarei cu sfera înscrisă, putem transforma în modul următor expresia pentru suprafața laterală a conului dat: $\pi \cdot AA' \cdot (OA + O'A') = \pi \cdot AA' \cdot (AT + A'T) = \pi \cdot AA'^2$.
Așadar, *aria laterală a conului este egală cu aria cercului de rază AA'*.

Dacă se dau înălțimea $OO' = h$ și generatoarea $AA' = l$ ale conului, razele bazelor OA și $O'A'$ satisfac, cum rezultă din cele de mai sus, condițiile $OA + O'A' = l$ și $OA \cdot O'A' = \frac{1}{4} h^2$. Așadar, *problema construirii razelor bazelor se reduce la construcția a două segmente cunoscînd suma și produsul lor* (cf. nr. **155**, constr. 7).

734. Fie $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$ laturile triunghiului ABC dat; x, y și z razele sferelor căutate, tangente două cîte două (exterior) și tangente la planul ABC, respectiv în punctele A, B și C.

După cum se vede din fig. 214, în acest caz, va avea loc ecuația $(y - z)^2 + a^2 = (y + z)^2$ sau $4yz = a^2$, deci și alte două ecuații analoge $4zx = b^2$ și $4xy = c^2$. Înmulțind membru cu membru ultimele două ecuații și împărțind cu cea precedentă căpătăm $x = bc/2a$. Analog, găsim $y = ca/2b$, $z = ab/2c$. Aceste expresii pentru x, y și z ne permit să construim fără dificultate sferele cerute.

735. Fie AB ecuatorul (fig. 215), P unul dintre poli, M un punct oarecare al sferei. Ducem prin punctele P și M un cerc mare și notăm cu N punctul lui

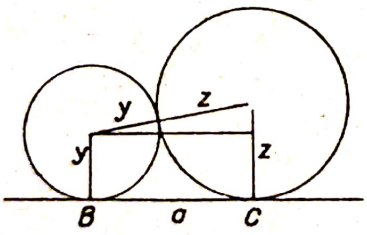


Fig. 214

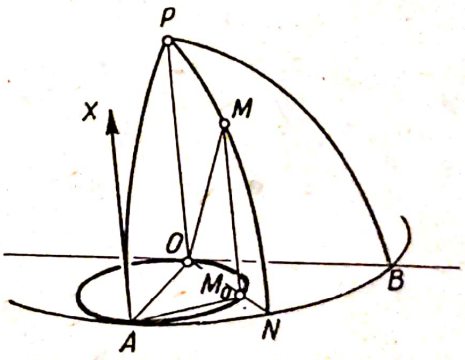


Fig. 215

de intersecție, cel mai apropiat de M, cu ecuatorul. După cum știm, se numește *ascensiunea dreaptă* a punctului M arcul AN de pe ecuator, luat de la un punct fixat odată pentru totdeauna al ecuatorului și pe care-l notăm cu A, pînă la punctul N; se numește *declinația* aceluiași punct M arcul NM (v. nr. **385**).

Dacă ascensiunea dreaptă a punctului M și declinația sa sînt egale, arcele AN și NM sînt egale, deci vor fi egale și unghiurile la centru AON și NOM. Dacă vom nota cu M_0 proiecția punctului M pe planul ecuatorului, triunghiurile AOM_0 și MOM_0 vor fi egale (avînd două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv egale). Prin urmare, unghiul AM_0O, egal cu unghiul MM_0O,

va fi drept, iar punctul M_0 va fi situat pe un cerc avînd ca diametru segmentul OA. Mai departe, din egalitatea acelorași triunghiuri, reiese că $AM_0 = MM_0$. De aceea, triunghiul AMM_0 este dreptunghic și isoscel, deci $\widehat{M_0AM} = 45°$. Prin urmare, toate dreptele AM sînt situate pe un con de rotație. Vîrful acestui con este punctul A, iar axa sa este perpendiculara AX pe planul ecuatorului; unghiul dintre axă și generatoare este de 45°.

Va fi loc geometric al punctelor M_0 tot cercul despre care este vorba sau nu, depinde de alegerea limitelor între care vom lua valorile ascensiunilor drepte, și anume dacă le vom măsura de la $-180°$ la $+180°$ sau de la 0 la 360°, cum este uzul în astronomie (valorile declinației se iau în mod normal de la -90 la $+90°$).

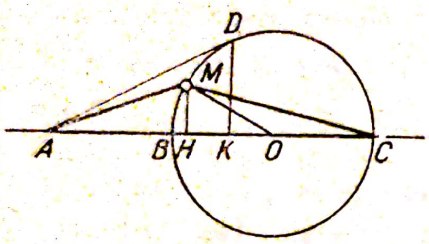


Fig. 216

736. Fie H și K proiecțiile punctelor M și D pe dreapta AC (fig. 216). Vom nota cu vol. AMB, vol. CMB, vol. OMB, vol. AMC etc. volumele corpurilor generate prin rotația în jurul axei AC a triunghiurilor curbilinii AMB și CMB, a sectorului de cerc OMB, a triunghiului AMC (rectiliniu) etc.

Prin ipoteză, avem

$$\text{vol. } AMB : \text{vol. } CMB = k,$$

de unde

$$\text{vol. } AMC : \text{vol. } CMB = k + 1. \tag{1}$$

Mai departe, avem

$$\text{vol. } AMC = \text{vol. } AMH + \text{vol. } CMH = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot (AH + HC) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot AC.$$

Înlocuind aici pe MH^2 prin $BH \cdot HC$, căpătăm

$$\text{vol. } AMC = \frac{1}{3}\pi \cdot BH \cdot HC \cdot AC.$$

Analog, găsim

$$\text{vol. } CMB = \text{vol. } CMH - \text{vol. } OMH + \text{vol. } OMB = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot HC -$$

$$- \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot HO + \frac{2}{3}\pi \cdot BH \cdot OC^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot OC + \frac{2}{3}\pi \cdot BH \cdot OC^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot BH \cdot HC \cdot OC + \frac{2}{3}\pi \cdot BH \cdot OC^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot BH \cdot OC \cdot (HC + 2OC).$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind valorile aflate ale volumelor în egalitatea (1); obținem

$$\frac{HC \cdot AC}{(HC + 2OC) \cdot OC} = k + 1.$$

Această egalitate ne permite să determinăm valoarea segmentului HC, adică să determinăm poziția punctului H, deci și a punctului M, după punctele date A, B și C și după raportul k.

Pentru a stabili limitele între care variază k, vom scrie ultima egalitate sub forma

$$\frac{AC}{OC + (2OC^2 : HC)} = k + 1.$$

Deoarece segmentul HC variază între limitele $KC \leqslant HC < 2OC$, iar membrul întîi al ultimei egalități crește o dată cu HC, avem

$$\frac{AC}{OC + (2OC^2 : KC)} \leqslant k + 1 < AC : 2OC.$$

Punînd, în această egalitate, $OA = h \cdot OB = h \cdot OC$ și deci $AC = (h+1) \times \times OC$, $KC = KO + OC = (OD^2 : OA) + OC = (OC : h) + OC = \frac{h+1}{h} \cdot OC$, obținem după transformările corespunzătoare,

$$\frac{h(h-1)}{3h+1} \leqslant k < \frac{h-1}{2}.$$

737. Fie a latura pătratului dat; h, k, l, m și d distanțele punctului M respectiv la dreptele AB, BC, CD, DA și la centrul O al pătratului $ABCD$.

1° Volumul corpurilor formate de rotația triunghiurilor MAB, MBC, MCD și MDA, primul în jurul lui AB, al doilea în jurul lui BC, al treilea în jurul lui CD și al patrulea în jurul lui DA, se poate determina ca suma sau ca diferența volumelor unor conuri (compară cu calculul vol. MAC în soluția ex. 736). Așadar, găsim că aceste volume sînt egale cu $\frac{1}{3}\pi ah^2, \frac{1}{3}\pi ak^2, \frac{1}{3}\pi al^2$ și $\frac{1}{3}\pi am^2$, de unde

$$S = \frac{1}{3}\pi a(h^2 + k^2 + l^2 + m^2).$$

2° Evident, pentru orice poziție a punctului M în plan, avem egalitățile $h^2 + k^2 = MB^2$, $l^2 + m^2 = MD^2$. Mai departe folosind expresia pentru mediana MO a triunghiului MBD în funcție de laturi (**128**), găsim $MB^2 + MD^2 = = 2d^2 + a^2$. De aici,

$$S = \frac{1}{3}\pi a(a^2 + 2d^2).$$

Pentru ca suma volumelor S să fie egală cu volumul conului de înălțime a și de raza bazei r, trebuie să aibă loc egalitatea $a^2 + 2d^2 = r^2$, de unde $MO^2 = = d^2 = \frac{1}{2}(r^2 - a^2)$. Locul geometric al punctelor M care satisfac această din

urmă condiție este un cerc pentru $r > a$, se reduce la un punct pentru $r = a$, și nu există pentru $r < a$.

3° Raportul dintre volumele generate prin rotația triunghiului MAB consecutiv în jurul laturilor MA și MB este egal, cum se vede ușor, cu $MB : MA$ (compară cu soluția ex. 713). Pentru ca acest raport să fie egal cu m, trebuie să aibă loc egalitatea $MB : MA = m$. Locul geometric al punctelor M care satisfac această din urmă condiție este un cerc (pentru $m \neq 1$) sau o dreaptă (pentru $m = 1$). Punctele de intersecție ale acestui loc geometric cu locul geometric considerat la 2° vor fi tocmai pozițiile căutate ale punctului M (dacă punctele de intersecție există).

738. 1° Avem

$$\text{vol. } OAB = \frac{1}{3}\pi \cdot OB \cdot OA^2; \text{ vol. } AMB = \text{vol. } OAMB - \text{vol. } OAB =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot OB \cdot (OA^2 + BM^2 + OA \cdot BM) - \frac{1}{3}\pi \cdot OB \cdot OA^2 = \frac{1}{3}\pi(BM^2 + OA \cdot BM).$$

Egalitatea vol. OAB = vol. ABM devine $BM^2 + OA \cdot BM = OA^2$ sau $BM^2 = OA \cdot (OA - BM)$. De aici se vede că segmentul BM trebuie să fie egal cu partea mai mare a segmentului OA, împărțit în medie și extremă rație. Deoarece distanța BM a punctului M la dreapta Oy rămîne constantă, locul geometric al punctelor M este o dreaptă Δ, paralelă cu Oy.

Deoărece raportul $AP : PB$, egal cu $OA : BM$, rămîne constant, locul geometric al punctelor P va fi tot o dreaptă paralelă cu Oy.

2° Avem

$$\text{vol. } ODMA = \text{vol. } OAMB - \text{vol. } OMB - \text{vol. } ODM = \frac{1}{3}\pi \cdot OB \times$$

$$\times (OA^2 + MB^2 + OA \cdot MB) - \frac{1}{3}\pi \cdot OB \cdot MB^2 - \frac{1}{6}\pi \cdot OB \cdot OM^2 = \frac{1}{6}\pi \cdot OB \times$$

$$\times (2OA^2 + 2OA \cdot MB - OM^2);$$

vol. $OAB = \frac{1}{3}\pi \cdot OB \cdot OA^2$. Egalitatea vol. $ODMA$ = vol. OAB ia forma $OM^2 = 2OA \cdot MB$. Pentru a găsi locul geometric al punctelor M care satisfac această condiție, remarcăm că, în triunghiul OAM avem $AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot BM$. Egalitatea precedentă este echivalentă, așadar, cu condiția $AM = OA$. Locul geometric al punctelor M este cercul de centru A și de rază OA.

3° Dacă volumele generate prin rotația triunghiurilor OAB și ABM și a figurii $ODMA$ sînt egale, atunci punctul D este intersecția dreptei Δ, considerată la 1°, cu cercul considerat la 2°.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL III

923. Fie date punctele A și B; P și Q sînt planele polare ale acestor puncte în raport cu sfera de centru dată O (fig. 217; planul figurii trece prin punctele O, A și B și este deci perpendicular pe planele P și Q). Să notăm cu A' punctul de intersecție al dreptei OA cu planul P; cu B' punctul de intersecție al dreptei OB cu planul Q; cu a și cu b proiecțiile punctelor A și B respectiv pe dreptele OB și OA.

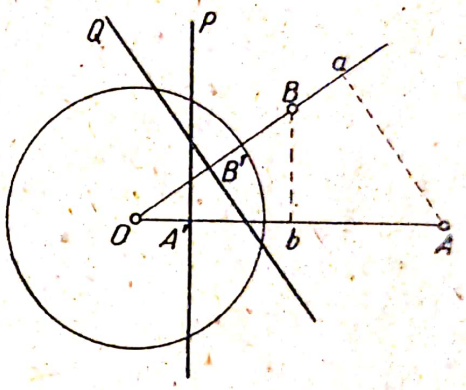


Fig. 217

În virtutea proprietății planelor polare (**665**), avem $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, de unde obținem $OA : OB = OB' : OA'$. Din asemănarea triunghiurilor OAa și OBb, rezultă că $OA : OB = Oa : Ob$. Din ultimele două egalități, găsim $OA : OB = (Oa - OB') : (Ob - OA') = aB' : bA'$. Însă segmentele aB' și bA' sînt respectiv egale cu distanțele punctului A la planul Q și punctul B la planul P.

924. Dacă o sferă intersectează fețele unui triedru $S \cdot ABC$ dat după trei cercuri ortogonale două cîte două, fețele acestui triedru sînt două cîte două conjugate în raport cu sfera (**667**). De aici rezultă că polul P al fetei BSC se află pe muchia SA, din care cauză perpendiculara coborîtă din punctul P pe planul BSC trece prin centrul sferei. De aceea, și planul care trece prin muchia SA și este perpendicular pe planul BSC trece prin centrul sferei. În baza aceleiași considerații, planele care trec prin celelalte două muchii și sînt perpendiculare pe fețele opuse vor trece și ele prin centrul sferei.

Așadar, *centrele tuturor sferelor care intersectează fețele unui triedru dat după trei cercuri ortogonale două cîte două* (dacă astfel de sfere există) *se situează pe dreapta de intersecție a celor trei plane care trec prin muchiile sale și sînt perpendiculare pe fețele opuse, adică pe dreapta d considerată la ex.* 482, 1°.

Este aproape evident că, *dacă un punct oarecare O de pe dreapta d este centrul unei sfere care se bucură de proprietatea considerată, atunci și toate punctele dreptei d* (distincte de vîrful S al triedrului) *sînt centrele unor astfel de sfere.* În adevăr, o omotetie cu centrul de asemănare în vîrful S al triedrului transformă punctul O în orice punct al dreptei d, iar sfera de centru O, care se bucură de proprietatea considerată, într-o altă sferă avînd aceeași proprietate.

Prin urmare, mai rămîne să stabilim dacă există o sferă care să intersecteze planele fețelor unui triedru după trei cercuri ortogonale două cîte două și care să aibă ca centru un punct dat O de pe dreapta d. În acest scop, vom

coborî din punctul O perpendiculara OH pe planul BSC și vom nota cu P punctul de intersecție al dreptei OH cu dreapta SA (amintim că punctul O este situat în planul care trece prin muchia SA și este perpendicular pe fața BSC; cazul în care muchia SA este perpendiculară pe fața BSC va fi, deocamdată, exclus din analiza noastră). Punctul P trebuie să fie, în virtutea celor arătate mai sus, polul planului BSC în raport cu sfera căutată. De aceea, dacă punctele P și H se află de părți diferite ale lui O sau dacă unul dintre ele coincide cu O, atunci sfera căutată nu există. Dacă însă punctele P și H se situează de aceeași parte a lui O, raza r a sferei căutate este dată de egalitatea $r^2 = OP \cdot OH$.

Reciproc, dacă raza sferei cu centrul în O va fi determinată după cum s-a arătat mai sus, atunci punctul P de pe muchia SA va fi polul feței BSC în raport cu sfera construită. Prin urmare, planele BSA și BSC vor fi conjugate în raport cu această sferă. Situația este aceeași pentru planele ASC și BSC. Pentru a demonstra că și planele ASB și ASC sînt conjugate în raport cu sfera astfel construită, ducem prin punctul O dreapta perpendiculară pe fața ASC și notăm cu Q punctul ei de intersecție cu muchia SB (amintim că punctul O se află într-un plan care trece prin dreapta SB și este perpendicular pe fața ASC; cazul în care muchia SB este perpendiculară pe fața ASC va fi, deocamdată, exclus din analiza noastră). Deoarece punctul Q este situat în planul polar BSC al punctului P, planul polar al punctului Q va trece prin punctul P; în afară de aceasta, planul polar al punctului Q este perpendicular pe dreapta OQ și coincide, de aceea, cu ASC. Așadar, polul Q al planului ASC este situat în planul ASB, și planele ASB și ASC sînt conjugate în raport cu sfera pe care am construit-o.

Prin urmare, dacă vom lua ca centru al sferei unul dintre punctele O ale dreptei d a triedrului, iar raza sferei este determinată ca mai sus, atunci planele fețelor triedrului vor fi două cîte două conjugate în raport cu sfera. De aici rezultă că, dacă sfera construită intersectează planele tuturor celor trei fețe ale triedrului, ea le va intersecta după trei cercuri ortogonale două cîte două.

O discuție mai amănunțită ne arată că sfera construită cum s-a indicat mai sus poate să nu intersecteze toate cele trei fețe ale triedrului dat.

Am presupus mai sus că muchia SA nu este perpendiculară pe fața BSC, iar muchia SB nu este perpendiculară pe fața ASC. De aceea, toate cele expuse înainte necesită modificări substanțiale, dacă triedrul dat este tridreptunghic. În acest caz, toate sferele care intersectează fețele triedrului după trei cercuri ortogonale două cîte două au ca centru vîrful triedrului.

Ajungem la următorul rezultat definitiv: *pentru un triedru arbitrar dat sau există o infinitate de sfere care intersectează fețele sale după trei cercuri ortogonale două cîte două, sau nu există nici o sferă de acest fel; în primul caz, locul geometric al centrelor acestor sfere este dreapta d, considerată la exercițiul* 482, 1°, *cu excepția cazului în care triedrul este tridreptunghic.*

925. Fie dat tetraedrul $SABC$ (fig. 218). Să considerăm arcul SA al cercului circumscris SAB, care nu conține punctul B și arcul analog SA al arcului circumscris SAC, care nu conține punctul C. Unghiul dintre aceste două arce, adică unghiul dintre tangentele la ele în una dintre extremitățile lor comune (indiferent dacă în punctul S sau în punctul A) îl vom nota cu α.

Putem spune, pe scurt, că unghiul α „corespunde" muchiei SA a tetraedrului. Să notăm, mai departe cu β, γ, α', β' și γ' unghiurile care corespund respectiv în același mod muchiilor SB, SC, BC, CA și AB ale tetraedrului dat.

Unghiurile α, β și γ, cu vîrful în S, sînt formate de tangentele la cercurile SBC, SCA și SAB în punctul S. Aceste trei tangente sînt situate în același plan, anume în planul tangent la sfera circumscrisă în punctul S. De aici rezultă (fig. 219) că

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°. \qquad (1)$$

Analog, considerînd vîrfurile A, B și C ale tetraedrului, mai căpătăm trei egalități

$$\alpha + \beta' + \gamma' = 180°; \qquad (2)$$

$$\alpha' + \beta + \gamma' = 180°; \qquad (3)$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma = 180°. \qquad (4)$$

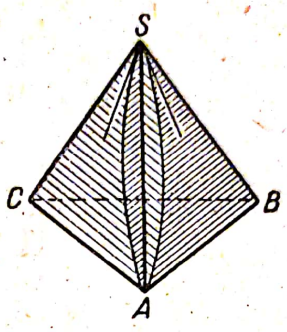


Fig. 218

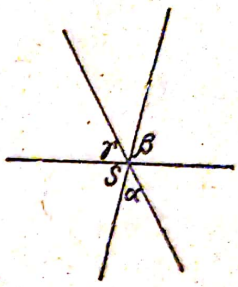


Fig. 219

Adunînd membru cu membru egalitățile (1) și (2) precum și egalitățile (3) și (4), căpătăm

$$2\alpha + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 2\alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 360°,$$

de unde $\alpha = \alpha'$. Însă α este unghiul format de cercurile SAB și SAC, iar α' unghiul cercurilor SBC și ABC. În același mod, vom demonstra că

$$\beta = \beta' \text{ și } \gamma = \gamma'.$$

926. Fie dat tetraedrul $ABCD$; A', B' și C' sînt omoloagele punctelor A, B și C în inversiunea de pol D și de putere k. În acest caz, vom avea (672) $B'C' = BC \cdot \frac{k}{DB \cdot DC}$ și expresii analoge pentru $C'A'$ și pentru $A'B'$. Din aceste trei expresii, găsim

$$B'C' : C'A' : A'B' = (BC \cdot DA) : (CA \cdot DB) : (AB \cdot DC).$$

Deoarece, în membrul drept al acestor relații, toate cele patru vîfuri intră cu același rol, vom avea aceleași relații între laturi în triunghiul analog cu $A'B'C'$, pe care-l obținem dacă vom lua ca pol de inversiune oricare alt vîrf al tetraedrului. În consecință, și unghiurile triunghiurilor obținute vor fi aceleași.

Dacă acum A_1, B_1, C_1 și D_1 sînt omoloagele punctelor A, B, C și D în inversiunea de pol O (distinct de vîrfurile tetraedrului) și de putere k_1, avem $A_1B_1 = AB \cdot \frac{k_1}{OA \cdot OB}$ și relații analoge pentru C_1A_1, B_1C_1, ... Din aceste relații, găsim

$$(BC \cdot DA) : (CA \cdot DB) : (AB \cdot DC) = (B_1C_1 \cdot D_1A_1) : (C_1A_1 \cdot D_1B_1) : (A_1B_1 \cdot D_1C_1).$$

Egalitățile obținute ne arată că triunghiurile considerate (analoge cu $A'B'C'$)

vor avea pentru tetraedrul $ABCD$ aceeași formă ca și pentru tetraedrul $A_1B_1C_1D_1$.

927. Fie O punctul dat; $k \neq 0$ produsul dat al segmentelor, pe care-l vom considera pozitiv sau negativ (după cum cele două segmente sînt situate de aceeași parte a punctului O sau de o parte și de cealaltă).

Dacă două puncte A și A', coliniare cu punctul O, satisfac condiția $OA \cdot OA' = k$ (ca mărime și ca semn), atunci punctul A' corespunde lui A în inversiunea de pol O și de putere k. Dacă, în aceste condiții, punctul A se află în planul dat P (care, conform sensului problemei, nu trece prin O), atunci punctul A' este situat pe sfera P', inversa planului P. Deoarece punctul A' este situat prin ipoteză, într-un al doilea plan dat Q, el trebuie să fie situat pe intersecția acestui plan cu sfera P'.

De aici rezultă că locul geometric căutat va fi un con cu baza circulară, dacă planul Q intersectează sfera P'. Dacă planul Q este tangent la sfera P', există o singură dreaptă care satisface condiția pusă, iar dacă planul Q nu are puncte comune cu sfera P', nu există de loc astfel de drepte.

928. Fie dat punctul O, prin care trebuie să treacă dreptele căutate. Deoarece proiecțiile unor segmente egale și paralele pe aceeași dreaptă sînt egale, putem considera că punctul origine al celor două segmente date OA și OB este chiar punctul O. Prin urmare, vom căuta locul geometric al unor drepte care trec prin punctul O, astfel ca proiecțiile OA_1 și OB_1 ale segmentelor date OA și OB pe fiecare dintre aceste drepte să satisfacă (ca mărime și ca semn) condiția

$$OA_1 \cdot OB_1 = h, \tag{1}$$

unde $h \gtrless 0$ este o constantă dată.

Să notăm cu a, b, a_1 și b_1 punctele care corespund respectiv punctelor A, B, A_1 și B_1 în inversiunea de pol O și de putere arbitrară k. În virtutea egalităților

$$OA \cdot Oa = OB \cdot Ob = OA_1 Oa_1 = OB_1 \cdot Ob_1 = k, \tag{2}$$

triunghiurile OAA_1 și Oa_1a, precum și OBB_1 și Ob_1b sînt asemenea, astfel că unghiurile Oaa_1 și Obb_1 sînt drepte. Aceasta înseamnă că punctele a_1 și b_1 se situează respectiv în planele complet determinate P și Q, care trec prin punctele a și b și sînt perpendiculare pe dreptele date OA și OB. În virtutea aceleiași egalități (2), relația (1) devine

$$Oa_1 \cdot Ob_1 = \frac{k^2}{h}.$$

Așadar, dreptele căutate se bucură de proprietatea că planele P și Q taie din fiecare dintre ele, măsurînd de la punctul O, două segmente al căror produs este constant.

În virtutea soluției exercițiului, 927, locul geometric al dreptelor căutate (dacă acesta există) este un con cu baza circulară. Poate, de asemenea, să existe numai o singură dreaptă, care se bucură de proprietatea căutată, sau să nu existe nici una.

Scanned with OKEN Scanner

929. Dacă a și a' sînt proiecțiile punctelor A și A' pe axa uneia dintre deplasările elicoidale considerate, are loc egalitatea

$$Aa = A'a'. \qquad (1)$$

Reciproc, dacă această egalitate este satisfăcută, dreapta considerată va fi, evident, axa uneia dintre deplasările elicoidale considerate: mărimea și sensul translației respective sînt date de segmentul aa', iar unghiul de rotație este cel format de dreptele aA și $a'A'$.

Deoarece $Aa^2 = OA^2 - Oa^2$ și $A'a'^2 = OA'^2 - Oa'^2$, egalitatea (1) poate fi înlocuită prin următoarea: $Oa'^2 - Oa^2 = OA'^2 - OA^2$. În această egalitate segmentele Oa și Oa' pot fi considerate ca mărime și ca semn, alegînd pe dreapta Oa, în mod arbitrar, un sens pozitiv. Dacă mai notăm cu m mijlocul segmentului aa', adică proiecția mijlocului M al segmentului AA' pe dreapta considerată, vom avea $Oa' + Oa = 2Om$; $Oa' - Oa = aa'$. Egalitatea precedentă ia forma

$$2Om \cdot aa' = OA'^2 - OA^2.$$

Așadar, produsul dintre proiecțiile celor două segmente date OM și AA' pe fiecare dintre dreptele căutate are aceeași valoare, anume $\frac{1}{2}(OA'^2 - OA^2)$, și ajungem la exercițiul 928.

930. Fie A punctul dat; S_1 și S_2 două oarecare dintre sferele cu planul radical comun; A_1 și A_2 inversele punctului A, respectiv în raport cu sferele S_1 și S_2. Vom presupune întîi că punctele A, A_1 și A_2 nu sînt coliniare.

Cercul C, care trece prin punctele A, A_1 și A_2, intersectează fiecare dintre sferele S_1 și S_2 sub un unghi drept, deoarece trece prin punctele A și A_1, inverse în raport cu sfera S_1, și prin punctele A și A_2, inverse în raport cu sfera S_2. Prin urmare, centrul O al cercului C este situat în planul radical al sferelor S_1 și S_2, iar pătratul razei lui este egal cu puterea punctului O în raport cu fiecare dintre sferele date S_1 și S_2. De aceea, cercul C intersectează sub un unghi drept *toate* sferele care au același plan radical cu S_1 și S_2. Dacă S_3 este una oarecare dintre aceste sfere, iar A_3 este inversul punctului A în raport cu sfera S_3, atunci toate cercurile care trec prin punctul A și intersectează sfera S_3 sub un unghi drept, deci și cercul C printre ele, vor trece prin punctul A_3. Așadar, punctul A_3 se află pe cercul C. Prin urmare, punctele care sînt inversele lui A în raport cu toate sferele avînd același plan radical cu sferele S_1 și S_2 se situează pe cercul C.

Fie acum A' un punct arbitrar de pe cercul C. Dacă punctul A' este inversul lui A în raport cu o sferă S', avînd același plan radical cu sferele S_1 și S_2, atunci dreapta AA' intersectează linia centrelor acestor sfere în centrul O' al sferei S'. Reciproc, dacă dreapta care unește punctul A cu un punct A' al cercului C intersectează linia centrelor sferelor S_1 și S_2 și punctul de intersecție O' este centrul unei sfere S', avînd cu S_1 și S_2 planul radical comun, atunci punctele A și A' vor fi inverse în raport cu sfera S'. Dacă însă dreapta AA' este paralelă cu linia centrelor, atunci punctele A și A' sînt simetrice în raport cu planul radical al sferelor S_1 și S_2; putem spune că, în acest caz,

inversiunea în raport cu o sferă avînd planul radical comun cu S_1 și cu S_2, se transformă într-o simetrie în raport cu acesta din urmă (compară cu nr. 699).

Mai departe, va trebui să deosebim trei cazuri:

1) Dacă sferele date S_1 și S_2 sînt secante, atunci *orice* punct O' de pe linia centrelor lor este centrul unei sfere S', care trece prin curba de intersecție și are, de aceea, planul radical comun cu sferele S_1 și S_2. De aceea locul geometric căutat va fi *întreg* cercul C.

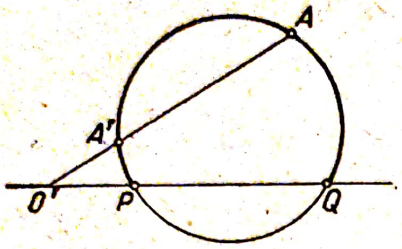


Fig. 220

2) Dacă sferele date S_1 și S_2 sînt tangente într-un punct T, atunci orice punct al liniei centrelor, distinct de T, va fi centrul unei sfere avînd același plan radical cu S_1 și cu S_2. Locul geometric căutat va fi cercul C, din care se exclude punctul T.

3) În sfîrșit, dacă sferele date S_1 și S_2 nu au puncte comune, atunci toate sferele ortogonale la ele intersectează linia centrelor în aceleași două puncte P și Q (v. ex. 696). Punctele segmentului PQ nu pot servi ca centre ale sferelor S', avînd planul radical comun cu S_1 și cu S_2, deoarece ele sînt interioare sferei ortogonale cu sferele S'. În opoziție cu aceasta, orice punct al liniei centrelor, situat pe prelungirea segmentului PQ, este centru al unei sfere S', ortogonală la toate sferele care trec prin punctele P și Q și care au, de aceea, planul radical comun cu sferele S_1 și S_2. De aici reiese (v. fig.220) că locul geometric căutat va fi arcul PAQ al cercului C.

Am presupus mai sus că punctele A, A_1 și A_2 nu sînt coliniare. Dacă are loc însă această situație, punctul A se află pe linia centrelor sferelor S_1 și S_2, și reciproc. În acest caz, cercul C va fi înlocuit prin linia centrelor.

O discuție mai detaliată a acestui caz arată că

1) dacă sferele date S_1 și S_2 sînt secante, locul geometric căutat va fi linia centrelor;

2) dacă sferele date S_1 și S_2 sînt tangente într-un punct T, locul geometric căutat va fi linia centrelor, din care se elimină punctul T;

3) dacă sferele date S_1 și S_2 nu au puncte comune, atunci locul geometric căutat va fi segmentul PQ, cu condiția ca punctul A să aparțină acestui segment; ansamblul celor două prelungiri ale segmentului PQ, cu condiția ca punctul A să fie situat pe prelungirea segmentului PQ dincolo de una dintre extremitățile sale, degenerează în punctul Q (în punctul P), cu condiția ca punctul A să coincidă cu punctul P (cu punctul Q).

Prin urmare, *locul geometric al punctelor invers punctului dat A în raport cu sferele avînd planul radical comun este, în general, un cerc sau un arc de cerc. Dacă punctul A se află, pe linia centrelor sferelor considerate, locul geometric se transformă într-o dreaptă, într-o porțiune a acestei drepte* (v. mai sus) *sau într-un punct.*

Trecem la cazul sferelor avînd axa radicală comună.

Fie iarăși A punctul dat; S_1, S_2 și S_3 trei oarecare dintre sferele avînd axa radicală comună și astfel alese, încît centrele lor să nu fie coliniare; A_1, A_2 și A_3 inversele punctului A, respectiv în raport cu sferele S_1, S_2 și S_3. Să presupunem întîi că punctele A, A_1, A_2 și A_3 nu sînt situate în același plan.

Sfera S, care trece prin punctele A, A_1, A_2 și A_3, intersectează fiecare dintre sferele S_1, S_2 și S_3 sub un unghi drept, deoarece trece prin punctele A și A_1, inverse în raport cu sfera S_1, prin punctele A și A_2, inverse în raport cu sfera S_2, și prin punctele A și A_3, inverse în raport cu sfera S_3. Prin urmare, centrul O al sferei S se află pe axa radicală a sferelor S_1, S_2 și S_3, iar pătratul razei ei este egal cu puterea punctului O în raport cu fiecare dintre sferele S_1, S_2 și S_3. De aceea, sfera S este ortogonală la toate sferele avînd axa radicală comună cu S_1, S_2 și S_3. Dacă S_4 este una oarecare dintre aceste sfere, iar A_4 este inversul punctului A în raport cu sfera S_4, atunci toate sferele care trec prin punctul A și sînt ortogonale la sfera S_4, deci și sfera S, vor trece prin punctul A_4. Așadar, punctul A_4 este situat pe sfera S. Prin urmare, inversele punctului A în raport cu toate sferele care au axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3 sînt situate pe sfera S.

Fie acum A' un punct arbitrar al sferei S. Dacă punctul A' este inversul lui A în raport cu o sferă S' avînd axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3, atunci dreapta AA' taie planul centrelor acestor sfere în centrul O' al sferei S'. Reciproc, dacă dreapta care unește punctul A cu un punct arbitrar A' al sferei S intersectează planul centrelor sferelor S_1, S_2 și S_3, iar punctul de intersecție O' este centrul unei sfere S' avînd axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3, atunci punctele A și A' vor fi inverse în raport cu sfera S'. Dacă însă dreapta AA' este paralelă cu planul centrelor, atunci punctele A și A' sînt simetrice în raport cu un plan care trece prin axa radicală a sferelor date S_1, S_2 și S_3; putem spune că, în acest caz, inversiunea în raport cu o sferă avînd axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3 devine o simetrie în raport cu unul dintre planele care trec prin această axă.

Mai departe, va trebui iarăși să deosebim trei cazuri:

1) Dacă sferele date S_1, S_2 și S_3 sînt secante în două puncte, atunci *orice* punct O' din planul centrelor acestor sfere este centru al unei sfere care trece prin punctele de intersecție și are, deci, axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3. De aceea, locul geometric căutat va fi întreaga sferă S.

2) Dacă sferele date S_1, S_2 și S_3 au un singur punct comun T, atunci orice punct distinct de T din planul centrelor va fi centrul unei sfere avînd axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3. Locul geometric căutat va fi sfera S, din care se elimină punctul T.

3) În sfîrșit, dacă sferele S_1, S_2 și S_3 nu au puncte comune, atunci toate sferele ortogonale la ele trec printr-un același cerc C (ex. 697). Punctele interioare cercului C nu pot fi centre ale sferelor S' avînd axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3, deoarece sînt interioare sferei ortogonale la sferele S'. În opoziție cu aceasta, orice punct din planul centrelor, care este exterior cercului C, este centru al unei sfere S', care intersectează sub un unghi drept cercul C, deci și toate sferele care trec prin el, și are, din această cauză, axa radicală comună cu sferele S_1, S_2 și S_3. De aici rezultă că locul geometric căutat este unul dintre cele două segmente sferice în care cercul C împarte sfera S, anume cel pe care se situează punctul A.

Am presupus mai sus că punctele A, A_1, A_2 și A_3 nu sînt situate în același plan. Dacă ar avea loc însă această situație, punctul A s-ar situa în planul centrelor sferelor S_1, S_2 și S_3, și reciproc. În acest caz, sfera S se înlocuiește prin planul centrelor.

Scanned with OKEN Scanner

O discuție mai amănunțită a acestui caz arată, că

1) dacă sferele date S_1, S_2 și S_3 se taie în două puncte, locul geometric căutat este planul centrelor;

2) dacă sferele date S_1, S_2 și S_3 au un singur punct comun T, locul geometric căutat va fi planul centrelor, din care se exclude punctul T;

3) dacă sferele date S_1, S_2 și S_3 nu au puncte comune, locul geometric căutat va fi porțiunea din plan interioară (exterioară) cercului C, cu condiția ca punctul A să fie interior (respectiv exterior) cercului C, și degenerează în cercul C, dacă punctul A se află pe acest cerc.

În consecință, *locul geometric al inverselor unui punct dat A în raport cu sfere care au axa radicală comună este în general, o sferă sau un segment de sferă. Dacă punctul A, este situat în planul centrelor sferelor considerate, locul geometric se transformă într-un plan, într-o porțiune a acestui plan* (v. mai sus) *sau într-un cerc.*

931. Fie date două sfere S_1 și S_2 și se consideră două sfere Σ și Σ', tangente fiecare la ambele sfere date și tangente între ele.

Sferele tangente la cele două sfere date S_1 și S_2 formează două familii (compară cu nr. **682**). Prima familie este formată din toate sferele tangente fiecare în același mod la ambele sfere date. A doua familie este formată din toate sferele tangente fiecare, cu contacte diferite, la cele două sfere date. Trebuie să considerăm separat cazul în care cele două sfere Σ și Σ' aparțin aceleiași familii și cazul în care ele aparțin unor familii diferite.

1) Să presupunem că cele două sfere Σ și Σ' aparțin aceleiași familii de sfere tangente la cele două sfere date; pentru a fixa ideile, primei familii. În aceste condiții, sfera Σ este tangentă la sferele S_1 și S_2 în două puncte antiomoloage în raport cu centrul lor de asemănare exterior P (sau în două puncte simetrice în raport cu planul radical al sferelor S_1 și S_2, dacă acestea sînt egale) și deci se transformă în ea însăși în inversiunea de pol P care duce sferele S_1 și S_2 una în cealaltă (respectiv, în simetria în raport cu planul radical; în cele ce urmează, nu vom mai repeta rezervele de acest fel). Același lucru este valabil și pentru sfera Σ'. Prin urmare, punctul de contact al sferelor Σ și Σ' se află pe sfera de inversiune Ω, deoarece, în caz contrar, sferele Σ și Σ' ar avea mai mult decît un singur punct comun.

Reciproc, fiecare punct M al sferei de inversiune Ω aparține locului geometric căutat. Pentru a ne convinge de aceasta, să alegem un plan arbitrar care trece prin punctul M și intersectează sub un unghi drept sfera de inversiune Ω. Există două sfere Σ și Σ', tangente în punctul M la planul ales și, totodată, tangente la sfera dată S_1 (aceste două sfere pot fi construite printr-o metodă analogă celei din soluția ex. 74). Fiecare dintre aceste sfere Σ și Σ', care intersectează sub un unghi drept sfera Ω, este transformată în ea însăși prin inversiunea în raport cu sfera Ω, din care cauză este tangentă și la sfera S_2. Dacă punctul M este situat pe sfera S_1 (deci și pe sfera S_2), atunci ambele sfere Σ și Σ' se transformă în punctul M.

Prin urmare, locul geometric al punctelor M va fi întreaga sferă Ω.

Am presupus că cele două sfere Σ și Σ' aparțin primei familii. Analog, dacă ambele sfere Σ și Σ' ar aparține familiei a doua, locul geometric al punctelor de contact va fi sfera Ω^*, cu centrul în centrul de asemănare interior al sferelor S_1 și S_2, în raport cu care aceste două sfere sînt una inversa celeilalte.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă acum una dintre sferele Σ și Σ' este tangentă cu contacte de aceeași speță la sferele S_1 și S_2, iar cealaltă are cu ele contacte de speță diferită, tangența sferelor Σ și Σ' poate avea loc numai cu una dintre sferele date S_1 sau S_2.

Această propoziție se demonstrează în același mod ca și propoziția corespunzătoare din plan (soluția ex. 266), înlocuindu-se numai termenul „cerc" prin cel de „sferă".

Reciproc, prin orice punct M al sferei S_1 (sau S_2), trec două sfere tangente în punctul M la sfera S_1 (sau S_2) și tangente în același timp la cealaltă sferă dată. Prin urmare, în acest al treilea caz, locul geometric al punctelor de contact M va fi ansamblul sferelor date.

Așadar, locul geometric al punctelor de contact M este format întotdeauna din sferele date S_1 și S_2 și cuprinde în afară de aceasta: a) sfera (sau planul) Ω, dacă sferele S_1 și S_2 sînt exterioare una față de cealaltă sau tangente exterior (în acest caz, sfera Ω^* nu există); b) sfera (sau planul) Ω și sfera Ω^*, dacă sferele S_1 și S_2 sînt secante; c) sfera Ω^*, dacă sferele S_1 și S_2 sînt tangente interior sau așezate una în interiorul celeilalte (în aceste condiții, sfera Ω nu există).

Fie date acum trei sfere S_1, S_2 și S_3 și să considerăm două sfere Σ și Σ', tangente fiecare la cele trei sfere date și tangente între ele.

Sferele tangente la cele trei sfere date S_1, S_2 și S_3 formează patru familii (compară cu nr. **684** bis — **685**). Prima familie este formată din toate sferele care au contacte de aceeași speță cu cele trei sfere date. A doua familie este formată din toate sferele care au contacte de aceeași speță cu sferele S_2 și S_3, iar cu sfera S_1 un contact de cealaltă speță decît cele cu sferele S_2 și S_3. Celelalte două familii se definesc în mod analog. Trebuie să considerăm separat cazul în care cele două sfere Σ și Σ' aparțin aceleiași familii și cazul în care ele aparțin unor familii diferite.

1) Să presupunem că cele două sfere Σ și Σ' aparțin aceleiași familii de sfere tangente la cele trei sfere date, să zicem, pentru a fixa ideile, primei familii. Deoarece fiecare dintre sferele Σ și Σ' este tangentă la două dintre sferele date în același mod, punctul M al contactului lor se situează (în virtutea celor arătate mai sus), pe sfera Ω_{12} avînd polii în centrul de asemănare exterior al sferelor S_1 și S_2, inversiunea în raport cu care transformă sfera S_1 în sfera S_2. Din aceeași cauză, punctul M este situat și pe sfera de inversiune analogă, Ω_{13}, care corespunde sferelor S_1 și S_3. Prin urmare, punctul M se află, pe curba de intersecție C a sferelor Ω_{12} și Ω_{13}.

Reciproc, dacă sferele Ω_{12} și Ω_{13} sînt secante, atunci fiecare punct M de pe curba lor de intersecție C aparține locului geometric căutat. Pentru a ne convinge de aceasta, să considerăm planul care trece prin punctul M și este perpendicular pe cercul C. Există două sfere Σ și Σ', tangente la planul ales în punctul M și tangente totodată la sfera dată S_1 (v. cele spuse mai sus în legătură cu construcția acestor sfere). Fiecare dintre aceste sfere Σ și Σ', fiind ortogonală la cercul C, va fi ortogonală și la sferele Ω_{12} și Ω_{13} și se transformă deci în ea însăși în ambele inversiuni, cea în raport cu sfera Ω_{12} și cea în raport cu sfera Ω_{13}. Prin urmare, fiecare dintre sferele Σ și Σ' este tangentă atît la sfera S_2, cît și la sfera S_3.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, locul geometric al punctelor M va fi tot cercul C, dacă acesta există.

Am presupus că cele două sfere Σ și Σ' aparțin primei dintre cele patru familii. Analog, dacă sferele Σ și Σ' aparțin celei de a doua familii, locul geometric al punctelor de contact va fi intersecția C_1 a sferei Ω_{12}^* — având centrul în centrul de asemănare interior al sferelor S_1 și S_2, inversiune în raport cu care transformă sferele S_1 și S_2 una în cealaltă, — cu sfera analogă Ω_{13}^*.

Observație. Din aceste raționamente rezultă că orice punct M al intersecției sferelor Ω_{12} și Ω_{13} se situează pe sfera analogă Ω_{23}, deoarece punctul M este punct de contact a două sfere tangente cu contacte de aceeași speță la sferele S_2 și S_3. De aceea, sferele Ω_{12}, Ω_{13} și Ω_{23} trec prin același cerc C, dacă două dintre ele sînt secante (v. în legătură cu aceasta, soluția ex. 960, propoziția I-a).

Tot astfel, vor trece prin același cerc sferele Ω_{12}^*, Ω_{13}^* și Ω_{23}^* etc.

2) Să presupunem acum că sferele Σ și Σ' aparțin unor familii diferite, de exemplu, sfera Σ primei familii, iar sfera Σ' celei de-a doua.

Deoarece sfera Σ are contacte de aceeași speță cu sferele S_1 și S_2, iar sfera Σ' are cu aceleași sfere S_1 și S_2 contacte de spețe diferite, tangența poate avea loc (v. mai sus), numai în punctele uneia dintre sferele S_1 și S_2. Tot astfel, dat fiind că sfera Σ are contacte de aceeași speță cu sferele S_1 și S_3, iar sfera Σ' are cu aceleași sfere S_1 și S_3 contacte diferite, tangența se poate produce numai într-un punct al uneia dintre sferele S_1 și S_3. Prin urmare, punctul de contact trebuie să fie situat pe sfera S_1. Însă sferele Σ din prima familie sînt tangente la sfera S_1 în punctele unui cerc (**685**), sferele Σ' din a doua familie, în punctele unui alt cerc. Punctul de contact al sferelor Σ și Σ' trebuie să coincidă cu unul dintre punctele de intersecție ale acestor două cercuri, astfel că nu se pune problema locului geometric al punctelor de contact.

Același lucru are loc, în general, pentru contactul unor sfere Σ și Σ' aparținînd la familii diferite.

932. Deoarece fiecare dintre sferele și dintre planele care intersectează cele două sfere date sub unghiuri egale se transformă în ea însăși prin una dintre cele două inversiuni care transformă sferele date una în cealaltă, rezultă că sferele și planele care trec prin punctul dat și care intersectează sub unghiuri egale cele două sfere date formează două familii; sferele și planele unei familii (ale celeilalte) trec prin punctul care este inversul celui dat în una (respectiv, în cealaltă) dintre cele două inversiuni. Dacă însă punctul considerat este centru de asemănare al celor două sfere, atunci *toate* sferele unei familii care intersectează ambele sfere date sub unghiuri egale și care trec prin unghiul dat vor fi și ele înlocuite prin plane.

Dacă punctul A', care corespunde punctului dat A în inversiunea căutată I, este centru de asemănare pentru cele două sfere în care se transformă sferele date, atunci toate sferele unei familii, care trec prin punctul A și intersectează sferele date sub unghiuri egale, vor trebui să se transforme în plane care trec prin punctul A'. Pentru ca aceasta să aibă loc, trebuie să alegem ca pol al inversiunii I inversul punctului A în una dintre cele două inversiuni care transformă sferele date una în cealaltă (compară cu soluția probl. 390).

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALA REGIONALA IASI

933. Prin unghiul a două sfere, putem înțelege (compară cu soluția ex. 256) oricare dintre cele două unghiuri suplementare formate de planele tangente într-un punct comun al lor, cu alte cuvinte, unghiul dintre razele duse într-un punct comun al lor sau suplementul acestuia. În cazurile în care va trebui să facem distincție între aceste două unghiuri, vom spune că „unghiul celor două sfere este *strict* egal cu α", înțelegînd prin aceasta că α este exact unghiul format de razele duse în unul dintre punctele de intersecție (și nu suplementul său).

Două sfere tangente formează un unghi strict egal cu 2 dr, în cazul unui contact exterior, și strict egal cu zero, în cazul unui contact interior.

Dacă este vorba despre intersecția unui plan cu o sferă, putem numi în mod arbitrar „interior" în raport cu planul unul dintre cele două „semispații", în care planul împarte spațiul, considerînd unghiul format de raza sferei, dusă într-unul din punctele de intersecție, cu perpendiculara pe plan, dusă în semispațiul „interior". Dacă unul dintre cele două semispații în care planul împarte spațiul a fost denumit „interior", spunem că planul este *orientat*. Dacă vom schimba alegerea semispațiului „interior", vom spune că am modificat *orientarea planului*.

Reciproca demonstrată la nr. **682** poate fi enunțată acum în următoarea formă mai precisă:

Orice sferă (sau plan) Σ care intersectează două sfere inegale date S și S' sub unghiuri *strict egale* (sau sub unghiuri *strict suplementare*) le intersectează după două cercuri antiomoloage în raport cu centrul de asemănare *exterior* (respectiv *interior*), sau, în particular, este tangent la ele în două puncte antiomoloage în raport cu centrul de asemănare *exterior* (respectiv *interior*), și reciproc. Dacă sferele date sînt egale, atunci cercurile și punctele antiomoloage în raport cu centrul de asemănare *exterior* se înlocuiesc prin cercuri și puncte simetrice în raport cu planul radical.

În adevăr, să intersectăm figura considerată cu un plan care trece prin centrele celor trei sfere (sau cu un plan care trece prin centrele sferelor date și este perpendicular pe planul secant). Putem aplica figurii obținute în secțiune cele spuse la soluția exercițiului 256, din Geometria plană, de unde reiese propoziția enunțată.

Trecînd acum la soluția problemei noastre, vom începe cu demonstrația următoarei propoziții:

I. *Toate sferele și planele care intersectează sub unghiuri constante α și α' două sfere neconcentrice date S și S' formează două familii, astfel încît o sferă arbitrară S'', avînd planul radical comun cu sferele S și S' și care intersectează una dintre sferele oricăreia din celelalte două familii, intersectează toate sferele acestei familii sub același unghi.*

Mulțimea sferelor care intersectează sferele S și S' sub unghiuri respectiv egale cu α și cu α' se poate împărți în patru clase. Anume, vom încadra în aceeași clasă toate sferele care intersectează pe S și pe S' sub unghiuri *strict* egale, respectiv pentru fiecare dintre cele patru clase cu

(1) α și α'; (2) $2\text{dr} - \alpha$ și $2\text{dr} - \alpha'$; (I)

(3) $2\text{dr} - \alpha$ și α'; (4) α și $2\text{dr} - \alpha$. (II)

Sferele din primele două clase le vom numi sfere din prima familie, iar sferele din ultimele două clase, sfere din a doua familie, și vom arăta că fiecare dintre aceste două familii de sfere se bucură de proprietatea cerută. Este suficient să arătăm aceasta pentru sferele din prima familie, deoarece a doua familie se obține din prima prin înlocuirea unuia dintre unghiurile α și α' prin suplementul său.

Se poate demonstra că cele două famili de sfere există, oricare ar fi sferele S și S' și pentru unghiuri α și α' arbitrare. Pentru a construi o sferă din prima familie, ducem prin centrele celor două sfere date un plan și considerăm cercurile C și C' după care acesta taie sferele S și S'. În acest plan, construim cercul Γ, care intersectează cercurile C și C' sub unghiuri *strict* egale cu α și cu α' sau *strict* egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$ (compară cu soluția probl. 403). Sfera Σ, în care Γ este un cerc mare, aparține primei familii. În mod analog, putem construi o sferă a celei de-a doua familii.

Se poate întîmpla însă ca toate sferele unei familii să aparțină aceleiași clase, astfel ca să nu mai existe în această familie sfere din cealaltă clasă.

Astfel, dacă pentru $\alpha = \alpha' = 0$, sfera S' este interioară sferei S, atunci în prima familie (sferele tangente cu contacte de aceeași speță la ambele sfere date) există sfere ale clasei (1), care intersectează sfera S sub un unghi strict egal cu zero și sfera S', de asemenea, sub un unghi strict egal cu zero (adică sfere tangente interior la ambele sfere date), dar nu există sfere din clasa (2), care să intersecteze sfera S sub un unghi strict egal cu $2dr$, iar sfera S' tot sub un unghi strict egal cu $2dr$ (adică sfere tangente exterior la ambele sfere date). Dacă însă, pentru $\alpha = \alpha' = 0$, sfera S' este exterioară sferei S, atunci vor exista, evident, sfere din toate cele patru clase.

Să presupunem că, în prima familie, există sfera Σ_0 din clasa (1), adică o sferă care intersectează sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α'. Fie, mai departe, Σ o altă sferă din prima familie aparținînd primei (celei de a doua) clase, adică intersectînd sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α' (strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$). Deoarece sfera S intersectează sferele Σ_0 și Σ sub unghiuri strict egale (strict suplementare), ea le va intersecta după două cercuri antiomoloage în raport cu centrul de asemănare exterior (interior) P al sferelor Σ_0 și Σ. Același lucru este valabil pentru sfera S'. De aici rezultă că punctul P are, în raport cu sferele S și S', aceeași putere p, egală cu puterea inversiunii I de pol P, care transformă sfera Σ_0 în sfera Σ (și fiecare dintre sferele S și S' în ea însăși). De aceea, punctul P este situat în planul radical al sferelor S și S', deci el are aceeași putere p în raport cu orice sferă S'' avînd planul radical comun cu S și cu S'. Prin urmare, sfera S'' este transformată de inversiunea I în ea însăși și deci, intersectează sferele Σ_0 și Σ (dacă ea intersectează una dintre sferele Σ_0 și Σ) sub unghiuri strict egale (strict suplementare).

Dacă sfera Σ, aparținînd clasei (1), este egală cu sfera Σ_0, atunci ultimele raționamente trebuie modificate. În acest caz, sfera S intersectează sferele Σ_0 și Σ după două cercuri simetrice în raport cu planul radical M al sferelor Σ_0 și Σ, același lucru este valabil și pentru sfera S'. De aici deducem ușor că simetria I_0 în raport cu planul M transformă sfera Σ_0 în sfera Σ, iar pe fiecare dintre sferele S și S' în ea însăși. Prin urmare, sfera S'', care are planul radical comun cu S și cu S', este transformată în ea însăși prin simetria I_0 și, de aceea, ea intersectează sferele Σ_0 și Σ (dacă intersectează una dintre sferele Σ_0 și Σ) sub unghiuri strict egale. Simetria I_0 în raport cu planul M joacă aici rolul inversiunii I (compară cu sfîrșitul nr. **670**). În expunerea care urmează, nu vom mai face asemenea rezerve.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, toate sferele Σ care intersectează sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α' (strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$) intersectează sfera S'' sub un unghi strict egal (strict suplementar) cu cel sub care ea este intersectată de sfera Σ_0. Dacă nu vom face distincție între cele două unghiuri pe care sfera Σ le formează cu sfera S'', vom putea spune că toate sferele Σ din prima familie, intersectează sfera S'' sub același unghi.

Propoziția considerată a fost demonstrată pentru sferele din prima familie, în ipoteza că, printre sferele acestei familii, există una aparținînd clasei (*1*). Dacă printre sferele primei familii nu ar figura nici una din clasa (*1*), am putea relua aceleași raționamente pentru o sferă Σ_0 din clasa (*2*) (aceasta se reduce la înlocuirea lui α și α' prin $2dr - \alpha$ și $2dr - \alpha'$). Așadar, propoziția noastră este demonstrată complet pentru sferele din prima familie, deci, în virtutea observației de la începutul demonstrației, și pentru sferele celei de-a doua familii.

Raționamentele precedente subsistă fără modificări esențiale, dacă vom considera, în locul sferei Σ, un plan care intersectează sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α' (sau, dacă schimbăm orientarea planului, strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$); în acest caz, rolul de centre de asemănare ale sferelor Σ_0 și Σ va reveni extremităților diametrului sferei Σ_0, perpendicular pe planul Σ.

Propoziția I este complet demonstrată.

Să considerăm acum ceva mai amănunțit *planele* care intersectează sferele S și S' sub unghiuri egale cu α și cu α'.

Toate planele care intersectează sfera dată S sub un unghi egal cu α (sau, ceea ce este același lucru, egal cu $2dr - \alpha$) sînt tangente la o aceeași sferă, pe care o vom nota cu $S(\alpha)$. Așadar, *vom nota cu* $S(\alpha)$ *o sferă concentrică cu sfera* S *și tangentă la toate planele care o intersectează pe aceasta sub unghiul* α. Analog, vom folosi notațiile $S'(\alpha')$ etc. Planele care intersectează sferele S și S' sub unghiurile α și α' vor fi plane tangente comune la sferele $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$. În acest caz, va avea loc următoarea propoziție:

II. *Planele care intersectează sub unghiuri constante* α *și* α' *două sfere neconcentrice date* S *și* S' *și care aparțin* (în sensul propoziției I) *la o aceeași familie (la familii diferite) trec prin același centru de asemănare (prin centre de asemănare diferite) al sferelor* $S(\alpha)$ *și* $S'(\alpha')$.

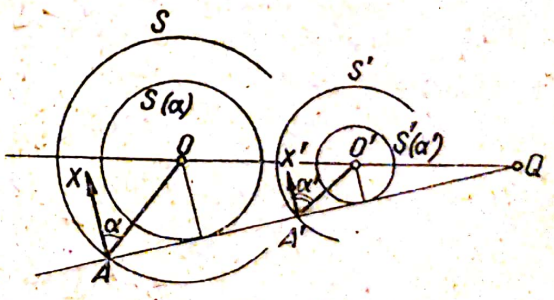


Fig. 221

În adevăr, să considerăm planul Σ din prima familie, care intersectează sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α' (sau, dacă schimbăm orientarea planului, strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$). Fie O și O' centrele sferelor S și S'; A și A' puncte de intersecție arbitrare ale acestor sfere cu planul Σ; AX și $A'X'$ perpendicularele în punctele A și A' pe planul Σ, în semispațiul „interior".

Dacă unghiurile α și α', adică unghiurile OAX și $O'A'X'$ sînt ambele ascuțite (fig. 221) sau ambele obtuze (dacă unul este ascuțit, iar celălalt

obtuz), atunci semidreptele AO și $A'O'$ se vor situa (compară cu nr. 377, lema) de aceeași parte (respectiv, de o parte și de cealaltă) a planului Σ. Deoarece centrele O și O' ale sferelor $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$ se situează de aceeași parte (de părți diferite) a planului tangent comun Σ, acesta va trece prin centrul lor de asemănare exterior (interior) Q.

În același mod vom demonstra că planele din a doua familie trec prin centrul de asemănare Q^* al sferelor $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$, distinct de Q.

Din propoziția demonstrată, reiese că fiecare dintre cele două familii despre care este vorba poate conține plane sau poate fi compusă numai din sfere. Prima (a doua familie) cuprinde sau nu cuprinde plane, după cum trec sau nu prin punctul Q (prin punctul Q^*) planele tangente comune la sferele $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$.

Să demonstrăm acum două propoziții la care va trebui să ne referim ulterior.

III. *Dacă sfera $O''(R'')$ are planul radical comun cu sferele neconcentrice $O(R)$ și $O'(R')$, atunci puterea m'' a oricărui punct M în raport cu sfera O'' se exprimă prin puterile m și m' ale aceluiași punct în raport cu sferele O și O', cu ajutorul egalității*

$$m'' = \lambda m + \lambda' m', \tag{1}$$

unde coeficienții λ și λ' satisfac condiția

$$\lambda + \lambda' = 1 \tag{2}$$

și nu depind nici de poziția punctului M, nici de razele sferelor (ci sînt determinate exclusiv de dispoziția centrelor celor trei sfere pe linia centrelor), *și reciproc.*

Și anume,

$$\lambda = \frac{O''O'}{OO'}\,;\ \lambda' = \frac{OO''}{OO'}\,, \tag{3}$$

unde segmentele se consideră ca mărime și ca semn.

Să demonstrăm această propoziție. Pentru un punct M arbitrar, avem, ca mărime și ca semn (compară cu soluția ex. 218),

$$MO''^2 = \lambda \cdot MO^2 + \lambda' \cdot MO'^2 - OO'' \cdot O''O'. \tag{4}$$

unde λ și λ' au valorile din (3). Această relație este valabilă, în particular, pentru un punct L, situat în planul radical comun al celor trei sfere,

$$LO''^2 = \lambda \cdot LO^2 + \lambda' \cdot LO'^2 - OO'' \cdot O''O'. \tag{5}$$

Notînd cu l puterea punctului L în raport cu fiecare dintre cele trei sfere, vom avea $l = LO^2 - R^2 = LO'^2 - R'^2 = LO''^2 - R''^2$, de unde

$$LO^2 = R^2 + l,\ LO'^2 = R'^2 + l,\ LO''^2 = R''^2 + l.$$

Substituind aceste valori ale lui LO^2, LO'^2 și LO''^2 în egalitatea (5), obținem, ținînd seama de relația (2),

$$R''^2 = \lambda \cdot R^2 + \lambda' \cdot R'^2 - OO'' \cdot O''O'.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, scăzînd membru cu membru ultima egalitate din (4), obținem

$$MO''^2 - R''^2 = \lambda \cdot (MO^2 - R^2) + \lambda' \cdot (MO'^2 - R'^2),$$

adică relația căutată (1).

Demonstrația reciprocei este evidentă. Dacă un punct L din planul radical al sferelor O și O' are în raport cu fiecare dintre aceste sfere puterea l, atunci puterea l'' a punctului L în raport cu sfera O'' este egală, în virtutea relațiilor (1) și (2), cu $l'' = (\lambda + \lambda')l = l$. Prin urmare, sfera O'' are planul radical comun cu sferele O și O'.

IV. *Dacă sfera O'' are centrul de asemănare Q comun cu sferele neconcentrice O și O' și notăm cu r, r' și r'' razele sferelor O, O' și O'', luate cu semnele plus sau minus, astfel încît razele a două sfere al căror centru de asemănare exterior (interior) coincide cu Q să capete același semn (respectiv semne opuse), atunci are loc relația*

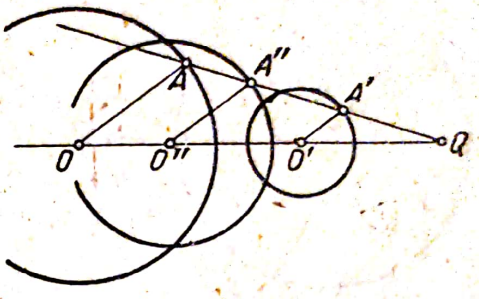


Fig. 222

$$r'' = \lambda r + \lambda' r', \tag{6}$$

unde λ și λ' sînt aceiași coeficienți (3) care satisfac condiția (2), ca și mai sus în egalitatea (1), și reciproc.

Să considerăm întîi cazul cel mai simplu (fig. 222), cînd punctul Q este centrul de asemănare *exterior* pentru fiecare pereche dintre cele trei sfere date, iar punctul O'' este situat *între* punctele O și O'. Dacă vom construi anumite raze paralele OA, $O'A'$ și $O''A''$ ale celor trei sfere, orientate în același sens, atunci punctele A, A' și A'' vor fi coliniare cu punctul Q. Pentru segmentul $O''A''$, paralel cu bazele OA și $O'A'$ ale trapezului $OAA'O'$, vom avea (ex. 130).

$$O''A'' = \frac{O''O' \cdot OA + OO'' \cdot O'A'}{OO'' + O''O'}.$$

Deoarece razelor r, r' și r'' trebuie să le atribuim, în cazul de față, aceleași semne, ajungem la relația (6).

În cazul general, formula (6) se deduce în mod analog, ținînd seama de semnele segmentelor (compară cu soluția ex. 221).

Trecem la demonstrația reciprocei. Să presupunem că pentru trei sfere S, S' și S'', ale căror centre O, O' și O'' sînt coliniare, este satisfăcută condiția (6), unde λ și λ' au valorile indicate la (3), iar r, r' și r'' sînt razele sferelor date, luate cu semnele corespunzătoare. Să notăm cu Q centrul de asemănare exterior sau interior al sferelor S și S', după cum, în relația (6), razele r și r' au același semn sau semne contrare. Să considerăm, mai departe, sfera $\bar{S}$ de centru O'', avînd centrul de asemănare Q comun cu sferele S și S'. În virtutea teoremei directe, vom avea

$$\bar{r} = \lambda r + \lambda' r',$$

unde $\bar{r}$ este raza sferei $\bar{S}$, luată cu semnul corespunzător, iar r și r' au aceleași valori ca în egalitatea (6). Din această relație și din (6), rezultă $r'' = \bar{r}$, astfel că sfera S'', concentrică cu $\bar{S}$, coincide cu ea. Deoarece sfera $\bar{S}$ are, prin construcție, centrul de asemănare comun cu sferele S și S', propoziția reciprocă este demonstrată.

Pentru a justifica acum modul în care am determinat unghiul α'', menționat în ipoteză, va trebui să demonstrăm următoarea propoziție:

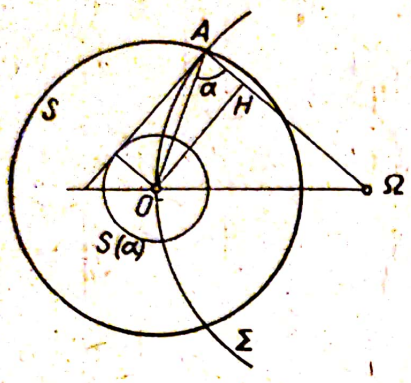


Fig. 223

V. *Dacă toate sferele și planele care intersectează două sfere date S și S' sub unghiurile constante α și α' și care aparțin* (în sensul propoziției I) *aceleiași familii, intersectează sub un unghi α'' o sferă S'', având planul radical comun cu S și cu S', atunci cele trei sfere $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$ au un centru de asemănare comun.*

Această propoziție este aproape evidentă, în cazul cînd familia considerată conține plane (compară cu cele spuse după demonstrația propoziției II). În adevăr, dacă Σ este unul oarecare dintre aceste plane, el este tangent la sferele $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$ și trece prin unul dintre centrele lor de asemănare Q. Deoarece planul Σ intersectează sfera S'' sub unghiul α'', el este tangent și la sfera $S''(\alpha'')$. Deoarece planul tangent comun Σ la cele trei sfere $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$, ale căror centre sînt coliniare, trece prin centrul de asemănare Q al sferelor $S(\alpha)$ și $S'(\alpha')$, punctul Q va fi centrul de asemănare comun al sferelor $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$.

Să dăm acum demonstrația generală a propoziției noastre, care nu depinde de faptul dacă familia respectivă conține sau nu plane.

Să notăm cu Σ o sferă oarecare a acestei familii, cu O și cu Ω centrele sferelor S și Σ, cu ρ raza sferei Σ și cu ω, ω', ω'' puterile punctului Ω în raport cu sferele S, S' și S''.

Dacă A este unul dintre punctele de intersecție ale sferei Σ cu sfera S (fig. 223), atunci avem $\Omega O^2 = \Omega A^2 + OA^2 \mp 2\Omega A \cdot AH$, unde H este proiecția punctului O pe dreapta ΩA, iar semnul de sus (de jos) corespunde unui unghi $OA\Omega$ ascuțit (obtuz). De aici, avem

$$\Omega O^2 - OA^2 = \Omega A^2 \mp 2\Omega A \cdot AH.$$

Segmentul AH este însă egal, cum se vede ușor (v. fig. 223), cu raza sferei $S(\alpha)$. Notînd cu r raza acestei sfere, luată cu semnul plus (cu semnul minus) pentru un unghi $OA\Omega$ ascuțit (obtuz), vom avea

$$\omega = \rho^2 - 2r\rho. \tag{7}$$

Notînd analog cu r' și cu r'' razele sferelor $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$, luată fiecare cu semnul cuvenit, vom găsi, pe aceeași cale,

$$\omega' = \rho^2 - 2r'\rho; \quad \omega'' = \rho^2 - 2r''\rho. \tag{7'}$$

Deoarece sferele S, S' și S'' au, prin ipoteză, planul radical comun, puterile ω, ω' și ω'' ale punctului Ω în raport cu aceste sfere vor fi legate între ele (propoziția III) prin relația

$$\omega'' = \lambda\omega + \lambda'\omega'.$$

Substituind aici pentru ω, ω', ω'' valorile aflate pentru ele din (7) și (7'), vom obține, ținînd seama de relația (2), dependența

$$r'' = \lambda r + \lambda' r'.$$

Această egalitate ne arată (propoziția IV) că sferele $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$ au centrul de asemănare comun.

În cazul a trei sfere date S, S' și S'', are loc următoarea propoziție, analogă cu propoziția I:

VI. *Toate sferele și planele care intersectează sub unghiuri constante α, α' și α'' trei sfere date S, S' și S'', ale căror centre nu sînt coliniare, formează cel mult patru familii, astfel că o sferă S''' avînd planul radical comun cu sferele S, S' și S'' și intersectînd o sferă a uneia oarecare dintre aceste familii va fi secantă la toate sferele acestei familii, sub un acelaşi unghi.*

Demonstrația este în totul analogă cu cea a propoziției I.

Mulțimea sferelor care intersectează sferele S, S' și S'' sub unghiuri respectiv egale cu α, α' și α'' poate fi distribuită în opt clase. Anume, vom încadra în aceeași clasă toate sferele care intersectează pe S, S' și S'' sub unghiuri strict egale, respectiv pentru fiecare dintre cele opt clase, cu

(*1*) α, α' și α'';	(*2*) 2dr $-\alpha$, 2dr $-\alpha'$ și 2dr$-\alpha''$;	(I)
(*3*) 2dr $-\alpha$, α' și α'';	(*4*) α, 2dr $-\alpha'$ și 2dr $-\alpha''$;	(II)
(*5*) α, 2dr $-\alpha'$ și α'';	(*6*) 2dr $-\alpha$, α' și 2dr $-\alpha''$;	(III)
(*7*) α, α' și 2dr $-\alpha''$;	(*8*) 2dr $-\alpha$, 2dr $-\alpha'$ și α''.	(IV)

Sferele din clasele (*1*) și (*2*) le vom denumi sferele din prima familie, pe cele din clasele (*3*) și (*4*), sferele din a doua familie etc. și vom arăta că fiecare dintre aceste patru familii se bucură de proprietatea cerută. Este suficient să demonstrăm aceasta pentru sferele din prima familie, deoarece fiecare dintre celelalte trei familii se obține din prima, prin înlocuirea unuia dintre unghiurile α, α' și α'' prin suplementul său.

Spre deosebire de ceea ce s-a spus în cazul a două sfere S și S', cînd avem trei sfere date, pot exista toate cele patru familii de sfere sau o parte a acestor familii; în sfîrșit poate să nu existe nici o sferă care să intersecteze cele trei sfere date sub unghiurile date (pentru cazul $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$ (compară cu Geometria plană, pp. 219—220, fig. 239).

Să presupunem că, în prima familie, există o sferă Σ_0 din clasa (*1*), adică o sferă care intersectează sferele S, S' și S'' sub unghiuri strict egale cu α, α' și α''. Fie, mai departe, Σ o altă sferă din prima familie, aparținînd primei (celei de a doua) clase, adică secantă la sferele S, S' și S'' sub unghiuri strict egale cu α, α' și α'' (strict egale cu 2dr $-\alpha$, 2dr $-\alpha'$ și 2dr $-\alpha''$). Deoarece sfera S intersectează sferele Σ_0 și Σ sub unghiuri strict egale (strict suplementare), ea le va intersecta după două cercuri antiomoloage în raport cu centrul de asemănare exterior (interior) P al sferelor Σ_0 și Σ; același lucru se întîmplă și cu sferele S' și S''. De aici rezultă că

punctul P are, în raport cu sferele S, S' și S'', aceeași putere p, egală cu puterea inversiunii I de pol P, care transformă sfera Σ_0 în sfera Σ (iar pe fiecare dintre sferele S, S' și S'' în ea însăși). De aceea, punctul P se află pe axa radicală a sferelor S, S' și S'', deci el va avea aceeași putere p și în raport cu orice sferă S''' având axa radicală comună cu sferele S, S' și S''. Prin urmare, sfera S''' este transformată în ea însăși prin inversiunea I și, deci, ea intersectează sferele Σ_0 și Σ (dacă intersectează una dintre sferele Σ_0 și Σ) sub unghiuri strict egale (strict suplementare).

Dacă sfera Σ care aparține clasei (I) este egală cu sfera Σ_0, atunci aceste din urmă raționamente trebuie iarăși modificate (v. mai sus, cazul a două sfere date S și S'). În acest caz, inversiunea I este înlocuită, ca și mai sus, printr-o simetrie I_0 în raport cu planul radical al sferelor Σ_0 și Σ.

Așadar, toate sferele Σ care intersectează sferele S, S' și S'' sub unghiuri strict egale cu α, α' și α'' (strict egale cu $2dr - \alpha$, $2dr - \alpha'$ și $2dr - \alpha''$) sînt secante la sfera S''', sub un unghi strict egal (strict suplementar) cu cel sub care ea este intersectată de sfera Σ_0. Dacă nu vom face distincție între cele două unghiuri formate de sfera Σ cu sfera S''', vom putea spune că toate sferele din prima familie intersectează sub același unghi sfera S'''.

Propoziția considerată este demonstrată pentru sferele din prima familie, în ipoteza că printre sferele acestei familii există o sferă aparținînd clasei (I). Ca și mai sus, în cazul propoziției I, demonstrația se extinde și la cazul cînd prima familie nu conține o astfel de sferă, la celelalte familii de sfere, precum și la cazul cînd sfera Σ este înlocuită printr-un plan.

Putem considera acum că propoziția VI este complet demonstrată.

Pentru planele care intersectează sferele S, S' și S'' sub unghiurile α, α' și α'' și sînt deci tangente la sferele $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$, are loc următoarea propoziție:

VII. *Planele care intersectează sub unghiurile constante α, α' și α'' trei sfere date S, S' și S'' ale căror centre nu sînt coliniare și care aparțin* (în sensul propoziției VI) *aceleiași familii (unor familii diferite), trec prin aceeași axă de asemănare (prin axe de asemănare diferite) a sferelor $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$.*

Demonstrația este analogă cu a propoziției II, astfel că nu o vom mai da.

Din propoziția VII reiese că, fiecare dintre cele patru familii menționate conține sau nu plane, după cum prin axa de asemănare care corespunde familiei trec sau nu plane tangente comune la sferele $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$ și $S''(\alpha'')$.

Să demonstrăm acum, pentru cazul a trei sfere date, propozițiile analoge cu cele de la III și IV.

VIII. *Dacă o sferă $O'''(R''')$ are cu sferele $O(R)$, $O'(R')$ și $O''(R'')$, ale căror centre nu sînt coliniare, axa radicală comună, atunci puterea m''' a oricărui punct M în raport cu sfera O''' se exprimă prin puterile m, m' și m'' ale aceluiași punct în raport cu sferele O, O' și O'' prin egalitatea*

$$m''' = \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'', \tag{8}$$

unde coeficienții λ, λ' și λ'' satisfac condiția

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 1 \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

și nu depind nici de poziția punctului M, nici de razele sferelor (ci sînt determinate exclusiv de dispoziția centrelor celor patru sfere în planul centrelor), și reciproc.

Și anume,

$$\lambda = \frac{\text{aria } O'''O'O''}{\text{aria } OO'O''}\,;\ \lambda' = \frac{\text{aria } OO'''O''}{\text{aria } OO'O''}\,;\quad \lambda = \frac{\text{aria } OO'O'''}{\text{aria } OO'O''}\,, \tag{10}$$

unde ariile se consideră ca mărime și ca semn (compară cu soluția probl. 324).

Pentru demonstrație, vom presupune că dreapta OO''' intersectează dreapta $O'O''$ într-un punct O_0 (fig. 224), și nu este paralelă cu ea (putem alege întotdeauna astfel notațiile sferelor date, încît condiția noastră să fie îndeplinită).

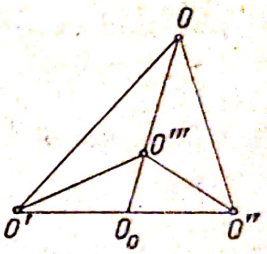


Fig. 224

Pentru orice punct M, vom avea, ca mărime și ca semn (compară cu soluția ex. 218),

$$MO'''^2 = \frac{O'''O_0}{OO_0}\cdot MO^2 + \frac{OO'''}{OO_0}\cdot MO_0^2 - OO'''\cdot O'''O_0$$

și, analog,

$$MO_0^2 = \frac{O_0O''}{O'O''}\cdot MO'^2 + \frac{O'O_0}{O'O''}\cdot MO''^2 - O'O_0\cdot O_0O'',$$

de unde deducem

$$MO'''^2 = \frac{O'''O_0}{OO_0}\cdot MO^2 + \frac{OO'''}{OO_0}\cdot\frac{O_0O''}{O'O''}\cdot MO'^2 +$$

$$+\frac{OO'''}{OO_0}\cdot\frac{O'O_0}{O'O''}\cdot MO''^2 - \left(\frac{OO'''}{OO_0}\cdot O'O_0\cdot O_0O'' + OO'''\cdot O'''O_0\right). \tag{11}$$

Mai departe, avem, iarăși ca mărime și ca semn (fig. 224),

$$\frac{O'''O_0}{OO_0} = \frac{\text{aria } O'''O'O_0}{\text{aria } OO'O_0} = \frac{\text{aria } O'''O_0O''}{\text{aria } OO_0O''} = \frac{\text{aria } O'''O'O_0 + \text{aria } O'''O_0O''}{\text{aria } OO'O_0 + \text{aria } OO_0O''} =$$

$$= \frac{\text{aria } O'''O'O''}{\text{aria } OO'O''} = \lambda; \tag{12}$$

$$\frac{OO'''}{OO_0}\cdot\frac{O_0O''}{O'O''} = \frac{\text{aria } OO'''O''}{\text{aria } OO_0O''}\cdot\frac{\text{aria } OO_0O''}{\text{aria } OO'O''} = \frac{\text{aria } OO'''O''}{\text{aria } OO'O''} = \lambda' \tag{12'}$$

și, analog,

$$\frac{OO'''}{OO_0}\cdot\frac{O'O_0}{O'O''} = \lambda''. \tag{12''}$$

Egalitatea (11) devine acum

$$MO'''^2 = \lambda\cdot MO^2 + \lambda'\cdot MO'^2 + \lambda''\cdot MO''^2 + \lambda_0, \tag{13}$$

unde coeficienții λ, λ' și λ'' au valorile (10), iar cu λ_0 s-a notat ultimul termen din membrul al doilea al egalității (11). Această relație este valabilă, în particular, pentru un punct L arbitrar, situat pe axa radicală comună a celor patru sfere:

$$LO'''^2 = \lambda \cdot LO^2 + \lambda' \cdot LO'^2 + \lambda'' \cdot LO''^2 + \lambda_0. \qquad (14)$$

Notînd cu l puterea punctului L în raport cu fiecare dintre cele patru sfere, vom avea

$$LO^2 = R^2 + l;\ LO'^2 = R'^2 + l;\ LO''^2 = R''^2 + l;\ LO'''^2 = R'''^2 + l.$$

Introducînd aceste valori în egalitatea (14), căpătăm, ținînd seama de (9),

$$R'''^2 = \lambda \cdot R^2 + \lambda' \cdot R'^2 + \lambda'' \cdot R''^2 + \lambda_0.$$

În sfîrșit, scăzînd membru cu membru ultima egalitate din (13), căpătăm

$$MO'''^2 - R'''^2 = \lambda\,(MO^2 - R^2) + \lambda'(MO'^2 - R'^2) + \lambda''(MO''^2 - R''^2),$$

adică relația căutată (8).

Reciproca se demonstrează fără dificultate. Dacă un punct L de pe axa radicală a sferelor O, O' și O'' are în raport cu fiecare dintre aceste sfere puterea l, atunci puterea l''' a aceluiași punct L în raport cu sfera O''' va fi, în baza relațiilor (8) și (9) egală cu $l''' = l(\lambda + \lambda' + \lambda'') = l$. Prin urmare, sfera O''' are axa radicală comună cu sferele O, O' și O''.

IX. *Dacă* sfera O''' *are cu sferele* O, O' *și* O'', *ale căror centre sînt necoliniare, axa de asemănare comună* q (adică dacă una dintre axele de asemănare q ale sferelor O, O' și O'' este și axă de asemănare a fiecărui triplet dintre cele patru sfere date, alese în așa fel încît centrele lor să nu fie coliniare) *și notăm cu* r, r', r'' *și* r''' *razele sferelor* O, O' O'' *și* O''', *luate cu semnele plus sau minus, astfel că razele a două sfere al căror centru de asemănare exterior (interior) este pe axa* q *au același semn (respectiv, semne contrare), are loc egalitatea*

$$r''' = \lambda r + \lambda' r' + \lambda'' r'', \qquad (15)$$

unde λ, λ' *și* λ'' *sînt aceiași coeficienți* (10) *care satisfac condiția* (9), *ca și mai sus în relația* (8), *și reciproc.*

Să presupunem, ca și la demonstrația propoziției precedente, că dreapta OO''' intersectează dreapta $O'O''$ într-un punct O_0.

Dacă vom construi anumite raze paralele OA, $O'A'$, $O''A''$ și $O'''A'''$ ale celor patru sfere, orientînd pe fiecare dintre ele în sensul cuvenit, punctele A, A', A'' și A''' vor fi situate în același plan, care trece prin axa de asemănare q. Să notăm cu A_0 punctul de intersecție al acestui plan cu dreapta care trece prin punctul O_0 și este paralelă cu OA. Segmentul O_0A_0 va fi raza unei sfere avînd axa de asemănare q, comună cu sferele date; vom nota această sferă cu O_0.

Aplicînd acum propoziția IV celor trei sfere O', O'' și O_0, al căror centru de asemănare comun este punctul de intersecție al dreptelor $O'O''$ și q găsim

$$r_0 = \frac{O_0O''}{O'O''} \cdot r' + \frac{O'O_0}{O'O''} \cdot r''.$$

Analog, pentru sferele O, O_0 și O''', vom avea

$$r''' = \frac{O'''O_0}{OO_0} \cdot r + \frac{OO'''}{OO_0} \cdot r_0.$$

De aici avem

$$r''' = \frac{O'''O_0}{OO_0} \cdot r + \frac{OO'''}{OO_0} \cdot \frac{O_0O''}{O'O''} \cdot r' + \frac{OO'''}{OO_0} \cdot \frac{O'O_0}{O'O''} \cdot r''.$$

Ținînd seama de egalitățile (12), (12′) și (12″), obținem tocmai relația căutată (15).

Demonstrația reciprocei este în totul analogă cu demonstrația propoziției corespunzătoare pentru două sfere (v. mai sus, partea finală a demonstrației propoziției IV).

Să enunțăm, în sfîrșit, pentru cazul a trei sfere, următoarea propoziție, analogă cu propoziția V.

X. *Dacă toate sferele și planele care intersectează trei sfere date S, S' și S'', avînd centrele necoliniare, sub unghiuri constante α, α' și α'', și care aparțin* (în sensul propoziției VI) *aceleiași familii, intersectează o sferă S''' avînd cu sferele S, S' și S'' axa radicală comună, sub un unghi α''', atunci cele patru sfere $S(\alpha)$, $S'(\alpha')$, $S''(\alpha'')$ și S''' (α''') au axa de asemănare comună.*

Demonstrația acestei propoziții este în totul analogă cu demonstrația propoziției V, numai că, în afara celor trei egalități (7) și (7′), vom avea o egalitate analogă și pentru sfera S''', iar în locul trimiterilor la propozițiile III și IV, va trebui să ne referim respectiv la propozițiile VIII și IX.

934. Să începem cu rezolvarea următoarei probleme.

I. *Să se construiască o sferă Σ, secantă sub unghiuri egale la cinci sfere date S_1, S_2, S_3, S_4 și S_5* (compară cu probl. 402).

După cum s-a arătat la nr. **684**, toate sferele care intersectează sub unghiuri egale patru sfere date S_1, S_2, S_3 și S_4 formează opt familii distincte: fiecăruia dintre cele opt plane de asemănare ale celor patru sfere îi corespunde cîte una dintre aceste opt familii, astfel că toate sferele familiei au ca plan radical comun acest plan. Linia centrelor sferelor din fiecare familie va fi perpendiculara coborîtă din centrul radical I al celor patru sfere pe același plan de asemănare. Cercurile după care o sferă a uneia dintre aceste familii intersectează două dintre cele patru sfere sînt antiomoloage în raport cu acela dintre cele două centre de asemănare ale ultimelor două sfere, care se află în planul de asemănare considerat.

De aici reiese că centrul O al uneia dintre sferele căutate, pe care o vom nota cu Σ, este situat pe perpendiculara D_5, coborîtă din centrul radical I_5 al sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4 pe unul dintre planele lor de asemănare σ_5, precum și pe perpendiculara D_4, coborîtă din centrul radical I_4 al sferelor S_1, S_2, S_3 și S_5, pe unul dintre planele lor de asemănare σ_4. În aceste condiții, dacă punctele de intersecție ale sferei Σ cu sferele S_2 și S_3 sînt antiomoloage două cîte două în raport cu centrul lor de asemănare S_{23}, punctele de intersecție ale aceleiași sfere cu sferele S_1 și S_3 sînt antiomoloage două cîte două în raport cu centrul lor de asemănare S_{13} și punctele de intersecție ale aceleiași sfere cu sferele S_1 și S_2 sînt antiomoloage două cîte două în raport cu.

centrul lor de asemănare S_{12}, atunci cele trei centre de asemănare S_{23}, S_{13} și S_{12} se situează atît în planul σ_5, cît și în planul σ_4, și se situează deci pe aceeași dreaptă, anume pe una dintre axele de asemănare s_{45} ale sferelor S_1, S_2 și S_3. Deoarece această dreaptă s_{45} este conținută în planul centrelor sferelor S_1, S_2 și S_3, iar dreapta I_4I_5 — axa radicală a acelorași trei sfere — este perpendiculară pe acest plan al centrelor, rezultă că perpendicularele D_4 și D_5, coborîte din punctele I_4 și I_5 respectiv pe planele σ_4 și σ_5, care trec prin dreapta s_{45}, vor fi situate în același plan și vor fi deci, în general, concurente.

Așadar, ajungem la următoarea *construcție a centrelor sferelor căutate.* Alegem arbitrar unul dintre cele opt plane de asemănare σ_5 ale sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4 și unul dintre cele două plane de asemănare σ_4 ale sferelor S_1, S_2, S_3 și S_5, care trec prin axa de asemănare s_{45} a sferelor S_1, S_2 și S_3, situată în planul σ_5. Coborîm pe planul σ_5 perpendiculara din centrul radical I_5 al sferelor S_1, S_2, S_3 și S_4, iar pe planul σ_4 perpendiculara din centrul radical I_4 al sferelor S_1, S_2, S_3 și S_5; intersecția acestor două perpendiculare (dacă sînt concurente) va fi tocmai punctul căutat.

Fiecăruia dintre cele opt plane de asemănare ale primelor patru sfere date îi corespund, în general, două poziții posibile ale centrului sferei căutate, și obținem în total deci 16 puncte.

Să considerăm acum unul dintre aceste 16 puncte — îl vom nota cu O — și să construim sfera căutată Σ, avînd ca centru acest punct. Pentru aceasta, construim o sferă Σ_5 care intersectează sferele S_1, S_2, S_3 și S_4 sub unghiuri egale și care corespunde planului de asemănare σ_5 ales (această sferă Σ_5 este determinată de un punct arbitrar A_1 al sferei S_1 și de trei puncte ale sferelor S_2, S_3 și S_4, care sînt antiomoloagele lui A_1 în raport cu centrele de asemănare conținute în planul σ_5 (compară cu nr. **684**). Deoarece sfera căutată Σ și sfera Σ_5 trebuie să aibă pe σ_5 ca plan radical, rămîne să construim sfera Σ de centru O, astfel ca planul σ_5 să fie planul radical al sferei Σ și al sferei Σ_5 (dreapta care unește centrul sferei Σ_5 cu punctul O este, cum știm, perpendiculară pe σ_5, deoarece și punctul O și centrul sferei Σ_5 sînt situate pe perpendiculara coborîtă din punctul I_5 pe planul σ_5). În acest scop, construim o sferă Σ_0, cu centrul în planul σ_5, ortogonală la Σ_5, iar apoi o sferă Σ de centru O, ortogonală la sfera Σ_0. Dacă punctul O este interior sferei Σ_0, sau dacă sfera Σ, construită cum s-a arătat, nu va fi secantă la sferele date, atunci nu există sfera căutată cu centrul în punctul O, ales de noi.

Dacă sfera Σ de centru O, construită cum s-a arătat, intersectează una dintre cele patru sfere S_1, S_2, S_3 și S_4, atunci, în virtutea modului cum a fost definită, ea va intersecta sub unghiuri egale toate aceste patru sfere. Trebuie să mai demonstrăm însă că sfera Σ, pe care am construit-o, este secantă sub unghiuri egale la toate cele cinci sfere date. Aceasta se poate face în modul adoptat la soluția problemei 402 din Geometria plană.

Numărul maxim de soluții este 16.

Pentru a nu întrerupe, în expunerea care urmează, soluția celei de-a doua dintre problemele puse, vom rezolva în prealabil următoarele două probleme.

II. *Să se construiască o sferă avînd planul radical comun cu două sfere date S și S' și ortogonală la o a treia sferă dată Σ.*

Folosind nr. **457**, este ușor să construim trei sfere oarecare Σ', Σ'' și Σ''' cu centrele necoliniare și ortogonale la cele două sfere date S și S'. Evident, fiecare dintre aceste sfere va fi ortogonală și la toate sferele avînd cu S și cu S' planul radical comun, deci și la sfera căutată. De aceea, sfera căutată (dacă există) poate fi construită ca sferă ortogonală la cele patru sfere Σ, Σ', Σ'' și Σ'''. Centrul ei este centrul radical al ultimelor patru sfere, iar raza ei este tangenta dusă din centrul radical la una dintre aceste patru sfere.

Problema are întotdeauna o soluție, dacă sferele date S și S' sînt secante sau tangente. Pentru cazul a două sfere secante, aceasta s-a demonstrat la soluția exercițiului 676, pentru cazul a două sfere tangente, demonstrația este analogă.

III. *Să se construiască o sferă ortogonală la trei sfere date avînd centrele necoliniare și care să intersecteze sub un unghi dat o a patra sferă dată.*

Dacă primele trei sfere date au două puncte comune, atunci luăm pe unul dintre ele ca pol de inversiune și sîntem conduși la următoarea problemă: să se construiască o sferă cu centrul într-un punct dat, care să intersecteze o sferă dată sub un unghi dat. Această problemă se rezolvă la fel cu cea corespunzătoare în plan (soluția ex. 259, 1°).

Dacă primele trei dintre sferele date au numai un singur punct comun, îl luăm ca pol de inversiune și ajungem la următoarea problemă: să se construiască un plan perpendicular pe o dreaptă dată și care să intersecteze o sferă dată sub un unghi dat. Metoda pentru rezolvarea acestei probleme este evidentă.

În sfîrșit, dacă primele trei sfere date nu au puncte comune, luăm ca pol de inversiune un punct arbitrar al cercului, prin care trec toate sferele ortogonale la cele trei sfere date (ex. 697) și sîntem conduși la următoarea problemă: să se construiască un plan secant sub un unghi drept la trei sfere date ale căror centre sînt coliniare, adică un plan care trece printr-o dreaptă dată și intersectează o sferă dată sub un unghi dat. Metoda pentru rezolvarea acestei probleme este evidentă.

Numărul maxim de soluții este doi.

Trecem la rezolvarea celei de-a doua probleme.

IV *Să se construiască o sferă care intersectează patru sfere date* S, S', S'' și S''' *sub unghiuri respectiv egale cu* α, α', α'' *și* α'''. Vom da aici o soluție a acestei probleme în totul analogă celei date pentru problema corespunzătoare în plan (soluția probl. 402 bis).

Dacă luăm în considerare unghiul format de razele a două sfere, duse în unul dintre punctele lor de intersecție (v. soluția ex. 933), atunci este firesc să împărțim sferele căutate în opt familii, după cum sfera căutată intersectează cele patru sfere date sub unghiuri *strict* egale cu

1) $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ sau $2dr - \alpha, 2dr - \alpha', 2dr - \alpha'', 2dr - \alpha'''$;

2) $2dr - \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ sau $\alpha, 2dr - \alpha', 2dr - \alpha'', 2dr - \alpha'''$;

3) $\alpha, 2dr - \alpha', \alpha'', \alpha'''$ sau $2dr - \alpha, \alpha', 2dr - \alpha'', 2dr - \alpha'''$ etc.

Pentru a fixa ideile, vom începe să căutăm sferele care aparțin primei familii și vom presupune chiar că sfera Σ căutată intersectează pe cele date sub unghiuri *strict* egale cu α, α', α'' și α'''.

Scanned with OKEN Scanner

Să construim (cum s-a indicat la soluția ex. 933) o sferă Σ_1, care intersectează sferele S și S' sub unghiuri strict egale cu α și cu α' (sau o sferă Σ_1', care le intersectează sub unghiuri strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \alpha'$). În acest caz, sfera căutată Σ și sfera Σ_1 (sau Σ_1') vor aparține (în sensul ex. 933) aceleiași familii de sfere care intersectează pe S și pe S' sub unghiurile α și α'. Prin urmare, orice sferă având planul radical comun cu S și cu S' va intersecta, în baza celor spuse la soluția exercițiului 933, sferele Σ și Σ_1 sub unghiuri strict egale (sferele Σ și Σ_1' sub unghiuri strict suplementare).

Să găsim, mai departe, printre sferele care au planul radical comun cu S și cu S', două sfere $\overline{S}$ și $\overline{S}'$, tangente la sfera Σ_1 (sau Σ_1'); aceasta se poate face, folosind metoda indicată la nr. **684.** Vom presupune, deocamdată, că astfel de sfere există. Aceste două sfere vor fi tangente, în virtutea celor arătate mai sus, și la sfera căutată Σ (deoarece tangența este o intersecție sub unghiul O sau $2dr$). În aceste condiții, sfera $\overline{S}$ va avea contacte de aceeași speță cu sferele Σ și Σ_1 (și de speță diferită cu sferele Σ și Σ_1'), deoarece trebuie să le intersecteze sub unghiuri strict egale (strict suplementare). Același lucru este valabil și pentru sfera $\overline{S}'$.

Așadar, *sfera căutată trebuie să fie tangentă la două sfere* $\overline{S}$ *și* $\overline{S}'$, *și anume având contacte de speță perfect determinată cu fiecare dintre ele (ori interioare, ori exterioare), și să intersecteze sferele* S'' *și* S''' *sub unghiuri strict egale cu* α'' *și* α'''.

Să construim acum o sferă Σ_2, care intersectează sfera S'' sub un unghi strict egal cu α'' și care este tangentă la sfera $\overline{S}$ cu contact de aceeași speță ca și sfera Σ (sau o sferă Σ_2', care intersectează sfera S'' sub un unghi strict egal cu $2dr - \alpha''$ și care are cu sfera $\overline{S}$ un contact de speță diferită decît contactul sferelor Σ și $\overline{S}$). Orice sferă având planul radical comun cu sferele $\overline{S}$ și S'' intersectează, iarăși în virtutea celor expuse în soluția exercițiului 933, sferele Σ și Σ_2, sub unghiuri strict egale (sferele Σ și Σ_2' sub unghiuri strict suplementare).

Deoarece printre sferele având planul radical comun cu sferele $\overline{S}$ și S'' există o sferă (anume chiar sfera $\overline{S}$) tangentă la sfera Σ_2 (sau la sfera Σ_2'), se va găsi, în general, printre aceleași sfere, și o a doua sferă $\overline{S}''$, tangentă la sfera Σ_2 (sau Σ_2'). În aceste condiții, sferele Σ și Σ_2 sînt tangente cu contacte de aceeași speță la sfera $\overline{S}''$ (iar sferele Σ și Σ_2' au cu ea contacte de speță diferită).

Așadar, *sfera căutată* Σ *trebuie să fie tangentă la cele trei sfere* $\overline{S}$, $\overline{S}'$ *și* $\overline{S}''$, *și anume având contacte de spețe perfecte determinate cu fiecare dintre ele (fie interioare, fie exterioare), și să intersecteze sfera* S''', *sub un unghi strict egal cu* α'''.

În sfîrșit, să construim o sferă Σ_3, care să intersecteze sfera S''' sub un unghi strict egal cu α''' și având cu sfera $\overline{S}$ un contact de aceeași speță ca și sfera Σ (sau o sferă Σ_3', care intersectează sfera S''' sub un unghi strict egal cu $2dr - \alpha'''$ și având cu sfera $\overline{S}$ un contact de speță diferită decît cel al sferelor Σ și $\overline{S}$). Orice sferă având cu $\overline{S}$ și cu S''' planul radical comun va in-

Scanned with OKEN Scanner

tersecta; iarăși conform celor arătate în soluția exercițiului 933, sferele Σ și Σ_3 sub unghiuri strict egale (sferele Σ și Σ_3' sub unghiuri strict suplementare).

Deoarece, printre sferele care au planul radical comun cu sferele $\overline{S}$ și S''', există o sferă (anume chiar $\overline{S}$) tangentă la sfera Σ_3 (sau Σ_3'), se va găsi, în general, printre aceste sfere, și o a doua sferă $\overline{S}'''$, tangentă la sfera Σ_3 (sau Σ_3'). În acest caz, sferele Σ și Σ_3 au contacte de aceeași speță cu sfera $\overline{S}'''$ (iar sferele Σ și Σ_3' au contacte de speță diferită).

Așadar, *sfera căutată* Σ *trebuie să fie tangentă la cele patru sfere* $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$ *și* $\overline{S}'''$, *pe care știm să le construim, și anume cu contacte cu fiecare din ele de speță perfect determinată (fie interioare, fie exterioare).*

Ne-am ocupat pînă acum de găsirea unei sfere Σ, din prima familie, care să intersecteze sferele S, S', S'' și S''' sub unghiuri strict egale cu α, α', α'' și α'''. Se vede ușor, reluînd raționamente analoge, că o sferă Σ', din aceeași familie, care intersectează cele patru sfere date sub unghiuri strict egale cu $2dr - \alpha$, $2dr - \alpha'$, $2dr - \alpha''$ și $2dr - \alpha'''$, trebuie să fie tangentă la aceleași sfere $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$ și $\overline{S}'''$ ca și sfera Σ. Numai că cele două sfere Σ și Σ' au contacte de speță diferită cu fiecare dintre cele patru sfere $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$ și $\overline{S}'''$. Aceasta rezultă din faptul că, la construcția sferei Σ', putem folosi aceleași sfere auxiliare Σ_1 sau Σ_1', Σ_2 sau Σ_2' și Σ_3 sau Σ_3', ca și mai sus. Numai că, de astă dată, sferele Σ_1 și Σ_1', Σ_2 și Σ_2', Σ_3 și Σ_3' își inversează rolurile.

Putem demonstra că, și reciproc, orice sferă tangentă la sferele $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$ și $\overline{S}'''$, în modul indicat (în sensul contactului exterior sau interior) intersectează sferele date sub unghiuri strict egale cu α, α', α'' și α''' sau cu $2dr - \alpha$, $2dr - \alpha'$, $2dr - \alpha''$ și $2dr - \alpha'''$.

Demonstrația este în totul analogă cu cea a propoziției corespunzătoare din plan (soluția probl. 402 *bis*).

Așadar, *sferele căutate* care aparțin primei familii dintre cele opt enumerate la începutul soluției acestei probleme, *adică cele care intersectează sferele date sub unghiuri strict egale cu* α, α', α'', α''' *sau cu* $2dr - \alpha$, $2dr - \alpha'$, $2dr - \alpha''$, $2dr - \alpha'''$, *sînt tangente la cele patru sfere* $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{S}''$, $\overline{S}'''$. În aceste condiții, ele aparțin uneia dintre cele opt familii de sfere tangente la aceste sfere, care corespunde unuia dintre cele opt plane de asemănare ale lor (**684**). În adevăr, din cele arătate mai sus, reiese că, dacă una dintre sferele căutate ale primei familii este tangentă la două dintre cele patru sfere, să zicem $\overline{S}$ și $\overline{S}'$, cu contacte de aceeași speță (de speță diferită), atunci și orice sferă din prima familie va avea cu ele contacte de aceeași speță (respectiv, contacte diferite).

Am presupus mai sus că, printre sferele avînd planul radical comun cu sferele S și S', se vor găsi două sfere $\overline{S}$ și $\overline{S}'$, tangente la sfera auxiliară Σ_1 (sau Σ_1'). Aceasta va avea loc întotdeauna, dacă sferele S și S' nu au puncte comune (compară cu soluția ex. 402 *bis*). Însă sferele $\overline{S}$ și $\overline{S}'$ pot exista și în cazul cînd sferele S și S' sînt secante.

În cazul cînd printre sferele avînd planul radical comun cu sferele S și S' nu există sfere tangente la cea căutată, și avem aceeași situație pentru fiecare dintre perechile de sfere S și S'', S și S''', S' și S'', S' și S''', S'' și S''', metoda adoptată de noi este inaplicabilă. Aceasta se poate întîmpla numai în cazul cînd fiecare pereche dintre cele patru sfere date are puncte comune.

Pentru a da soluția problemei noastre, valabilă și în acest caz, vom proceda după cum urmează. După ce am construit, ca mai sus, sfera auxiliară Σ_1 (sau Σ_1'), găsim printre sferele avînd planul radical comun cu S și cu S' o sferă S_0', ortogonală la Σ_1 (sau la Σ_1'). Procedeul construcției a fost indicat înainte (v. mai sus, II). Sfera căutată Σ (sau Σ') trebuie să fie de asemenea ortogonală la S_0', deoarece sfera Σ și sfera Σ_1 (sau Σ_1') intersectează pe S_0' sub unghiuri egale. În mod analog, putem construi sfera S_0'', avînd planul radical comun cu S și cu S'' și ortogonală la sfera căutată, precum și sfera S_0''', avînd cu S și cu S''' planul radical comun și ortogonală la sfera căutată.

Așadar, *sfera căutată* Σ *(sau* Σ'*) trebuie să intersecteze sfera* S *sub un unghi strict egal cu* α *(sau cu* $2dr-\alpha$*) și să fie ortogonală la sferele* S_0', S_0'' *și* S_0'''. Putem arăta că, și reciproc, orice sferă care satisface aceste condiții va satisface și condițiile problemei inițiale. Ajungem astfel la problema III, rezolvată mai sus.

Relevăm că această a doua metodă de rezolvare va fi, evident, aplicabilă în cazurile în care prima metodă s-ar putea dovedi nepotrivită, adică atunci cînd fiecare pereche dintre cele patru sfere date au puncte comune. În adevăr, în acest caz, problema construirii fiecăreia dintre sferele S_0', S_0'' și S_0''' are o soluție (v. mai sus, soluția problemei II). Însă această a doua metodă se poate dovedi nepotrivită în cazurile cînd prima metodă este vădit aplicabilă. În adevăr, dacă două dintre sferele date(să zicem S și S') sînt nesecante, atunci printre sferele care au axa radicală comună cu ele, s-ar putea să nu existe o sferă ortogonală la una dată (să zicem la Σ_1).

Pînă acum, am căutat sferele aparținînd primei familii dintre cele opt despre care a fost vorba la începutul soluției. Pe aceeași cale, putem găsi sferele aparținînd fiecăreia dintre celelalte șapte familii. Trebuie numai să înlocuim unul sau două dintre unghiurile α, α', α'' și α''' cu suplementele lor. Este esențial că, în aceste condiții, va trebui să folosim sfere auxiliare analoge cu $\overline{S}$, $\overline{S'}$, $\overline{S''}$ și $\overline{S'''}$ sau cu S_0', S_0'' și S_0''', însă în general, *distincte de ultimele.*

Fiecare dintre cele opt familii conține cel mult două sfere căutate, astfel că numărul maxim de soluții ale problemei este 16.

Să trecem, în sfîrșit, la soluția ultimei probleme.

V. *Să se construiască o sferă avînd tangente comune de lungime dată cu patru sfere date* S, S', S'' *și* S'''.

Vom da aici o rezolvare a acestei probleme, în totul analogă celei date problemei corespunzătoare în plan (compară cu soluția probl. 403).

Să purtăm pe una dintre tangentele într-un punct arbitrar A al primei sfere date S, al cărei centru îl vom nota cu O, un segment AA_1 de lungime dată și să ducem prin punctul A_1 o sferă S_1, concentrică cu S. Toate sferele

avînd o tangentă comună cu sfera S, egală cu AA_1, vor intersecta evident sfera S_1 sub același unghi, egal cu unghiul AOA_1.

Așadar, sfera căutată trebuie să intersecteze o anumită sferă S_1 concentrică cu S, sub un unghi determinat. Pe aceeași cale, putem determina unghiurile dintre sfera căutată și sferele perfect determinate S_1', S_1'' și S_1''', respectiv concentrice cu celelalte trei sfere date S', S'' și S'''.

Așadar, problema noastră se reduce la cea precedentă (IV).

935. *Generalizarea exercițiului* 237. *Dacă două puncte A și B sînt conjugate în raport cu sfera O, atunci:*

1) *sferele avînd ca centre punctele A și B și ortogonale la sfera O vor fi ortogonale între ele;*

2) *sfera construită pe segmentul AB ca diametru este ortogonală la sfera O;*

3) *pătratul distanței dintre punctele A și B este egal cu suma puterilor acestor puncte în raport cu sfera O.*

Pentru demonstrație, este suficient să intersectăm sferele considerate cu planul OAB și să aplicăm figurii obținute rezultatele de la exercițiul 237.

Generalizarea exercițiului 241. *Dacă P și Q sînt punctele limită* (ex. 696) *a două sfere, atunci:*

1° *planul polar al fiecăruia dintre aceste puncte limită în raport cu cele două sfere va fi același plan, care trece prin celălalt punct limită;*

2° *nu există alte puncte* (la distanță finită) *care să aibă același plan polar în raport cu cele două sfere.*

Demonstrația este în totul analogă aceleia date în soluția exercițiului 241.

Generalizarea exercițiului 242. *Dacă două puncte sînt unul inversul celuilalt în raport cu o sferă, atunci raportul dintre distanțele lor la un punct al acestei sfere este constant.*

Fie punctele A și B inverse în raport cu sfera O, iar M un punct arbitrar al acestei sfere. Ducem prin punctele O, A și M un plan (el va trece și prin punctul B) și aplicăm figurii obținute rezultatele de la exercițiul 242.

Generalizarea exercițiului 245. *Sferele care sînt inversele unor sfere avînd planul radical comun au și ele planul radical comun; sferele inverse unor sfere avînd axa radicală comună au și ele axa radicală comună.*

În adevăr, sferele S avînd planul radical comun pot fi caracterizate ca sfere ortogonale la trei sfere date, S', S'', și S''', avînd centrele în acest plan radical. Totodată, aceste din urmă trei sfere trebuie astfel alese, încît centrele lor să nu fie coliniare, altfel spus, astfel ca *nu* orice sferă ortogonală la două dintre ele să fie ortogonală și la a treia.

Sferele S_1', S_1'' și S_1''', inversele sferelor S', S'' și S''', vor avea și ele această proprietate, deoarece unghiul a două sfere se păstrează la inversiune. Din aceeași cauză, sferele S_1, inversele sferelor S, vor fi ortogonale la sferele S_1', S_1'' și S_1''' și vor avea, de aceea, planul radical comun, anume planul centrelor sferelor S_1', S_1'' și S_1'''.

Analog, sferele S, care au axa radicală comună, pot fi caracterizate ca sfere ortogonale la două sfere S' și S'' avînd centrele pe această axă. Prin urmare, sferele S_1, inversele sferelor S, vor fi ortogonale la sferele S_1' și S_1'', inversele sferelor S' și S'', și vor avea, deci, axa radicală comună, anume linia centrelor sferelor S_1' și S_1''.

Observație. Printre „sferele" avînd planul radical comun cu sferele date, putem considera, în cazul de față, și însuși planul radical; printre „sferele" avînd axa radicală comună, putem considera și toate planele care trec prin ea. Aceste plane se transformă prin inversiune în sfere avînd cu celelalte sfere transformate respectiv planul radical comun sau axa radicală comună.

Generalizarea exercițiului 246. *Transformînd prin inversiune definiția sferei ca loc geometric al punctelor egal depărtate de un punct dat, obținem propoziția dată la nr.* **447** *bis. corolarul II.*

Demonstrația este în totul analogă cu aceea din soluția exercițiului 246.

Generalizarea exercițiului 247. *S-a construit o sferă, inversa unei sfere date, într-o inversiune de pol dat. Punctul care, în inversiunea considerată, este inversul centrului noii sfere este, totodată, inversul polului de inversiune în raport cu sfera dată.*

Demonstrația este iarăși în totul analogă demonstrației propoziției corespunzătoare din Geometria plană (v. soluția ex. 247).

Generalizarea exercițiului 248. *Să se transforme două sfere date, fără puncte comune, în două sfere concentrice, printr-o aceeași inversiune.*

Două sfere concentrice se caracterizează prin faptul că există o infinitate de plane ortogonale simultan la ambele sfere (planele care trec prin centrul comun), dar nu există sfere ortogonale simultan la ambele (deoarece două sfere concentrice nu au plan radical).

Prin urmare, pentru a transforma printr-o aceeași inversiune două sfere date în două sfere concentrice, trebuie să transformăm în plane toate sferele ortogonale la cele două sfere date. Pentru aceasta, trebuie să luăm ca pol de inversiune unul dintre punctele comune tuturor sferelor ortogonale la cele două date, adică (ex. 696) unul dintre cele două puncte limită ale sferelor date.

935 *bis. Generalizarea problemei* 401. *Se dau patru sfere* A_0, B_0, C_0 *și* D_0, *de centre* A,B,C *și* D *și de raze* a,b,c, *și* d. *Fie* I *centrul radical a alte patru sfere, concentrice cu primele și avînd razele respectiv egale cu* $a+h$, $b+h$, $c+h$ *și* $d+h$, *iar* N *un punct de pe dreapta* AI, *astfel ca* $AN : AI = a : (a+h)$. *Dacă* h *variază, punctele* I *și* N *descriu drepte, dintre care prima trece prin centrele sferelor tangente cu contacte de aceeași speță la sferele date, iar a doua prin punctele de contact ale acestor sfere cu sfera* A.

O propoziție analogă are loc pentru sferele tangente cu contacte de speță diferită la sferele A_0, B_0, C_0 *și* D_0; *trebuie numai să înlocuim unul sau două dintre segmentele* $a+h$, $b+h$, $c+h$ *și* $d+h$ *respectiv prin* $a-h$, $b-h$, $c-h$ *și* $d-h$. (Astfel, pentru sferele care au contacte de aceeași speță cu A_0, B_0 și C_0 și de speță diferită cu sferele A_0 și D_0, trebuie să luăm segmentele $a+h$, $b+h$, $c+h$ și $d+h$ etc.).

Ne vom mărgini la cercetarea cazului sferelor $\sum$ avînd contacte de aceeași speță cu cele patru sfere date.

Pentru a asigura generalitatea deplină a raționamentelor, vom considera atît valori pozitive ale lui h, cît și negative.

Fie D mijlocul segmentului AB; K proiecția punctului I pe dreapta AB; K_0 proiecția centrului radical I_0 al sferelor date A_0, B_0, C_0 și D_0 pe aceeași dreaptă. Așa cum am procedat la soluția problemei 401, vom demonstra că are loc egalitatea $K_0K = \frac{a-b}{AB} \cdot h$. Notînd cu L și cu L_0 proiecțiile ace-

loraşi puncte I şi I_0 pe dreapta AC, vom găsi $L_0L = \frac{a-c}{AC} \cdot h$. Notînd, mai departe, cu H şi cu H_0 proiecţiile punctelor I şi I_0 pe planul ABC, vom demonstra, iarăşi în acelaşi mod ca la soluţia problemei corespunzătoare în plan, că locul geometric al punctelor H este o dreaptă. De aici rezultă că toate punctele I sînt situate într-un plan determinat, perpendicular pe planul ABC. În virtutea aceloraşi consideraţii, toate punctele I se află şi într-un plan determinat, perpendicular, să zicem, pe planul ABD. De aceea, locul geometric al punctelor I este o dreaptă, intersecţia celor două plane menţionate.

Fie acum N un punct al dreptei AI, dat de egalitatea $AN : AI = a : (a+h)$. Exact la fel ca în soluţia problemei 401, vom demonstra succesiv că locul geometric al punctelor N este o dreaptă, că dreapta care este locul geometric al punctelor I trece prin centrele sferelor care au contacte de aceeaşi speţă cu cele patru sfere date şi că dreapta care este locul geometric al punctelor N trece prin punctul de contact al acestor sfere cu sfera A_0.

Observaţie. Teoremele demonstrate ne furnizează o nouă metodă pentru construcţia unor sfere tangente la patru sfere date (compară cu nr. **684**). Această metodă de construcţie este în totul analogă cu cea descrisă pentru cazul din plan, în observaţia la soluţia probl. 401.

936. Fie M şi M' două puncte omoloage ale celor două figuri care se obţin una din cealaltă prin inversiunea S, iar m şi m' punctele care se obţin din punctele M şi M' prin inversiunea T. Trebuie să demonstrăm că şi punctul m' se obţine din m printr-o inversiune.

Această proprietate este evidentă, dacă S este o inversiune de putere pozitivă şi are deci o sferă de inversiune. În adevăr, în acest caz, punctele M şi M' pot fi caracterizate (**670**) prin proprietatea că orice sferă care trece prin aceste puncte va fi ortogonală la sfera inversiunii S. De aici rezultă că punctele m şi m' vor avea aceeaşi proprietate în raport cu sfera s, care se obţine din S prin inversiunea T.

Pentru a extinde demonstraţia la cazul unei inversiuni S de putere arbitrară, este suficient să utilizăm rezultatul de la nr. **671**: dacă N şi N' sînt alte două puncte arbitrare care se corespund în inversiunea S, atunci punctele M, N, M' şi N' vor fi situate pe acelaşi cerc, deci se vor bucura de aceeaşi proprietate şi punctele m, n, m' şi n', care le corespund în inversiunea T. Deoarece punctele m şi m' pot fi, evident, alese arbitrar, rezultă că operaţia care transformă punctul m în m' este o inversiune.

Dacă p este polul acestei noi inversiuni, P un punct care îi corespunde în inversiunea T, P' omologul lui P în inversiunea S, atunci punctul P' trebuie să coincidă cu polul inversiunii T; în adevăr, inversiunea T trebuia să transforme punctul P' în omologul lui p în inversiunea s; însă punctului p nu-i corespunde nici un fel de punct în inversiunea s. Aşadar, polul p al noii inversiuni s se obţine din polul P' al inversiunii T, dacă îl supunem pe acesta întîi inversiunii S (care îl transformă în punctul P), iar apoi efectuăm asupra punctului obţinut inversiunea T.

Observaţie. Soluţia expusă aici se găseşte şi în lucrarea lui J. Hadamard (v. nr. **914**). Am fi putut rezolva această problemă printr-o metodă analogă cu aceea folosită pentru problema corespunzătoare din plan (compară cu soluţia ex. 250).

937. Spre deosebire de soluția problemei corespunzătoare din plan (ex. 251), nu vom presupune aici, pentru generalitate, că ambele inversiuni au puterile pozitive.

1° Dacă puterile inversiunilor S și S' sînt pozitive și dacă ambele sfere de inversiune au cel puțin un punct comun, atunci vom lua unul dintre punctele comune ale celor două sfere (sau punctul lor comun unic, dacă sferele sînt tangente) ca pol al inversiunii T, a cărei putere o alegem arbitrar. Inversiunea T transformă sferele celor două inversiuni S și S' în două plane s și s', iar figurile F și F'' în figurile f și f'', care se obțin una din cealaltă, prin două simetrii consecutive în raport cu planele s și s'. Prin urmare, aceste două figuri vor fi egale.

Dacă puterile inversiunilor S și S' sînt pozitive și dacă cele două sfere de inversiune nu au puncte comune, vom lua ca pol al inversiunii T unul dintre punctele limită ale celor două sfere (v. ex. 696). Puterea inversiunii T se alege în mod arbitrar. Inversiunea T transformă sferele inversiunilor S și S' în două sfere concentrice (compară cu generalizarea ex. 248 în ex. 935) s și s', iar figurile F și F'' în figurile f și f'', care se obțin una din cealaltă prin două inversiuni consecutive în raport cu sferele concentrice s și s'. Prin urmare, figurile f și f'' vor fi omotetice în raport cu centrul comun al sferelor s și s' (**670**).

Pentru a avea posibilitatea de a studia cazul cînd puterea cel puțin a uneia dintre cele două inversiuni este negativă, vom demonstra următoarea propoziție generală:

Oricare ar fi două inversiuni de poli diferiți, există o infinitate de sfere care se transformă fiecare în ea însăși, atît printr-o inversiune cît și prin cealaltă. Centrele tuturor acestor sfere sînt coplanare, iar dreapta care unește polii celor două inversiuni este axa lor radicală comună. Dacă puterile celor două inversiuni sînt pozitive și ambele sfere de inversiune nu au puncte comune sau dacă puterea cel puțin a uneia dintre inversiuni este negativă, atunci toate aceste sfere intersectează dreapta care unește polii celor două inversiuni în două puncte comune.

Dacă puterile ambelor inversiuni sînt pozitive, atunci sferele despre care este vorba vor fi toate cele care sînt fiecare ortogonale la cele două sfere de inversiune. Propoziția de demonstrat rezultă, evident, din proprietățile planului radical a două sfere și ale punctelor lor limită. De aceea, pentru a fixa ideile, vom presupune la demonstrație că puterea k a primei inversiuni este negativă ($k<0$), fără a face nici un fel de ipoteză în legătură cu puterea k' a celei de-a doua inversiuni ($k'\gtrless 0$), deși demonstrația pe care o dăm în cele ce urmează subsistă cu mici modificări în toate cazurile.

Fie O centrul și r raza unei sfere arbitrare, care se transformă în ea însăși prin fiecare dintre cele două inversiuni (dacă astfel de sfere există). Puterea fiecăruia dintre polii P și P' ai celor două inversiuni în raport cu această sferă trebuie să fie egală cu puterea inversiunii respective (compară cu nr. **221**). Așadar, ajungem la două ecuații (v. nr. **455**):

$$PO^2 - r^2 = k;\ P'O^2 - r'^2 = k'.$$

Acest sistem de ecuații este echivalent cu următorul:

$$PO^2 - P'O^2 = k - k';\ r^2 = PO^2 - k. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima dintre aceste două ecuații arată că centrul O al oricăreia dintre sferele căutate aparține unui plan M perfect determinat, perpendicular pe dreapta PP', care este locul geometric al punctelor avînd diferența pătratelor distanțelor la punctele P și P' egală cu $k - k'$. A doua dintre ecuațiile (1) arată că, în cazul considerat ($k<0$), orice punct O din planul M este centru al uneia dintre sferele care satisfac condiția pusă, deoarece avem $PO^2 - k > 0$. Dacă vom nota, mai departe, cu H punctul de intersecție al planului M cu dreapta PP' (fig. 225), vom avea $r^2 - OH^2 = (PO^2 - k) - (PO^2 - PH^2) = PH^2 - k$. Deoarece ultimul membru al acestei egalități este pozitiv ($k<0$) și nu depinde de alegerea punctului O în planul M, rezultă că toate sferele despre care este vorba intersectează dreapta PP' în două puncte U și V. Propoziția noastră este demonstrată.

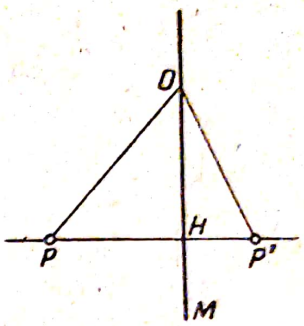


Fig. 225

Să revenim la rezolvarea problemei inițiale.

Dacă puterea cel puțin a uneia dintre cele două inversiuni date S și S' este negativă, atunci inversiunea T avînd ca pol unul dintre punctele U și V indicate mai sus, pentru a fixa ideile punctul U, transformă toate sferele care trec prin punctele U și V în plane care trec prin punctul v, inversul lui V. Fiecare dintre aceste plane este transformat în el însuși de oricare dintre inversiunile s și s', în care inversiunile S și S' se transformă prin inversiunea T (în sensul ex. 936). Prin urmare, inversiunile s și s' au ca pol comun punctul v. Inversiunea T transformă figurile F și F'' în două figuri f și f''. Aceste două figuri se obțin una din cealaltă prin două inversiuni consecutive s și s', de pol comun v. Prin urmare, figurile f și f'' sînt iarăși omotetice.

Așadar, *figurile F și F'' pot fi transformate totdeauna printr-o aceeași inversiune, fie în două figuri egale, fie în două figuri omotetice.*

2° Dacă puterile inversiunilor S și S' sînt pozitive și dacă ambele sfere de inversiune au cel puțin un punct comun, atunci, fără a modifica figurile egale f și f', de care ne-am ocupat mai sus, putem înlocui perechea de simetrii în raport cu planele s și s' printr-o pereche de simetrii în raport cu planele s_1 și s_1' (v. soluția ex. 600, observația 1). Prin urmare, perechea de inversiuni S și S' este echivalentă cu perechea de inversiuni S_1 și S_1' în raport cu sferele S_1 și S_1', care sînt inversele planelor s_1 și s_1' în inversiunea T. Această pereche de inversiuni S_1 și S_1' poate fi aleasă într-o infinitate de moduri, ca și perechea de plane s_1 și s_1'. Ca plan s_1 (sau s_1') putem lua *oricare* dintre planele ce trec prin intersecția planelor s și s' sau sînt paralele cu ele. Prin urmare, ca sferă S_1 (sau S_1') putem alege orice sferă care trece prin linia de intersecție a sferelor S și S' sau tangentă la ele în punctul lor comun, pe scurt, putem lua oricare dintre sferele avînd planul radical comun cu S și cu S'. Cu alte cuvinte, putem alege ca inversiune S_1 (sau S_1') oricare dintre inversiunile care transformă în ele însele toate sferele transformate în ele însele atît de o inversiune dată, cît și de cealaltă. În particular, ca plan s_1 (sau s_1'), despre care a fost vorba mai sus, putem alege un plan care trece prin polul inversiunii T. În aceste condiții, inversiunea S_1 (sau S_1') se transformă într-o simetrie în raport cu planul radical al sferelor S și S'.

Dacă puterile ambelor inversiuni S și S' sînt pozitive, iar cele două sfere de inversiune nu au puncte comune, sau dacă puterea cel puțin a uneia dintre inversiunile S și S' este negativă, atunci, fără a modifica figurile omotetice f și f'', despre care a fost vorba mai sus, putem înlocui perechea de inversiuni s și s' avînd polul comun v, prin perechea de inversiuni echivalentă s_1 și s_1', de același pol v (compară cu nr. **215**). În acest caz, putem alege ca inversiune s_1 (sau s_1') *oricare* inversiune de pol v; a doua inversiune s_1' (sau s_1) este determinată de condiția că raportul dintre puterile inversiunilor s și s' este egal cu raportul dintre puterile inversiunilor s_1 și s_1'. Altfel spus; putem lua ca inversiune s_1 (sau s_1') orice inversiune care transformă în el însuși fiecare dintre planele ce trec prin punctul v. Prin urmare, perechea de inversiuni S și S' poate fi înlocuită, într-o infinitate de moduri, printr-o altă pereche de inversiuni S_1 și S_1', care transformă de asemenea figura F în F''. Putem alege atunci ca inversiune S_1 (sau S_1') oricare dintre inversiunile care transformă în ea însăși fiecare dintre sferele transformate în ele însele, atît de una dintre inversiunile S și S' cît și de cealaltă. În particular, ca inversiune s_1 (sau s_1') de mai sus, putem lua inversiunea în raport cu o sferă care trece prin polul inversiunii T, dacă acest pol de inversiune nu coincide cu punctul v (în acest din urmă caz, cele două inversiuni S și S' au și ele ca pol comun punctul v, iar figurile F și F'' sînt omotetice în raport cu punctul v). În aceste condiții, inversiunea S_1 (sau S_1') se transformă într-o simetrie în raport cu un plan.

Așadar, *în toate cazurile, există o infinitate de perechi de inversiuni care transformă, la fel cu inversiunile S și S', figura F în figura F''. Ca una dintre aceste inversiuni, putem lua orice inversiune care transformă în ea însăși fiecare sferă (sau plan) care se transformă în ea însăși, atît prin inversiunea S, cît și prin inversiunea S'; în particular, putem presupune că una dintre cele două inversiuni se transformă într-o simetrie, dacă figurile F și F'' nu sînt asemenea.*

Observație. Din cele de mai sus, deducem ușor că, dacă polii celor două inversiuni date S și S' sînt distincți, atunci polii celor două inversiuni S_1 și S_1', prin care putem înlocui cele două inversiuni date, se situează întotdeauna pe dreapta care unește polii celor două inversiuni date. În aceste condiții, putem alege ca pol al uneia dintre cele două inversiuni noi, de exemplu al inversiunii S_1, orice punct P al acestei drepte. În adevăr, este suficient să luăm în acest caz ca putere a inversiunii S_1 puterea comună a punctului ales P în raport cu toate sferele care sînt transformate în sine atît de inversiunea S, cît și de inversiunea S'.

938. Să presupunem că succesiunea dată de inversiuni conține inversiuni atît cu putere pozitivă, cît și negativă, și că printre aceste inversiuni pot figura și simetrii (**670**). Inversiunea S, de pol O și de putere negativă $-k$, poate fi înlocuită, evident, printr-o succesiune de simetrii în raport cu polul O și prin inversiunea S', de pol O și de putere pozitivă k. La rîndul său, o simetrie în raport cu punctul O poate fi înlocuită, cum se vede ușor, prin trei simetrii consecutive în raport cu trei plane oarecare, perpendiculare două cîte două, care trec prin punctul O. În definitiv, inversiunea S, de pol O și de putere negativă, va fi înlocuită printr-o succesiune de trei simetrii în raport cu trei plane și printr-o inversiune S' de același pol O și de putere pozitivă (compară cu soluția ex. 253).

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza celor de mai sus, putem presupune că s-au efectuat asupra figurii date F succesiv inversiunile S_1, S_2,... și S_k, de puteri *pozitive*, printre care pot figura și simetrii în raport cu un plan.

Folosind acum rezultatele exercițiului 937 și raționînd ca la soluția exercițiului 252 din Geometria plană, înlocuim succesiunea considerată de inversiuni, în cazul general, cînd figura *transformată nu este asemenea cu figura dată* F, printr-un șir de forma $S_1' l_2 \ldots l_k$, unde am notat cu S_1' o inversiune oarecare, iar prin $l_2, \ldots, l_k$ simetrii în raport cu un plan. De aici se vede că, *dacă în urma efectuării unui șir de inversiuni cu figura* F, *nu obținem o figură asemenea cu figura* F, *atunci obținem o figură care este fie egală, fie simetrică cu cea care se obține din figura* F, *prin inversiunea* S_1', *găsită mai sus*. În adevăr, șirul de simetrii $l_2 \ldots l_k$ transformă orice figură dată într-o figură egală cu ea, pentru o valoare impară a lui k (adică pentru k—1 par), și într-o figură simetrică cu cea dată pentru k par (adică pentru k — 1 impar).

Pentru k impar, șirul $l_2 \ldots l_k$, cuprinzînd un număr *par* de simetrii, este o mișcare pe care o putem înlocui întotdeauna (**416**) prin două transpoziții în raport cu o dreaptă și deci (soluția ex. 600, Obs.1) prin patru simetrii în raport cu un plan. Dacă k este par, șirul $l_2 \ldots l_k$, care cuprinde un număr *impar* de simetrii, poate fi înlocuit (compară cu soluția ex. 607) prin trei simetrii în raport cu un plan. În cazuri particulare, numărul de simetrii necesare poate fi și mai mic decît cel indicat. Așadar, *succesiunea dată de inversiuni poate fi înlocuită printr-o inversiune, urmată de una, două, trei sau patru simetrii, cu condiția ca figura transformată să nu fie asemenea cu cea dată.*

939. Raționînd exact la fel ca în soluția problemei 396 din Geometria plană, vom demonstra următoarea propoziție:

Condiția necesară și suficientă pentru ca să putem transforma prin inversiune o figură formată din două sfere A *și* B *într-o figură egală cu aceea pe care o formează sferele* C *și* D *constă din următoarele:*

dacă sferele A *și* B *au cel puțin un punct comun, atunci același lucru trebuie să aibă loc și pentru sferele* C *și* D, *iar unghiul dintre sferele* A *și* B *trebuie să fie egal cu unghiul dintre sferele* C *și* D;

dacă sferele A *și* B *nu au puncte comune, atunci aceeași situație trebuie să aibă loc și pentru sferele* C *și* D, *iar raportul dintre razele sferelor concentrice în care sferele* A *și* B *pot fi transformate printr-o aceeași inversiune* (compară cu generalizarea ex. 248 în soluția ex. 935) *trebuie să fie egal cu raportul analog pentru sferele* C *și* D.

Tăind, mai departe, sferele A și B cu un plan care trece prin linia centrelor lor și procedînd la fel cu sferele C și D, vom aplica celor două figuri rezultatele exercițiului 396. Obținem, fără dificultate, următoarea propoziție:

Dacă sferele A *și* B *au cel puțin un punct comun, atunci, în ipoteza precedentă, putem considera, în locul unghiului format de ele, raportul dintre segmentul tangentei comune și media proporțională a razelor lor.*

Planul oricărui cerc care intersectează pe fiecare dintre cele două sfere date sub un unghi drept trece prin linia centrelor lor. Considerînd două oarecare dintre aceste cercuri, putem presupune că ele sînt situate, în același plan, deoarece, în caz contrar, putem suprapune unul dintre aceste plane peste

Scanned with OKEN Scanner

celălalt, printr-o rotație în jurul liniei centrelor. Din rezultatele exercițiului 396, din Geometria plană, obținem atunci imediat că

raportul anarmonic al punctelor de intersecție a două sfere A și B cu oricare dintre cercurile care le intersectează sub un unghi drept este o mărime constantă, și același lucru este valabil pentru raportul anarmonic a două dintre aceste puncte cu cele două puncte limită; condiția necesară și suficientă despre care a fost vorba mai sus este ca oricare dintre aceste rapoarte anarmonice pe care le calculăm pentru sferele A și B să fie egal cu raportul anarmonic corespunzător, calculat pentru sferele C și D.

În sfîrșit, tăind iarăși sferele date A și B cu un plan care trece prin linia centrelor lor, procedînd la fel cu sferele C și D și aplicînd figurilor obținute în secțiune celelalte rezultate de la exercițiul 396, căpătăm următoarele propoziții:

dacă r și r' sînt razele sferelor A și B, iar d distanța centrelor lor, atunci mărimea $\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'}$ trebuie să *aibă aceeași valoare numerică ca și mărimea analogă, calculată pentru sferele C și D.*

Dacă cele două sfere A și B au o tangentă comună (de exemplu, exterioară, de lungime t și același lucru are loc și pentru sferele C și D, atunci raportul $t/\sqrt{rr'}$ trebuie să aibă aceeași valoare în ambele cazuri.

940. Să începem prin a considera cazul în care dreapta OM, pe care se află și punctul M', intersectează sfera S, deci și sfera S'. Fie A și B punctele de intersecție ale dreptei OM cu sfera S, iar A' și B' inversele lor. Avem (**672**) $M'A' = AM \cdot \frac{\mu}{OA \cdot OM}$; $M'B' = BM \cdot \frac{\mu}{OB \cdot OM}$, de unde $M'A' \cdot M'B' = AM \cdot BM \frac{\mu}{OA \cdot OB \cdot OM^2}$. Înlocuind $M'A' \cdot M'B'$, $AM \cdot BM$ și $OA \cdot OB$ respectiv prin p', p și P, vom obține formula cerută

$$\frac{p'}{p} = \frac{\mu^2}{P \cdot OM^2}. \tag{1}$$

Trecem la considerarea cazului general. Fie Σ o sferă foarte mică de rază ρ, avînd centrul în punctul M (este chiar suficient să presupunem că punctul M este situat pe această sferă sau în interiorul ei); Σ' sfera inversă sferei Σ; ρ' raza ei; r și r' razele sferelor S și S'; d distanța dintre centrele sferelor S și Σ; d' distanța corespunzătoare pentru sferele S' și Σ'. În virtutea rezultatelor exercițiului 939, vom avea

$$\frac{d^2 - r^2 - \rho^2}{r\rho} = \frac{d'^2 - r'^2 - \rho'^2}{r'\rho'}. \tag{2}$$

Dacă acum o dreaptă care trece prin punctul O intersectează sfera S în punctele A și B și sfera S' în punctele A' și B', inversele celor dintîi, iar o altă dreaptă (sau aceeași dreaptă), care trece prin punctul O, intersectează sferele Σ și Σ' respectiv în punctele C, D și C', D', atunci

$$\frac{r'}{r} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{\mu}{P} \tag{3}$$

și, analog,

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{OC \cdot OC'}{OC \cdot OD} = \frac{\mu}{OC \cdot OD}.$$

Folosind aceste relații, egalitatea (2) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{d'^2 - r'^2 - \rho'^2}{d^2 - r^2 - \rho^2} = \frac{\mu^2}{P \cdot OC \cdot OD}.$$

Vom face acum raza ρ a sferei Σ să tindă către zero, astfel ca punctul M să rămînă centrul ei (este destul să presupunem doar că punctul M rămîne pe sfera Σ sau în interiorul ei). La limită, $OC \cdot OD$ se înlocuiește prin OM^2; $d^2 - r^2 - \rho^2$ va deveni $d^2 - r^2$, adică puterea p a punctului M în raport cu sfera S. În aceste condiții, raza ρ' a sferei Σ' va tinde și ea către zero, iar $d'^2 - r'^2 - \rho'^2$ va deveni p'. Egalitatea precedentă se va transforma în relația (1) căutată.

Egalitățile (1) și (3) ne dau

$$\frac{p'}{2r'} : \frac{p}{2r} = \frac{\mu}{OM^2}.$$

Prin urmare, *raportul dintre puterea redusă a punctului M' în raport cu sfera S' și puterea redusă a punctului M în raport cu sfera S nu depinde de aceste sfere.*

Pentru a stabili acum în ce se transformă puterea redusă a punctului M în raport cu sfera, dacă aceasta se transformă într-un plan Q, vom coborî din punctul M perpendiculara MA pe acest plan Q și vom construi sfera S, tangentă în punctul A la planul Q (fig. 226). Să notăm acum cu AB diametrul sferei S, care trece prin A. Pentru puterea redusă a punctului M în raport cu sfera S, vom avea $(MA \cdot MB) : AB = (MA \cdot MB) : (MB - MA) = MA : \left(1 - \frac{MA}{MB}\right)$. La limită, *dacă punctul B se îndepărtează* la *infinit pe dreapta MA, puterea redusă a punctului M se transformă în distanța sa MA la planul Q.*

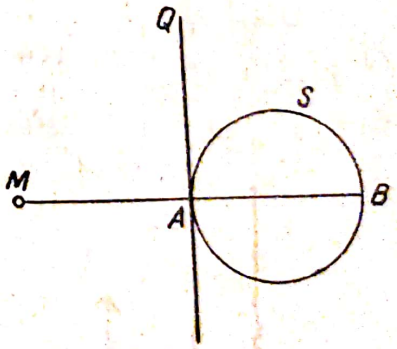


Fig. 226

941. Să presupunem că inversiunea de pol O și de putere k transformă o sferă S, care nu trece prin O, în sfera S'. Să notăm cu M un punct arbitrar interior sferei S, cu M' inversul său, cu A și cu B punctele de intersecție ale dreptei OM (care conține și punctul M') cu sfera S, cu A' și cu B' intersecțiile aceleiași drepte cu sfera S' și care sînt *respectiv* inversele punctelor A și B. Pentru a stabili dacă punctul M' este interior sau exterior sferei S', este suficient să determinăm semnul raportului $M'A' : M'B'$.

Avem însă, ca și în plan, ca mărime și ca semn (compară cu nr. **218**, Obs.), $M'A' = AM \cdot \frac{k}{OA \cdot OM}$ și $M'B' = BM \cdot \frac{k}{OB \cdot OM}$,

de unde

$$\frac{M'A'}{M'B'} = \frac{MA}{MB} : \frac{OA}{OB}. \qquad (1)$$

(Această relație se obține și din teorema referitoare la constanța raportului anarmonic, demonstrată la nr. **688**, dacă ținem seama că raportul $M'A'/M'B'$ poate fi considerat ca raportul anarmonic al punctelor A', B', M și al unui al patrulea punct de la infinit; compară cu nr. **199**.)

Deoarece, potrivit ipotezei, punctul M este interior sferei S, avem $\frac{MA}{MB} < 0$. Egalitatea (1) ne arată că raportul $M'A'/M'B'$ va avea atunci semnul opus semnului raportului OA/OB. Prin urmare, *punctele situate în interiorul unei sfere care nu trece prin polul de inversiune se transformă prin inversiune în puncte interioare (exterioare) sferei transformate, dacă polul inversiunii este exterior (respectiv, interior) sferei date.*

942. Fie date cercul C și sfera S. Orice cerc Γ care intersectează cercul C în două puncte este situat cu el pe o aceeași sferă Σ (**450**). Dacă, în afară de aceasta, cercul Γ intersectează sfera S sub un unghi drept, atunci sfera Σ, care trece prin el, este ortogonală la S, iar cercul Γ intersectează sub un unghi drept cercul C_0 după care se intersectează sferele S și Σ. De aici reiese că există o infinitate de cercuri Γ determinate prin următoarea construcție:

Printr-un cerc dat C, ducem o sferă Σ, ortogonală la sfera dată S (ex. 676). Pe această sferă Σ, construim cercul Γ, ortogonal la cercul C și la cercul C_0, după care se intersectează sferele S și Σ. Aceste cercuri Γ vor fi, evident, cele căutate.

După cum se știe (v. probl. 396), raportul anarmonic al punctelor de intersecție a două cercuri situate în același plan cu oricare dintre cercurile ortogonale la ele are o valoare constantă. Aceeași proprietate va avea loc și pentru două cercuri situate pe aceeași sferă și pentru orice cerc ortogonal la ele. De aceasta ne putem convinge, efectuînd o inversiune de putere arbitrară și avînd polul într-un punct oarecare al sferei date (cf. nr. **688**).

Prin urmare, raportul anarmonic al punctelor de intersecție ale cercului Γ cu cercurile C_0 și C, adică cu sfera S și cu cercul C, are aceeași valoare pentru toate cercurile Γ (deoarece toate cercurile Γ se situează pe aceeași sferă Σ).

Observație. Dacă două cercuri date, situate în același plan, sînt secante sub un unghi α, atunci raportul anarmonic λ al punctelor lor de intersecție cu un cerc oarecare ortogonal la ele este legat de unghiul α prin egalitatea $\lambda = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ (compară cu soluția probl. 396). Deoarece unghiul a două cercuri și raportul anarmonic a patru puncte de pe un cerc nu variază în cadrul inversiunii, vom avea aceeași situație și pentru două cercuri de pe o sferă.

Să presupunem acum că cercul dat C intersectează sfera dată S. În acest caz, unghiul dintre ele este egal cu unghiul dintre cercul C și cercul C_0, considerat mai sus, și ajungem la următorul rezultat:

Dacă un cerc C intersectează sub un unghi α o sferă S, atunci raportul anarmonic λ al punctelor lor de intersecție cu un cerc arbitrar Γ este legat de unghiul α prin relația $\lambda = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

943. Dacă cercul dat are cel puțin un punct comun cu sfera dată, este suficient să luăm ca pol al inversiunii (a cărei putere o alegem în mod arbitrar) punctul lor comun sau unul dintre punctele lor comune, pentru a le transforma într-o dreaptă și într-un plan.

Dacă cercul dat nu are puncte comune cu sfera dată, atunci putem duce prin el, și anume în două moduri, o sferă nouă, tangentă la cea dată; metoda construcției unei astfel de sfere este dată la nr. **684.** Inversiunea având polul în punctul de contact al celor două sfere (și puterea arbitrară) le transformă în două plane paralele; în unul dintre ele se va situa cercul invers celui dat.

Deoarece, printr-un cerc care nu are puncte comune cu o sferă dată, putem duce două sfere tangente la cea dată, avem două posibilități de a alege polul inversiunii considerate.

Observație. Să demonstrăm că, oricare ar fi polul de inversiune ales, raportul $\mu = h : r$ dintre distanța h a celor două plane paralele și raza r a cercului transformat va fi constant.

În acest scop, exprimăm mărimea μ prin raportul anarmonic λ, despre care a fost vorba în soluția ex. 942. Deoarece raportul anarmonic a patru puncte de pe un cerc nu se schimbă prin inversiune, dependența dintre λ și μ se poate stabili folosind numai figura transformată. În notațiile al căror sens reiese din fig. 227, avem (compară cu probl. 274) $\lambda = (KLMN) = \frac{MK}{ML} : \frac{NK}{NL} = \left(\frac{MK}{ML}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \widehat{KLM}$; $\mu = h : r = \operatorname{tg} \widehat{KOM}$.

Însă $\widehat{KOM} = 2\widehat{KLM}$, de unde $\mu = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}$. Această relație ne arată că mărimea μ este perfect determinată de valoarea lui λ și, deci, nu depinde de alegerea unuia dintre cele două poluri de inversiune posibile.

944. Fie date un cerc C și o sferă S, secante în două puncte. *Condițiile necesare pentru posibilitatea de a le transforma prin inversiune într-un cerc C' și într-o sferă S', care să formeze o figură egală cu cea formată de un cerc C_1 și de o sferă S_1, de asemenea date, este ca cercul C_1 și sfera S_1 să se intersecteze și ele în două puncte și ca unghiul dintre cercul C și sfera S să fie egal cu unghiul dintre C_1 și S_1.* Necesitatea acestor condiții reiese din faptul că unghiul dintre un cerc și o sferă nu variază prin inversiune cum se vede ușor (v. ultimul aliniat al nr. **673**).

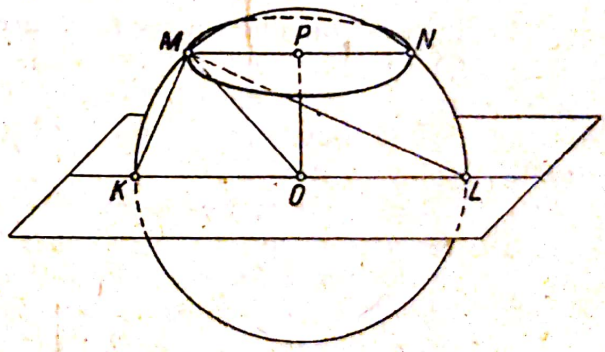


Fig. 227

Să demonstrăm acum *că aceleași condiții sînt și suficiente.* Inversiunea I, având polul P în unul dintre punctele de intersecție ale cercului C cu sfera S și de putere arbitrară, le transformă în dreapta c și în planul s, care formează între ele un unghi egal cu unghiul lui C cu S. Tot astfel, inversiunea I_1, având polul în unul dintre punctele de intersecție P_1 ale cercului C_1 cu sfera S_1 și de putere arbitrară, le transformă în dreapta c'_1 și în planul s_1, al căror unghi este egal cu unghiul format de C_1 cu S_1, adică cu unghiul dintre cercul C și sfera S sau dintre dreapta c și planul s. Deplasînd

acum figura formată din cercul C_1, sfera S_1, punctul P_1, dreapta c_1 și planul s_1, putem face ca dreapta c_1 și planul s_1 să coincidă respectiv cu c și cu s. În acest caz, cercul C_1 și sfera S_1, în noua lor poziție (altfel spus, figura egală cu cea formată de cercul C_1 și de sfera S_1, date inițial), se vor obține respectiv din cercul C și din sfera S prin două inversiuni consecutive: prima inversiune I de pol P, transformă cercul C și sfera S în dreapta c și în planul s, a doua inversiune $\overline{I}_1$ de pol P_1, în noua sa poziție, transformă dreapta c și planul s în cercul C_1 și în sfera S_1 în noua lor poziție). Vom supune acum puterile celor două inversiuni I și $\overline{I}_1$ (care au rămas pînă acum complet arbitrare) unei singure restricții: punctul P_1 nu trebuie să coincidă cu punctul P (cînd suprapunem dreapta c_1 și planul s_1 cu c și cu s).

Doarece polii inversiunilor I și $\overline{I}_1$ nu coincid, succesiunea acestor două inversiuni poate fi înlocuită (ex. 1022) printr-o inversiune I' și printr-o simetrie în raport cu un plan. Prin urmare, inversiunea I' transformă cercul C și sfera S într-o figură simetrică cu figura (C_1, S_1) în raport cu un plan și, de aceea, egală cu figura (C_1, S_1). Egalitatea unghiurilor dintre C și S și dintre C_1 și S_1 se dovedește a fi, astfel, și suficientă.

În locul unghiului dintre cerc și sferă, putem considera și raportul anarmonic despre care a fost vorba în soluția exercițiului 942, Observație.

Dacă cercul C nu ar fi secant la sfera S, ci tangent, am putea relua raționamentele precedente cu mici modificări. În acest caz, dreapta c este paralelă cu planul s, iar dreapta c_1 cu planul s_1. Alegînd arbitrar puterea inversiunii I, care transformă cercul C și sfera S în dreapta c și în planul s, putem alege puterea inversiunii I_1, care transformă cercul C_1 și sfera S_1 în dreapta c_1 și în planul s_1, astfel ca distanța dreptei c_1 la planul s_1 să fie egală cu distanța dreptei c la planul s. Apoi putem face ca dreapta c_1 și planul s_1 să coincidă cu dreapta c și cu planul s etc. Acest caz de tangență a cercului C cu sfera S poate fi considerat ca un caz particular al celui precedent, cînd unghiul dintre cerc și sferă este egal cu zero (sau cu 180°).

În sfîrșit, să considerăm cazul în care cercul C și sfera S nu au puncte comune. Alegînd polul inversiunii așa cum s-a indicat în soluția exercițiului 943, transformăm cercul C și sfera S în cercul c și în planul s, paralel cu planul ultimului cerc. Notăm cu r raza cercului c, cu h distanța dintre cele două plane paralele și punem $\mu = h : r$.

Să presupunem acum că cercul C și sfera S, care nu au puncte comune, pot fi transformate printr-o inversiune I într-un cerc C' și într-o sferă S' (de asemenea, fără puncte comune), care formează o figură egală cu cea formată de cercul C_1 și de sfera S_1. Deplasînd cercul C_1 și sfera S_1 ca pe o singură figură, le putem face să coincidă respectiv cu cercul C' și cu sfera S'. Așadar, putem considera că inversiunea I transformă figura (C, S) în figura (C_1, S_1). Să transformăm cercul C_1 și sfera S_1 prin inversiunea I_1, aleasă cum se arată în soluția exercițiului 943, în cercul c_1 de rază r_1 și în planul s_1 paralel cu planul cercului c_1 și situat la distanța h_1 de el; să mai punem $\mu_1 = r_1 : h_1$. Deoarece polul inversiunii I_1 poate fi ales în două feluri (mărimea μ_1 nu depinde de această alegere; v. soluția ex. 943, Obs.), putem lua un pol al inversiunii I_1 distinct de polul inversiunii I. Așadar, succesiunea celor două inversiuni I și I_1, de poli diferiți, transformă cercul C și sfera S în cercul c_1 și în planul s_1, paralel cu planul

Scanned with OKEN Scanner

cercului. Această succesiune de două inversiuni poate fi înlocuită printr-o inversiune I' și printr-o simetrie în raport cu un plan. Inversiunea I' transformă figura (C, S) într-o figură egală cu (c_1, s_1). De aici rezultă că *condițiile necesare pentru a putea transforma cercul C și sfera S, care nu au puncte comune, în cercul C' și în sfera S', care formează o figură egală cu cea formată de cercul C_1 și de sfera S_1, de asemenea date, este ca cercul C_1 și sfera S_1, să nu aibă nici ele puncte comune și ca raportul $\mu = r : h$, introdus mai sus pentru figura (C, S), să fie egal cu raportul analog $\mu_1 = r_1 : h_1$ pentru figura (C_1, S_1).*

Să demonstrăm că *aceleași condiții sînt și suficiente*. Inversiunea I, de pol P, ales cum s-a indicat, și de putere arbitrară, transformă figura (C, S) în figura (c, s), formată din cercul c și din planul s, paralel cu planul cercului c. Inversiunea analogă I_1, de pol P_1, transformă figura (C_1, S_1) în figura (c_1, s_1), formată tot din cercul c_1 și din planul s_1, paralel cu planul cercului c_1. În virtutea egalității valorilor lui μ și μ_1, puterea inversiunii I_1 poate fi astfel aleasă încît figura (c_1, s_1) să fie egală cu (c, s). Deplasînd acum figura formată din cercul C_1, sfera S_1, punctul P_1, cercul c_1 și planul s_1, putem face ca cercul c_1 și planul s_1 să coincidă respectiv cu c și cu s. În aceste condiții, cercul C_1 și sfera S_1, în noua lor poziție (altfel spus, figura egală cu cea pe care o formau cercul C_1 și sfera S_1, date inițial), se vor obține respectiv din cercul C și din sfera S prin două inversiuni consecutive: prima inversiune I, de pol P, transformă pe C și pe S în cercul c și în planul s; a doua inversiune I_1, de pol P_1 (în noua sa poziție), transformă cercul c și planul s în cercul C_1 și în sfera S_1 (în noua lor poziție). Ca și mai sus, în cazul cercurilor secante, vom trage de aici concluzia că există o *singură* inversiune care transformă figura (C, S) într-o figură egală cu (C_1, S_1). Așadar, egalitatea valorilor lui μ și μ_1 se dovedește a fi și suficientă.

Pentru ca această din urmă concluzie să fie pe deplin fundată, este necesar ca polii inversiunilor I și I_1 să fie distincți. Se poate arăta că această din urmă condiție poate fi întotdeauna satisfăcută, alegînd în mod corespunzător una dintre cele două inversiuni care transformă pe C_1 și pe S_1 respectiv în c_1 și s_1 (compară cu soluția ex. 943).

În locul valorii lui μ, putem considera, și în cazul unui cerc și al unei sfere fără puncte comune, valoarea λ a raportului anarmonic despre care este vorba în exercițiul 942. În adevăr, mărimea λ este legată de μ prin relația $\mu = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}$ (v. soluția ex. 943, Obs.).

Pentru o valoare dată a lui μ, această din urmă relație determină două valori ale lui λ, al căror produs este egal cu 1. Aceste două valori ale raportului anarmonic λ corespund posibilității de a considera punctele respective într-o ordine diferită (v. soluția probl. 396).

Prin urmare, am demonstrat că *condiția necesară și suficientă pentru a putea transforma o figură dată (C, S), într-o figură egală cu o altă figură dată (C_1, S_1) este, în toate cazurile, egalitatea valorilor* raportului anarmonic λ, *despre care se vorbește în ipoteză, corespunzător acestor figuri.*

945. Locul geometric al polilor inversiunilor care transformă două sfere date S_1 și S_2 în două sfere egale este sfera inversiunii care transformă sferele S_1 și S_2 una în cealaltă, sau o pereche de astfel de sfere.

Demonstrația este în totul analogă cu cea dată în soluția exercițiului 275.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că locul geometric al polilor inversiunilor care transformă trei sfere date, S_1, S_2 și S_3, în sfere egale (dacă astfel de inversiuni există), este un cerc — intersecția celor două sfere, inversiunea în raport cu care transformă sfera S_1 respectiv în sferele S_2 și S_3 — sau un ansamblu de astfel de cercuri. Se poate întîmpla ca inversiunile care se bucură de proprietatea cerută nici să nu existe.

946. Două cercuri egale de pe aceeași sferă sînt simetrice în raport cu unul (sau cu două) dintre planele diametrale ale acestei sfere. În adevăr, în cazul a două cercuri mici egale, acest plan va fi planul diametral, perpendicular pe linia centrelor celor două cercuri mici (iar în cazul a două cercuri mari, ambele plane diametrale care trec prin dreapta de intersecție a planelor celor două cercuri și care împart în părți egale, unghiurile dintre aceste plane).

Putem spune și altfel că, în cazul a două cercuri egale de pe aceeași sferă, una dintre cele două inversiuni care transformă sfera dată în ea însăși, iar cele două cercuri date unul în celălalt (sau ambele inversiuni) se transformă într-o simetrie în raport cu un plan.

De aici rezultă (cf. ex. 936), că pentru a transforma prin inversiune două cercuri date de pe aceeași sferă în două cercuri egale pe sfera transformată, această inversiune trebuie astfel aleasă, încît sfera de inversiune care transformă sfera dată în ea însăși și cele două cercuri date unul în celălalt (sau una dintre astfel de sfere) să se transforme într-un *plan*, și nu într-o sferă.

Deci, locul geometric al polilor inversiunilor căutate va fi această sferă de inversiune (sau ansamblul celor două sfere de inversiune).

947. Dacă un cerc C, situat pe o sferă dată, se transformă prin inversiune într-un cerc mare al sferei transformate, atunci sfera care trece prin cercul C și este ortogonală la sfera dată se transformă într-un *plan*, și nu într-o sferă. Prin urmare, *locul geometric al polilor inversiunilor prin care un cerc dat de pe o sferă dată se transformă într-un cerc mare de pe sfera transformată este o sferă care trece prin cercul dat și este ortogonală la sfera dată.*

Dacă un cerc, situat pe o sferă dată, este proiectat din centrul ei după un con cu unghiul de deschidere 2α, atunci planul acestui cerc intersectează sfera sub un unghi (ascuțit) egal cu α. Deci, inversiunea care transformă cercul dat C de pe sfera dată într-un cerc de pe sfera transformată, care se proiectează din centrul ei după un con de deschiderea 2α, transformă într-un *plan*, și nu într-o sferă, una dintre cele două sfere care trec prin centrul C și intersectează sfera dată sub unghiul α. Prin urmare, *locul geometric al polilor inversiunilor prin care conul de rotație având ca vîrf centrul sferei corespunzătoare sferei date, iar ca directoare un cerc care corespunde cercului dat, are ca unghi la vîrf unghiul dat 2α, este ansamblul a două sfere care trec prin cercul dat și care intersectează sfera dată sub un unghi α.*

Alegînd în modul cuvenit puterea fiecăreia dintre inversiunile considerate, putem face ca sfera dată să fie transformată de aceste inversiuni în ea însăși. De aici urmează imediat că *locul geometric al vîrfurilor conurilor care au ca bază un cerc dat, situat pe o sferă dată, și care intersectează această sferă după un al doilea cerc de rază dată, este ansamblul a două sfere care trec prin cercul respectiv și formează cu sfera dată un același unghi α.* Unghiul α se determină prin condiția ca cercul de rază dată să fie proiecția, din centrul sferei, după un con cu unghiul de deschidere 2α.

Scanned with OKEN Scanner

948. Prin două puncte A și B date, situate pe o sferă dată, trece un singur cerc C care intersectează sfera dată sub un unghi drept; dacă punctele A și B sînt diametral opuse, acest cerc se transformă într-o dreaptă.

De aici rezultă că fiecare dintre inversiunile căutate trebuie să transforme cercul C într-o *dreaptă* și nu într-un cerc, astfel că locul geometric al polilor inversiunilor despre care este vorba va fi cercul C.

949. Fie date cercul C și punctul A, situate pe o sferă dată. Toate cercurile de pe această sferă, ortogonale la cercul dat C și care trec prin punctul A, au și un al doilea punct comun B. Aceasta reiese din faptul că planele acestor cercuri trec prin punctul A și, totodată, prin polul planului în care se află cercul C (**667**).

Dacă punctul A și cercul C sînt transformate, printr-o anumită inversiune, în punctul A' și în cercul C', pentru care punctul A' este unul dintre poli, atunci punctul B este transformat, prin aceeași inversiune, în al doilea pol B' al cercului C' (punctul comun al tuturor cercurilor ortogonale la C' și care trec prin A'). Prin urmare, fiecare dintre inversiunile căutate transformă punctele A și B în două puncte diametral opuse A' și B'. Așadar, problema se reduce la cea considerată la exercițiul 948.

950. Dacă două cercuri de pe aceeași sferă nu au puncte comune, atunci toate cercurile ortogonale la ele trec prin două puncte comune A și B. Cercurile situate în plane paralele se caracterizează prin faptul că punctele comune ale cercurilor ortogonale la ele sînt diametral opuse.

De aici rezultă că fiecare dintre inversiunile căutate trebuie să transforme punctele comune A și B ale cercurilor ortogonale la cele două cercuri date în două puncte diametral opuse ale sferei transformate. Așadar, problema se reduce la cea considerată la exercițiul 948.

951. Dacă două cercuri de pe aceeași sferă sînt situate pe un cilindru, ele sînt simetrice în raport cu planul care trece prin centrul sferei și este perpendicular pe generatoarele cilindrului. Prin urmare, aceste două cercuri sînt egale. Reciproc, oricare două cercuri egale de pe aceeași sferă sînt simetrice în raport cu un plan (v. soluția ex. 946), și, de aceea, unul dintre conurile care trec prin ele se transformă într-un cilindru, ale cărui generatoare sînt perpendiculare pe planul de simetrie.

Dacă cele două conuri care trec prin cele două cercuri date de pe aceeași sferă se transformă în cilindri, această pereche de cercuri are două plane de simetrie. Anume, aceste plane vor fi planele care trec prin centrul sferei și sînt respectiv perpendiculare pe generatoarele comune ale celor doi cilindri. De aici urmează că planele celor două cercuri date trec prin centrul sferei. De aceea, cele două cercuri date vor fi cercuri mari de pe sferă. Evident că și reciproc, în cazul a două cercuri mari de pe aceeași sferă, ambele conuri care trec prin ele se transformă în cilindri.

952. Să presupunem că figura sferică F este transformată, printr-o anumită inversiune, în figura F_0, iar aceasta din urmă este transformată, printr-o altă inversiune, în figura F'. Fie, mai departe, figurile F, F_0 și F' transformate, printr-o aceeași proiecție stereografică, în figurile plane f, f_0 și f'. Deoarece proiecția stereografică poate fi considerată ca o inversiune în spațiu, figurile f și f_0 se obțin una din cealaltă, tot printr-o anumită inversiune (cf. ex. 936),

Scanned with OKEN Scanner

iar figurile f_0 și f', printr-o altă inversiune. Așadar, figurile f și f', care se obțin din F și din F' printr-o proiecție stereografică, se obțin și una din cealaltă, prin două inversiuni consecutive (în plan). Figurile f și f' vor fi asemenea sau egale (v. ex. 251), în următoarele două cazuri: 1) dacă polii ultimelor două inversiuni coincid; 2) dacă aceste două inversiuni se transformă în simetrii față de o dreaptă.

Pentru ca să aibă loc primul dintre aceste cazuri, centrul proiecției stereografice trebuie să fie coliniar cu polii celor două inversiuni date. Pentru ca să aibă loc al doilea caz, centrul proiecției stereografice trebuie să coincidă cu unul dintre punctele de intersecție ale celor două cercuri de inversiune.

Așadar, centrul proiecției stereografice căutate va fi unul dintre punctele de intersecție cu sfera dată ale dreptei D, care unește polii celor două inversiuni date, iar dacă dreapta D nu taie sfera, atunci unul dintre punctele de intersecție cu sfera dată ale polarei reciproce a dreptei D.

953. Dacă două figuri inverse în plan sînt proiecția stereografică a două figuri inverse pe o sferă, atunci cercul de inversiune c din plan (presupunînd, bineînțeles, că el există) este proiecția cercului de inversiune C pe sferă, deoarece fiecare dintre cercurile c și C este locul geometric al punctelor care coincid cu omoloagele lor.

Dacă obținem, în proiecția stereografică, două figuri simetrice în raport cu o dreaptă, atunci cercul c se transformă într-o dreaptă, deci centrul de proiecție[1]) se află pe cercul C. Locul geometric al centrelor căutate ale proiecției stereografice este cercul C (desigur, dacă inversiunea considerată are un cerc de inversiune).

954. Dacă două figuri inverse pe sferă sînt transformate prin proiecție stereografică în două figuri plane, simetrice în raport cu o dreaptă, atunci centrul de proiecție[1]) este situat pe cercul inversiunii care transformă cele două figuri date una în cealaltă (v. soluția ex. 953).

Prin urmare, cercurile tuturor inversiunilor care au proprietatea cerută trec prin centrul proiecției stereografice, deci locul geometric căutat al polilor acestor inversiuni va fi planul tangent la sfera dată în centrul proiecției stereografice.

955. Două figuri situate pe aceeași sferă și care se corespund în inversiunea avînd polul într-un punct dat P se transformă, prin proiecția stereografică cu centrul într-un punct dat S, în două figuri inverse în plan. Polul inversiunii corespunzătoare în plan este, cum se vede ușor, punctul de intersecție p al dreptei SP cu planul de proiecție.

De aici rezultă că locul geometric căutat al polilor P de inversiune în spațiu, dacă punctele S (centrul proiecției stereografice) și p (polul de inversiune în plan) sînt date, va fi dreapta Sp.

956. Tangentele la o sferă dată, care trec printr-un punct dat, se transformă, printr-o inversiune arbitrară, în cercuri tangente la sfera transformată și care trec prin două puncte comune, anume prin inversul punctului dat și prin polul de inversiune. Diametrul sferei date, care trece prin punctul dat, se transformă într-un cerc, care intersectează sfera transformată sub un unghi drept și trece

[1]) Sau punctul de vedere (Nota Red. E.T.).

prin aceleași două puncte. Deoarece unghiul dintre două drepte este egal cu unghiul dintre cercurile lor inverse, căpătăm următoarea propoziție:

Toate cercurile tangente la o sferă dată și care trec prin două puncte date formează unghiuri egale cu cercul ortogonal la sfera dată și care trece prin aceleași două puncte (v. ex. 260).

957. Deoarece fiecare punct din planul radical a două sfere are puteri egale în raport cu cele două sfere, tangentele la cele două sfere, duse dintr-un punct arbitrar al planului radical, exterior sferelor date, sînt egale între ele. Rezultă că *segmentul din orice tangentă comună la două sfere, cuprinse între punctele de contact, este împărțit în părți egale de planul radical.*

Tangentele comune la două sfere date sînt transformate printr-o inversiune arbitrară, în cercuri C, tangente la cele două sfere transformate și care trec printr-un același punct, anume prin polul P al inversiunii; punctele de contact ale tangentelor comune la două sfere date se transformă, în acest caz, în punctele de contact ale acestor cercuri cu cele două sfere transformate. Planul radical al celor două sfere date se transformă, prin aceeași inversiune, într-o sferă S, avînd cu cele două sfere transformate planul radical comun (v. generalizarea ex. 245 în soluția ex. 935, Obs.) și care trece prin punctul P, polul inversiunii. Mijlocul segmentului tangentei comune este conjugat armonic, în raport cu cele două puncte de contact, cu punctul de la infinit (**111**). Deoarece raportul anarmonic a patru puncte de pe un cerc sau de pe o dreaptă nu se schimbă prin inversiune, punctul de intersecție al unui cerc C cu sfera S și polul P al inversiunii considerate sînt conjugate armonic în raport cu punctele de contact ale cercului C cu ambele sfere, inverse celor date.

Reciproc, fie date trei sfere avînd planul radical comun și un cerc tangent la două dintre aceste trei sfere și secant la a treia. Efectuînd o inversiune (de putere arbitrară) avînd polul în unul dintre punctele de intersecție, căpătăm două sfere, planul lor radical și una dintre tangentele comune la cele două sfere. Prin urmare, ajungem la următoarea propoziție:

Dacă un cerc este tangent la două dintre trei sfere date, care au planul radical, comun, și este secant la a treia, atunci punctele sale de intersecție cu ultima sferă sînt conjugate armonic în raport cu punctele sale de contact cu primele două sfere.

958. Orice sferă avînd contacte de aceeași speță cu două sfere date este tangentă la ele în două puncte M și M', ce se corespund în inversiunea avînd polul în centrul de asemănare exterior, S, al celor două sfere, care le transformă una în cealaltă (**682**). Punctul dat A, situat pe intersecția celor două sfere, date este transformat în el însuși prin aceeași inversiune (deoarece el se află pe sfera de inversiune). Prin urmare, are loc egalitatea $SM \cdot SM' = SA^2$. Această egalitate ne arată că cercul AMM' este tangent în punctul A la dreapta SA.

959. Trei sfere secante două cîte două după trei cercuri pot 1) să aibă două puncte comune; 2) să aibă numai un singur punct comun; 3) să nu aibă de loc puncte comune. Să cercetăm pe rînd aceste trei cazuri.

1) Să presupunem că cele trei sfere date au două puncte comune. Inversiunea I avînd polul în unul dintre aceste două puncte (și de putere arbitrară) transformă cele trei sfere date și trei cercuri C, C' și C'' respectiv în planele fețelor și în muchiile unui triedru (împreună cu prelungirile lor). Punctele egal depărtate de cele trei muchii se dispun pe patru drepte (ex. 480,2°). Fiecare dintre aceste puncte este centrul unei sfere tangente la cele trei muchii ale triedrului.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, obținem patru familii de sfere $\overline{S}$, tangente la muchiile triedrului. Supunînd sferele $\overline{S}$ inversiunii I, obținem patru familii de sfere S.

Toate sferele $\overline{S}$, avînd centrul pe una dintre cele patru drepte, au, în punctele uneia dintre muchiile triedrului, un plan tangent comun, deoarece razele duse spre punctele de contact sînt paralele. De aici rezultă că toate sferele S ale unei familii sînt tangente în punctele cercului C la aceeași sferă (inversa planului tangent comun) și că același lucru are loc atît pentru punctele cercului C', cît și pentru punctele cercului C''.

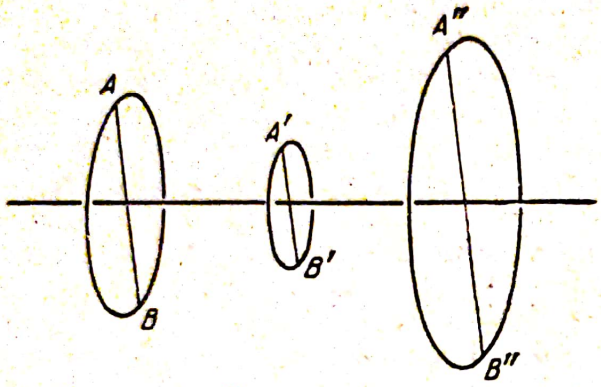


Fig. 228

Dacă prin punctele de contact ale fiecărei sfere $\overline{S}$ a unei familii cu muchiile triedrului, vom duce plane, atunci toate aceste plane vor fi evident paralele (deoarece ele determină segmente proporționale pe muchiile triedrului). De aici rezultă că toate sferele Σ, despre care este vorba în enunț, sînt tangente în polul de inversiune, punctul comun al celor trei sfere date.

2) Să presupunem că cele trei sfere au un singur punct comun. Inversiunea I avînd polul în acest punct (și puterea arbitrară) transformă cele trei sfere date și cele trei cercuri C, C' și C'' respectiv în fețele și în muchiile unei suprafețe prismatice triunghiulare. Locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei muchii ale acesteia este o dreaptă (aceasta rezultă din partea a doua a soluției ex. 441). Așadar, obținem o familie de sfere $\overline{S}$, tangente la muchiile suprafeței prismatice, deci și o familie de sfere S.

La fel ca în primul caz, vom demonstra că toate sferele S sînt tangente, în punctele cercului C, la o aceeași sferă și că aceasta este valabil atît pentru cercul C', cît și pentru cercul C''.

Dacă, prin punctele de contact ale fiecărei sfere $\overline{S}$ cu muchiile suprafeței prismatice, vom duce un plan, atunci toate aceste plane vor fi evident paralele, și obținem iarăși familia de sfere Σ, tangente în punctul lor comun.

În afara sferelor S, despre care am vorbit mai sus, mai există, în cazul de față, o infinitate de sfere tangente la cele trei cercuri C, C' și C'', în punctul lor de contact comun (inversiunea I le transformă în plane paralele cu muchiile suprafeței prismatice).

3) Să presupunem că cele trei sfere date nu au puncte comune. Inversiunea I, avînd polul în unul dintre punctele cercului despre care este vorba la exercițiul 697 (și de putere arbitrară), transformă cele trei sfere date în trei sfere cu centrele coliniare, deoarece toate sferele ortogonale la cele trei date se transformă în plane prin inversiunea I. Prin urmare, cele trei cercuri date C, C' și C'' se transformă în trei cercuri coaxiale. Să notăm cu AB, $A'B'$ și $A''B''$ trei diametri paraleli ale acestor trei cercuri transformate (fig. 694). Sferele avînd ca cercuri mari respectiv cercurile $AA'A''$, $AB'A''$, $AA'B''$ și $AB'B''$ sînt tangente la cele trei cercuri date (una dintre aceste sfere se poate

transforma într-un plan). Rotind aceste patru sfere în jurul axei comune a celor trei cercuri transformate, vom obține cele patru familii de sfere $\overline{S}$, tangente la cele trei cercuri transformate. Efectuînd inversiunea I, obținem cele patru familii de sfere S.

Toate sferele $\overline{S}$ ale unei familii sînt, evident, tangente în punctele cercului de diametru AB la o aceeași sferă. De aici rezultă că toate sferele S ale unei familii sînt tangente în punctele cercului C la o aceeași sferă și că același lucru are loc atît pentru punctele cercului C', cît și pentru punctele cercului C''.

Așadar, vedem că, în cazul a trei sfere cu un singur punct comun, avem o excepție la regula generală; în acest caz, nu putem vorbi despre patru familii de sfere tangente la cele trei cercuri C, C' și C''.

960. Să analizăm, pe rînd, propozițiile care corespund celor date în fiecare dintre exercițiile 479—483.

Exercițiul 479. Planele fețelor unui triedru se transformă, printr-o inversiune arbitrară, în trei sfere avînd două puncte comune. Planele bisectoare ale diedrelor formate de planele fețelor se transformă atunci în sfere, trecînd fiecare prin curba de intersecție a două sfere și împărțind în părți egale unghiul dintre ele; vom numi o astfel de sferă *sfera bisectoare* a celor două sfere.

Teorema de la exercițiul 479 ne conduce direct la următoarea propoziție:

I. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele șase sfere bisectoare ale acestor sfere, luate două cîte două, trec prin patru cercuri.*

Cele patru drepte după care se intersectează trei cîte trei planele bisectoare ale diedrelor unui triedru și ale suplementelor lor formează locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei plane ale fețelor triedrului. Astfel spus, aceste patru drepte sînt locul geometric al centrelor sferelor tangente la cele trei plane (v. ex. 685). În sfîrșit, se poate folosi o a treia formă de exprimare: orice sferă tangentă la cele trei plane ale fețelor unui triedru taie sub un unghi drept una dintre cele patru drepte despre care este vorba.

Transformînd ultima propoziție printr-o inversiune arbitrară, ajungem imediat la următorul rezultat:

II. *Orice sferă tangentă la trei sfere date, care au două puncte comune, intersectează sub un unghi drept unul dintre cele patru cercuri despre care este vorba în propoziția* I.

Pînă acum, am considerat trei sfere avînd două puncte comune. Pentru a trece la cazul a trei sfere arbitrare, ale căror centre nu sînt coliniare (în cele ce urmează, nu vom mai repeta această rezervă), vom folosi următoarele considerații.

Fiecare dintre sferele bisectoare a două sfere secante date este, evident, sfera inversiunii care transformă aceste sfere una în cealaltă. Polii acestor două inversiuni, adică centrele sferelor bisectoare, vor fi centrele de asemănare ale sferelor date. Dacă cele două sfere nu au puncte comune, există numai o singură sferă, în raport cu care inversiunea transformă sferele date una în cealaltă; este firesc ca această sferă să fie denumită *sfera bisectoare* a celor două sfere date (compară Geometria plană, p. 237). Dacă sferele date sînt exterioare (sau interioare), atunci centrul acestei sfere va fi centrul lor de asemănare exterior (respectiv, interior). O propoziție analogă are loc și pentru două sfere tangente. Remarcăm, mai departe, că trei sfere care trec printr-un același cerc pot fi considerate ca un caz particular a trei sfere care au planul radical comun.

Scanned with OKEN Scanner

Putem enunța acum următoarea propoziție care este generalizarea propoziției I pentru cazul a trei sfere arbitrare:

I a. *Dacă trei sfere, în raport cu care inversiunile transformă trei sfere date, luate două cîte două, una în cealaltă, sînt alese astfel încît centrele lor să fie coliniare, atunci aceste trei sfere de inversiune au planul radical comun.*

Demonstrația acestei teoreme este analogă cu demonstrația teoremei corespunzătoare pentru trei cercuri în plan (probl. 276).

Fie S_1, S_2 și S_3 cele trei sfere date; Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12} sferele inversiunilor care transformă respectiv pe S_2 în S_3, pe S_3 în S_1 și pe S_1 în S_2. Aceste sfere sînt astfel alese, încît centrele lor să fie situate pe aceeași axă de asemănare a sferelor date.

Orice sferă ortogonală simultan la sferele S_2 și Σ_{23} se transformă în ea însăși prin inversiunea în raport cu sfera Σ_{23} și va fi, deci ortogonală la sfera S_3; prin urmare, cele trei sfere S_2, S_3 și Σ_{23} au planul radical comun (cf. nr. 223). Acest plan radical trece prin axa radicală a celor trei sfere date. De aceea, un punct arbitrar a acestei axe radicale are în raport cu sfera Σ_{23} aceeași putere ca și în raport cu oricare dintre sferele date. Aceasta este valabil și pentru fiecare dintre sferele Σ_{13} și Σ_{12}. Prin urmare, planul radical comun al sferelor Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12} va fi planul care trece prin axa radicală a celor trei sfere date și este perpendicular pe aceea dintre axele lor de asemănare pe care se află centrele celor trei sfere Σ.

Propoziția I a poate fi demonstrată și cu ajutorul propoziției de la exercițiul 945, însă numai pentru cazul cînd *două oarecare dintre cele trei sfere de inversiune sînt secante*; fie acestea sferele Σ_{12} și Σ_{13}.

Să luăm ca pol al unei inversiuni de putere arbitrară unul dintre punctele comune ale sferelor Σ_{12} și Σ_{13}. În virtutea celor arătate la soluția exercițiului 945, sferele S_1, S_2 și S_3 se transformă prin această inversiune în trei sfere egale S_1', S_2' și S_3'; sferele de inversiune Σ_{12} și Σ_{13} se transformă respectiv în planele radicale (adică în planele de simetrie) ale sferelor S_1', S_2' și S_1', S_3'. Deoarece prin dreapta de intersecție a ultimelor două plane trece și planul radical (adică planul de simetrie) al sferelor S_2' și S_3', înseamnă că și sfera Σ_{23} va trece prin intersecția sferelor Σ_{12} și Σ_{13}.

Am presupus, pînă acum, că cele trei inversiuni menționate în propoziția I a au sfere de inversiune. Putem merge însă și mai departe, generalizînd după cum urmează propoziția I a, pentru cazul cînd printre cele trei inversiuni considerate există inversiuni de putere negativă.

Dacă sferele celor trei inversiuni au planul radical comun, atunci orice sferă care se transformă în ea însăși prin două dintre cele trei inversiuni va fi transformată în ea însăși și de a treia inversiune; reciproc, dacă ultima proprietate are loc, atunci sferele celor trei inversiuni au planul radical comun. În adevăr, orice sferă care este transformată în sine însăși de două dintre inversiunile date va fi ortogonală la cele două sfere de inversiune; prin urmare, ea va fi ortogonală și la a treia sferă de inversiune, care are planul radical comun cu primele două. Această observație ne dă posibilitatea de a enunța următoarea propoziție, care generalizează propoziția I a:

I b. *Dacă trei inversiuni care transformă trei sfere date, două cîte două una în cealaltă, sînt astfel alese încît polii lor să se situeze pe o aceeași axă de ase-*

mănare, atunci orice sferă care se transformă în ea însăși prin două dintre aceste inversiuni se transformă în ea însăși și prin a treia.

Următoarea demonstrație a acestei propoziții poate fi considerată drept o generalizare a primei demonstrații pentru propoziția I a, dată mai sus.

Fie S_1, S_2 și S_3 trei sfere date; I_{23}, I_{13} și I_{12} inversiunile care transformă respectiv S_2 în S_3, S_3 în S_1 și S_1 în S_2. Aceste inversiuni sînt astfel alese, încît polii lor să fie situați pe una dintre axele de asemănare ale sferelor date. În virtutea celor spuse în soluția exercițiului 937, există o infinitate de sfere Σ_1, care se transformă fiecare în sine însăși, atît prin inversiunea I_{13} cît și prin inversiunea I_{12}. Centrele tuturor acestor sfere se află într-un același plan M, perpendicular pe respectiva axă de asemănare. Planul M trece prin axa radicală a celor trei sfere date, deoarece fiecare sferă ortogonală la cele trei sfere date se transformă în ea însăși, atît prin inversiunea I_{13}, cît și prin inversiunea I_{12}. Analog, există o infinitate de sfere Σ_2 care se transformă fiecare în ea însăși atît prin inversiunea I_{12}, cît și prin inversiunea I_{23}. Centrele acestor sfere se află de asemenea într-un același plan, care trece prin axa radicală a celor trei sfere date și este perpendicular pe axa de asemănare considerată, adică în același plan M considerat mai sus. Orice sferă Σ_1 coincide cu sfera Σ_2 concentrică cu ea, și reciproc, deoarece puterea polului inversiunii I_{12} în raport cu fiecare dintre aceste sfere este egală cu puterea inversiunii I_{12}. Prin aceasta, propoziția I b este demonstrată.

Trecem la generalizarea propoziției II, pentru cazul a trei sfere arbitrare. Orice sferă ortogonală la unul dintre cercurile despre care este vorba în propoziția I este ortogonală la cele trei sfere bisectoare care trec prin acest cerc. Într-un caz mai general, putem considera sfere ortogonale la sferele a trei inversiuni care transformă una în cealaltă cele trei sfere date, luate două cîte două, și care au ca poli trei centre de asemănare ale sferelor date, situate pe aceeași axă de asemănare. În cazul cel mai general, putem vorbi despre sfere transformate în ele înseși prin fiecare dintre cele trei inversiuni (indiferent dacă acestea au sau nu sfere de inversiune).

Așadar, ajungem la următoarea generalizare a propoziției II:

II a. *Orice sferă tangentă la trei sfere date se transformă în ea însăși prin fiecare dintre cele trei inversiuni care transformă una în cealaltă sferele date, luate două cîte două, și care au ca poli trei centre de asemănare ale sferelor date, situate pe o aceeași axă de asemănare.*

Demonstrația acestei propoziții nu prezintă dificultăți. Orice sferă tangentă la cele trei sfere date S_1, S_2 și S_3 este tangentă la sferele S_2 și S_3 în două puncte antiomoloage în raport cu unul dintre centrele lor de asemănare S_{23}. Prin urmare, această sferă se transformă în sine însăși prin inversiunea de pol S_{23}, care transformă sfera S_2 în S_3. Dintr-un motiv analog, aceeași sferă se transformă în sine însăși și prin una dintre inversiunile care duc sfera S_1 în S_3. În virtutea propoziției I b, aceeași sferă se transformă în sine însăși și prin a treia inversiune despre care este vorba în enunțul teoremei.

Exercițiul 479 bis. Cele șase plane bisectoare ale diedrelor unui triedru și ale suplementelor lor se transformă printr-o inversiune arbitrară în cele șase sfere bisectoare ale celor trei sfere transformate, luate două cîte două (v. mai sus generalizarea ex. 479). În acest caz, cele trei plane bisectoare ale diedrelor (precum și planele bisectoare ale unuia dintre diedre și planele bisec-

toare ale suplementelor celorlalte două diedre ale triedrului) se transformă în trei sfere bisectoare care trec prin același cerc. Planele bisectoare ale celor trei suplemente ale diedrelor triedrului (precum și planul bisector al suplementului unuia dintre diedrele triedrului și planele bisectoare ale celorlalte două diedre) se transformă în trei sfere bisectoare care *nu* trec prin același cerc.

Teorema de la exercițiul 479 *bis*, duce imediat la următoarea propoziție:

III. *Dacă trei sfere au două puncte comune și dacă trei sfere bisectoare ale acestor trei sfere, luate două cîte două, sînt astfel alese încît să nu treacă prin același cerc, atunci cele trei cercuri situate respectiv pe cele trei sfere bisectoare alese, care trec prin cele două puncte comune ale sferelor date și sînt ortogonale la respectivele curbe de intersecție a două cîte două dintre cele trei sfere date, sînt situate pe aceeași sferă, secantă sub unghiuri egale cu cele trei sfere date.*

Înainte de a generaliza această propoziție pentru cazul a trei sfere oarecare, secante două cîte două, vom considera cazul a două sfere secante. Să folosim propoziția dată la observația soluției exercițiului 455. Transformînd planele despre care este vorba acolo printr-o inversiune arbitrară, sîntem conduși direct la următoarea propoziție:

IV. *Dacă o sferă secantă sub unghiuri egale la două sfere secante date intersectează și curba lor de intersecție, atunci ea intersectează una dintre sferele bisectoare ale celor două sfere date, după un cerc ortogonal la curba de intersecție a sferelor date.*

Trecînd la trei sfere arbitrare, secante două cîte două, vom enunța următoarea propoziție analogă cu ultima propoziție de la soluția exercițiului 479 *bis*. Ea poate fi considerată drept o generalizare a propoziției III.

III a. *Dacă o sferă, secantă sub unghiuri egale la trei sfere date, secante două cîte două, intersectează toate trei curbele de intersecție două cîte două ale sferelor date, atunci ea intersectează trei dintre sferele bisectoare ale sferelor date, luate două cîte două, după cercuri care formează unghiuri drepte cu cercurile de intersecție două cîte două ale sferelor date.*

Aceste trei sfere bisectoare ale sferelor date nu au plan radical comun.

Prima jumătate a acestei propoziții rezultă direct din propoziția IV. O putem demonstra complet astfel.

O sferă Σ, secantă sub unghiuri egale la cele trei sfere date, secante două cîte două, intersectează cele trei cercuri de intersecție. Deoarece sfera Σ taie sferele S_2 și S_3 sub unghiuri egale, ea se transformă în sine însăși prin una dintre inversiunile care duc sfera S_2 în S_3 (**684**), și, de aceea, ea este ortogonală la una dintre sferele bisectoare ale sferelor S_2 și S_3 date; să notăm această sferă bisectoare cu Σ_{23}. Dintr-un motiv analog, sfera Σ este ortogonală la una dintre sferele bisectoare ale sferelor S_1 și S_3 date, pe care o vom nota cu Σ_{13}. Prin urmare, sfera Σ va fi ortogonală și la una dintre sferele bisectoare ale sferelor date S_1 și S_2, anume la sfera Σ_{12}, avînd planul radical comun cu sferele Σ_{23} și Σ_{13}.

Să notăm cu Σ'_{23}, Σ'_{13} și Σ'_{12}, distincte de sferele Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12}, sferele bisectoare ale sferelor date luate două cîte două. Cele trei sfere Σ'_{23}, Σ'_{13} și Σ'_{12} nu au plan radical comun.

Deoarece sferele Σ și Σ'_{23} sînt ambele ortogonale la Σ_{23}, înseamnă că și cercul lor de intersecție Γ_1 formează un unghi drept cu sfera Σ_{23}. Altfel spus, sfera Σ intersectează sfera Σ'_{23}, după un cerc Γ_1, care formează un unghi drept cu sfera Σ_{23}. Prin urmare, cercul Γ_1 formează unghiuri drepte cu toate cercu-

rile situate pe sfera Σ_{23}, și care trec prin punctele sale de intersecție cu această sferă, deci și cu intersecția sferelor S_2 și S_3.

Așadar, sfera Σ intersectează sfera Σ^*_{23} după un cerc care formează un unghi drept cu intersecția sferelor S_2 și S_3. Bineînțeles, sfera Σ se bucură de proprietăți analoge și în raport cu sferele Σ^*_{13} și Σ^*_{12}. Deoarece sferele Σ^*_{23}, Σ^*_{13} și Σ^*_{12} nu au plan radical comun, teorema este complet demonstrată.

Exercițiul 480,1°. Vom începe cu următoarea observație preliminară.

Fie date două cercuri secante, situate pe aceeași sferă. Două cercuri situate pe aceeași sferă, care trec prin punctele de intersecție ale celor două cercuri date și împart în părți egale unghiurile formate de acestea, le vom denumi cercurile bisectoare ale cercurilor date (fig. 229).

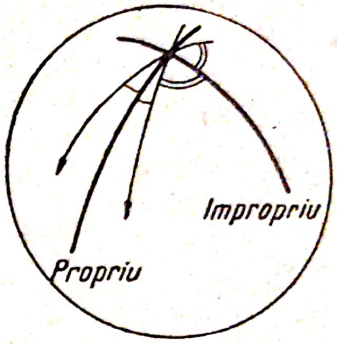


Fig. 229

După cum am menționat mai sus, planele fețelor unui triedru se transformă în trei sfere având două puncte comune, printr-o inversiune arbitrară. Dreptele după care se intersectează planele fețelor se transformă atunci în cercurile după care aceste trei sfere sînt secante două cîte două. Bisectoarele unghiurilor plane ale triedrului și ale suplementelor acestora se transformă, evident, în cercurile bisectoare ale curbelor după care sferele date se intersectează două cîte două. Teorema de la exercițiul 480, 1° conduce imediat la următoarea propoziție:

V. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele șase cercuri bisectoare ale cercurilor după care aceste sfere sînt secante două cîte două se situează trei cîte trei pe cele patru sfere care formează unghiuri egale cu cercurile după care sferele date sînt secante două cîte două.*

Pentru a stabili mai precis care anume dintre cele șase cercuri bisectoare se află pe aceeași sferă, vom alege un sens pozitiv arbitrar pe cercurile de intersecție două cîte două ale sferelor date. Efectuînd inversiunea cu polul în unul dintre punctele comune ale celor trei sfere și cu o putere arbitrară, ne vom convinge că această alegere corespunde alegerii arbitrare a sensurilor pozitive pe dreptele de intersecție două cîte două ale celor trei plane care trec printr-un punct, adică va corespunde alegerii arbitrare a unuia dintre cele opt triedre formate de ele.

Cercul bisector care împarte în părți egale unghiul dintre două cercuri *orientate* și unghiul opus la vîrf cu el va fi denumit cerc bisector *propriu* al celor două cercuri orientate, iar celălalt, va fi cercul bisector *impropriu* (fig. 229). Cercurilor bisectoare proprii (improprii) ale cercurilor de intersecție orientate ale celor trei sfere le corespund, în inversiune, bisectoarele unghiurilor plane ale triedrului ales (bisectoarele unghiurilor plane suplementare cu ele).

Așadar, obținem următoarea precizare a propoziției V:

V a. *Dacă trei sfere au două puncte comune, iar pe cercurile după care ele se intersectează două cîte două alegem arbitrar sensuri pozitive, atunci cele trei cercuri bisectoare improprii ale cercurilor de intersecție, luate două cîte două, se află pe aceeași sferă; aceeași proprietate are loc, dacă luăm cercurile bisectoare proprii a două perechi de cercuri de intersecție și cercul bisector impropriu al celei de-a treia perechi; fiecare dintre cele patru sfere astfel obținute formează unghiuri egale cu cercurile după care sferele date sînt secante două cîte două.*

Din propoziția dată în observația la soluția exercițiului 480.1°, rezultă imediat (dacă efectuăm o inversiune arbitrară) următoarea propoziție, care poate fi considerată ca o generalizare a propoziției V:

V b. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci orice sferă care trece prin unul dintre punctele lor comune și formează unghiuri egale cu cercurile lor de intersecție taie fiecare dintre cele trei sfere date după un cerc care formează unghiuri egale cu cercurile după care această sferă se intersectează cu celelalte două sfere date.*

Pînă acum, am considerat trei sfere avînd două puncte comune. Propoziția Vb se generalizează după cum urmează pentru cazul a trei sfere arbitrare, secante două cîte două:

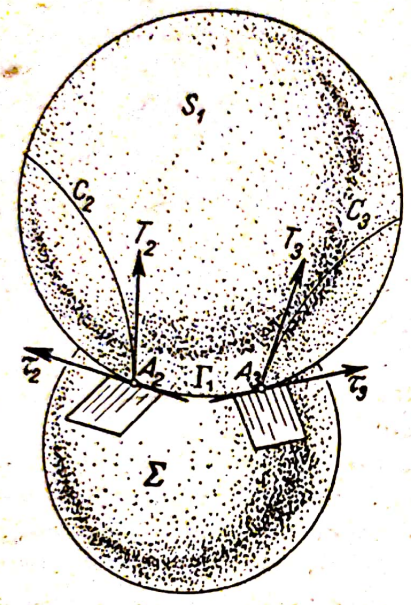


Fig. 230

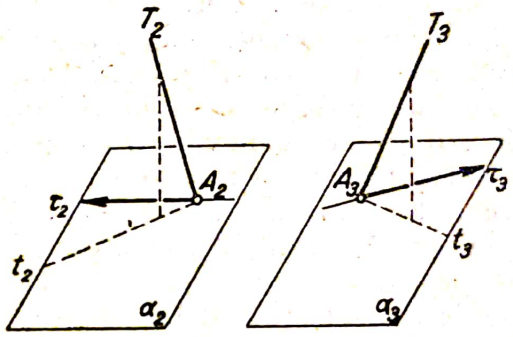


Fig. 231

V c. *Dacă trei sfere sînt secante două cîte două, atunci orice sferă care formează unghiuri egale cu cercurile după care ele sînt secante două cîte două intersectează fiecare dintre cele trei sfere date după un cerc care formează unghiuri egale cu cercurile de intersecție ale acestei sfere cu celelalte două sfere date.*

Trecem la demonstrarea acestei propoziții. Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere date, secante două cîte două; C_1, C_2, C_3 curbele de intersecție respective ale sferelor S_2 și S_3, S_3 și S_1, S_1 și S_2. Să notăm cu Σ (fig. 230) o sferă oarecare formînd cu cercurile C_1, C_2 și C_3 unghiuri egale, cu Γ_1 intersecția ei cu sfera S_1, cu A_2 și cu A_3 punctele sale de intersecție cu cercurile C_2 și C_3, cu A_2T_2 și A_3T_3 tangentele la cercurile C_2 și C_3 în punctele A_2 și A_3; cu $A_2\tau_2$ și $A_3\tau_3$ tangentele la cercul Γ_1, în aceleași puncte și cu α_2 și α_3 planele tangente în aceleași puncte la sfera Σ. Vom alege sensurile pe tangentele A_2T_2, A_3T_3, $A_2\tau_2$ și $A_3\tau_3$, astfel ca cele două unghiuri $T_2A_2\tau_2$ și $T_3A_3\tau_3$ să fie ascuțite. În sfîrșit, fie A_2t_2 și A_3t_3 (fig. 231) proiecțiile semidreptelor A_2T_2 și A_3T_3 respectiv pe planele α_2 și α_3.

Să considerăm triedrele $A_2T_2t_2\tau_2$ și $A_3T_3t_3\tau_3$. În aceste triedre, diedrele de muchii A_2t_2 și A_3t_3 sînt drepte (deoarece A_2t_2 și A_3t_3 sînt proiecțiile semidreptelor A_2T_2 și A_3T_3 pe planele α_2 și α_3), diedrele de muchii $A_2\tau_2$ și $A_3\tau_3$ sînt egale (deoarece fiecare dintre ele este un unghi format de sferele S_1 și Σ), unghiurile plane $T_2A_2t_2$ și $T_3A_3t_3$ sînt de asemenea egale (deoarece fiecare dintre ele este egal cu unghiul format de sfera Σ respectiv cu cercurile C_2 și C_3), unghiurile plane $T_2A_2\tau_2$ și $T_3A_3\tau_3$ sînt ambele ascuțite. De aici

putem trage concluzia[1]) că triedrele $A_2T_2t_2\tau_2$ și $A_3T_3t_3\tau_3$ sînt egale sau simetrice; prin urmare, unghiurile plane $T_2A_2\tau_2$ și $T_3A_3\tau_3$ sînt egale, ceea ce demonstrează teorema.

Exercițiul 480, 2°. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, triedrul dat și ținînd seama de cele arătate mai sus, obținem imediat, din teorema de la exercițiul 480, 2°, următoarea propoziție:

VI. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele șase sfere, care sînt ortogonale fiecare la una dintre sferele date și trec prin unul dintre cercurile bisectoare ale curbelor sale de intersecție cu celelalte două sfere date, trec trei cîte trei prin patru cercuri. Fiecare dintre aceste patru cercuri formează un unghi drept cu una dintre sferele considerate în propoziția V.*

Pentru a stabili mai precis care anume dintre cele șase sfere despre care este vorba trec prin același cerc, vom folosi cele arătate mai sus la deducerea propoziției Va. Obținem cu ușurință următoarea propoziție:

VIa. *Dacă trei sfere au două puncte comune, iar pe cercurile după care ele sînt secante două cîte două, alegem arbitrar sensuri pozitive, atunci cele trei sfere care sînt fiecare ortogonale la una dintre sferele date și trec prin cercul bisector propriu al curbelor sale de intersecție cu celelalte două sfere date, trec printr-un singur cerc; aceeași proprietate are loc dacă luăm cercurile bisectoare improprii a două perechi de linii de intersecție ale sferelor date și cercul bisector propriu al celei de-a treia perechi.*

Cele patru drepte despre care este vorba la exercițiul 480, 2° formează locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei muchii ale triedrului (bineînțeles, împreună cu prelungirile lor). Mai putem spune altfel că aceste patru drepte sînt locul geometric al centrelor sferelor tangente la cele trei muchii. În sfîrșit, mai putem spune altfel, că *orice sferă tangentă la cele trei muchii ale triedrului* (sau la prelungirile lor) *taie sub un unghi drept una dintre cele patru drepte despre care este vorba.*

Transformînd această propoziție, printr-o inversiune arbitrară, ajungem imediat la următorul rezultat:

VII. *Orice sferă tangentă la cele trei cercuri după care se intersectează două cîte două trei sfere avînd două puncte comune, intersectează sub un unghi drept unul dintre cele patru cercuri despre care este vorba în propoziția VI.*

Înainte de a merge mai departe, vom demonstra următoarea propoziție auxiliară:

Dacă trei sfere se intersectează două cîte două și nici o pereche dintre cercurile lor de intersecție nu sînt tangente, atunci polii celor șase inversiuni care transformă unele în altele aceste cercuri de intersecție, luate două cîte două, se află trei cîte trei pe patru drepte.

Fie S_1, S_2 și S_3 cele trei sfere date; C_1, C_2 și C_3 cercurile de intersecție respective ale sferelor S_2 și S_3, S_3 și S_1, S_1 și S_2. Să notăm cu A_1 și cu B_1 punctele de intersecție ale cercului C_1 cu planul centrelor sferelor date

---

[1]) Cel mai simplu este să folosim următorul criteriu de egalitate a triedrelor dreptunghice:

Dacă unul dintre diedrele, care nu este drept, ale primului triedru dreptunghic este egal cu unul dintre diedrele celui de-al doilea, catetele celor două triedre opuse acestor diedre sînt egale, iar ipotenuzele celor două triedre vor fi ambele sau unghiuri ascuțite sau unghiuri obtuze, atunci triedrele sînt egale sau simetrice (v. soluția ex. 489, Construcția f, Obs.).

(reprezentat în fig. 232); analog, vom nota cu A_2, B_2 și cu A_3, B_3 punctele de intersecție ale cercurilor C_2 și C_3 cu același plan.

Una dintre cele două inversiuni care transformă cercul C_2 în C_3 transformă, evident, punctul A_2 în A_3 și punctul B_2 în B_3, iar cealaltă transformă punctul A_2 în B_3 și punctul A_3 în B_2. De aceea, polii celor două inversiuni vor fi respectiv punctul de intersecție P_{23} al dreptelor A_2A_3 și B_2B_3 și (ne-

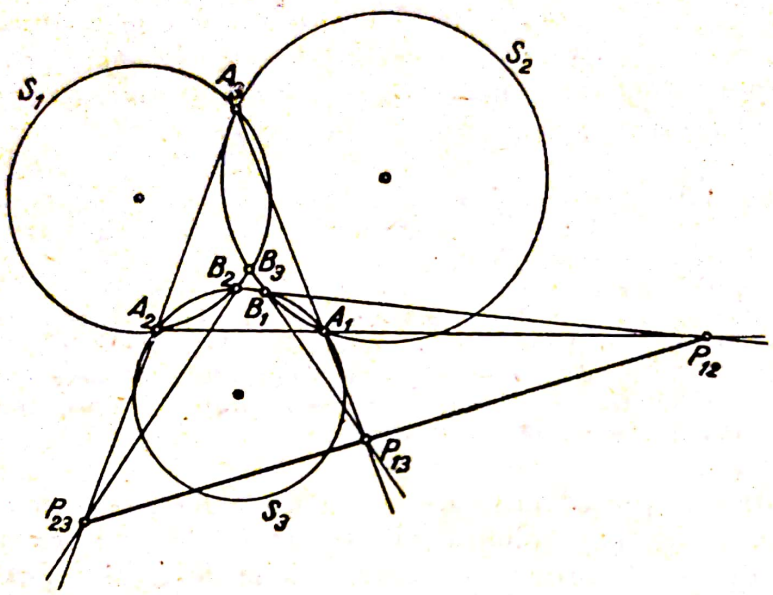


Fig. 232

reprezentat în figură) punctul de intersecție P^*_{23} al dreptelor A_2B_3 și B_2A_3. În mod analog se determină și polii celorlalte patru inversiuni, care transformă cercul C_3 în C_1, precum și cercul C_1 în C_2; dintre ele sînt reprezentate în figură punctul de intersecție P_{13} al dreptelor A_1A_3 și B_1B_3 și punctul de intersecție P_{12} al dreptelor A_1A_2 și B_1B_2 (nu sînt reprezentate punctul de intersecție P^*_{13} al dreptelor A_1B_3 și B_1A_3 și punctul de intersecție P^*_{12} al dreptelor A_1B_2 și B_1A_2).

Să considerăm triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$. Dreptele A_1B_1, A_2B_2 și A_3B_3, care unesc vîrfurile omoloage, sînt concurente, ca axe radicale a trei cercuri luate două cîte două. Prin urmare, în virtutea teoremei referitoare la triunghiurile omotetice din Geometria plană (**195**), punctele de intersecție P_{23}, P_{13} și P_{12} ale laturilor omoloage sînt coliniare. Același lucru este valabil pentru punctele P_{23}, P^*_{13} și P^*_{12} (triunghiurile $B_1A_2A_3$ și $A_1B_2B_3$), precum și pentru punctele P^*_{23}, P_{13} și P^*_{12} (triunghiurile $A_1B_2A_3$ și $B_1A_2B_3$) și pentru punctele P^*_{23}, P^*_{13} și P_{12} (triunghiurile $A_1A_2B_3$ și $B_1B_2A_3$).

Pentru a trece acum de la cazul sferelor cu două puncte comune la cazul a trei sfere arbitrare, secante două cîte două, vom generaliza după cum urmează noțiunea de cerc bisector pentru orice pereche de cercuri de pe aceeași sferă.

Dacă două cercuri de pe aceeași sferă sînt secante, atunci cercurile lor bisectoare (în sensul stabilit mai sus), sînt cercurile inversiunilor de pe sferă

care transformă cercurile date unul în celălalt. Vom extinde această definiție și la cazul general: vom numi *cerc bisector* a două cercuri arbitrare de pe o sferă cercul în raport cu care o inversiune transformă cercurile date unul în celălalt. Dacă cercurile considerate se taie, obținem două cercuri bisectoare în sensul anterior al cuvîntului; dacă cercurile considerate nu au puncte comune, obținem numai un singur cerc bisector, deoarece, dintre cele două inversiuni care transformă aceste cercuri unul în celălalt, numai una are, în acest caz, sferă de inversiune; în sfîrșit, dacă cercurile considerate sînt tangente, atunci există numai o singură inversiune care transformă unul dintre cercurile date în celălalt, și această inversiune are cerc de inversiune.

Putem enunța acum următoarea propoziție care poate fi considerată ca generalizare a propoziției VI:

VI b. *Dacă trei sfere în raport cu care inversiunile transformă unele în altele cercurile de intersecție, luate două cîte două, a trei sfere date, secante două cîte două, sînt astfel alese încît centrele lor să fie coliniare, atunci aceste trei sfere au planul radical comun.*

Demonstrația acestei propoziții este analogă cu demonstrația propoziției I a.

Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere date, secante două cîte două; C_1, C_2, C_3 cercurile de intersecție respective ale sferelor S_2 și S_3, S_3 și S_1, S_1 și S_2. Polii celor șase inversiuni care transformă unul în altul cercurile C_1, C_2 și C_3 luate două cîte două (presupunem că nici o pereche dintre aceste cercuri nu sînt tangente), se află, după cum s-a arătat mai sus, trei cîte trei pe patru drepte. Presupunem că trei oarecare dintre aceste inversiuni, ai căror poli sînt coliniari, au sfere de inversiune; să notăm cu Σ_{23}, Σ_{13}, Σ_{12} sferele inversiunilor care transformă respectiv C_2 în C_3, C_3 în C_1, C_1 în C_2.

Orice sferă ortogonală simultan la sferele S_1, S_2 și Σ_{23}, deci și la cercul C_3, se transformă în sine însăși prin inversiunea în raport cu sfera Σ_{23}, și, deci ea va fi ortogonală și la cercul C_2, deci și la sfera S_3. De aceea, cele patru sfere S_1, S_2, S_3 și Σ_{23} au axa radicală comună, care coincide cu axa radicală a sferelor date. Un punct arbitrar de pe această axă radicală are în raport cu sfera Σ_{23} aceeași putere ca și în raport cu fiecare dintre sferele date. Același lucru este valabil și pentru sferele Σ_{13} și Σ_{12}. Prin urmare, planul radical comun al sferelor Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12} este planul perpendicular pe linia centrelor lor și care trece prin axa radicală a celor trei sfere date S_1, S_2, S_3.

Am presupus, pînă acum, că cele trei inversiuni despre care este vorba au sfere de inversiune. Putem merge însă și mai departe, generalizînd propoziția VI b, pentru cazul în care printre cele trei inversiuni există unele de putere negativă, procedînd la fel ca atunci cînd am trecut de la propoziția Ia la propoziția I b. Obținem următoarea propoziție:

VI c. *Dacă cele trei inversiuni care transformă unul în altul cercurile de intersecție, luate două cîte două, a trei sfere date, secante două cîte două, sînt astfel alese, încît polii lor să fie coliniari, atunci orice sferă care se transformă în sine însăși prin două dintre aceste trei inversiuni se transformă în sine însăși și prin a treia.*

Fie S_1, S_2 și S_3 trei sfere date, secante două cîte două; C_1, C_2 și C_3, ca și mai sus, cercurile lor de intersecție două cîte două; I_{23}, I_{13} și I_{12} in-

versiunile care transformă respectiv C_2 în C_3, C_3 în C_1 și C_1 în C_2. Aceste inversiuni sînt astfel alese, încît polii lor să fie coliniari.

Vom putea relua, pentru acest caz, cuvînt cu cuvînt, demonstrația propoziției I b, dacă vom arăta în prealabil că *orice sferă ortogonală la trei sfere date se transformă în sine însăși prin fiecare dintre inversiunile considerate.* Să demonstrăm aceasta, de exemplu, pentru inversiunea I_{23}.

Sfera $\sum$, ortogonală la cele trei sfere date, va intersecta sub un unghi drept cercurile C_2 și C_3 și va tăia, deci, sfera dată S_1 după un cerc Γ, de asemenea ortogonal la C_2 și la C_3. Pe sfera S_1, cercul Γ, care formează unghiuri *drepte* cu C_2 și cu C_3, va fi transformat în sine însuși de fiecare dintre inversiunile care duc cercul C_2 în C_3 (compară nr. **691**, și nr. **227** *bis*). Prin urmare, în spațiu, sfera $\sum$, care trece prin cercul Γ, va fi transformată în sine însăși prin fiecare dintre inversiunile care duc cercul C_2 în C_3, deci și prin inversiunea I_{23}.

Propoziția VI c poate fi considerată demonstrată.

În sfîrșit, să trecem la generalizarea propoziției VII pentru cazul a trei sfere arbitrare, secante două cîte două. Raționînd la fel ca atunci cînd am trecut de la propoziția II la II a, ajungem la următoarea generalizare a propoziției VII:

VII a. *Dacă trei sfere sînt secante două cîte două, atunci orice sferă tangentă la cele trei cercuri de intersecție se transformă în sine însăși prin fiecare dintre cele trei inversiuni care duc aceste cercuri de inversiune, luate două cîte două, unul în altul, și care au ca poli trei puncte coliniare.*

Fie iarăși S_1, S_2 și S_3 cele trei sfere date: C_1, C_2 și C_3 cercurile după care ele se intersectează două cîte două. Sfera $\sum$, tangentă la cele trei cercuri C_1, C_2 și C_3, intersectează sfera S_1, după cercul Γ, care este evident tangent la cercurile C_2 și C_3. Pe sfera S_1, punctele de contact se corespund în una dintre inversiunile care duc cercul C_2 în C_3 (**691**). Prin urmare, în spațiu, sfera $\sum$ se transformă în sine însăși prin una dintre inversiunile care transformă cercul C_2 în C_3. Dintr-un motiv analog, aceeași sferă $\sum$ se transformă în sine însăși și prin una dintre inversiunile care duc cercul C_3 în C_1. În virtutea propoziției VI c, sfera $\sum$ se transformă în sine însăși și prin a treia inversiune, menționată în enunțul teoremei.

Exercițiul 481. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, triedrul dat și ținînd seama de cele arătate mai sus, obținem imediat următoarea propoziție, din teorema dată la exercițiul 481, referitor la triedru:

VIII. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele șase sfere care trec fiecare prin intersecția a două dintre sferele date și prin unul dintre cercurile bisectoare ale celorlalte două cercuri după care se intersectează, două cîte două, sferele considerate, trec trei cîte trei prin patru cercuri.*

Pentru a preciza care anume dintre cele șase sfere considerate trec printr-un cerc, vom folosi cele spuse mai sus, la deducția propoziției V a. Obținem următoarea precizare a propoziției VIII:

VIII a. *Dacă trei sfere au două puncte comune, iar pe cercurile după care ele sînt secante două cîte două, alegem arbitrar sensuri pozitive, atunci cele trei sfere care trec fiecare prin cercul de intersecție a două dintre sferele date și prin cercul bisector propriu ale celorlalte două cercuri după care sferele date se intersectează două cîte două trec printr-un același cerc; aceeași proprietate are loc, dacă luăm cercurile bisectoare improprii a două perechi de cercuri de intersecție și cercul bisector propriu al celei de-a treia perechi.*

Scanned with OKEN Scanner

Exercițiul 481 bis. Dacă supunem triedrul considerat unei inversiuni arbitrare, atunci planele fețelor sale se transformă în trei sfere S_1, S_2 și S_3, având două puncte comune. Planele bisectoare ale unghiurilor suplementare diedrelor triedrului se transformă în trei sfere bisectoare ale sferelor S_1, S_2 și S_3, luate două cîte două, centrele acestor trei sfere bisectoare nefiind situate pe aceeași axă de asemănare (și același lucru are loc, dacă luăm planele bisectoare ale suplementului unuia dintre diedre și planele bisectoare ale celorlalte două diedre; compară cele arătate mai sus, la deducerea propoziției III).

Așadar, obținem următoarea propoziție:

IX. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele șase cercuri, după care fiecare sferă bisectoare a două dintre sferele date taie cea de-a treia sferă dată, se situează cîte trei pe patru sfere; trei dintre aceste șase cercuri sînt situate pe aceeași sferă, dacă sferele bisectoare care trec prin ele sînt astfel alese, încît centrele lor să nu se afle pe aceeași axă de asemănare.*

Înainte de a trece mai departe, să studiem următoarea propoziție:

X. *Dacă sînt date două inversiuni de poli P_1 și P_2 distincți și un punct arbitrar P pe dreapta P_1P_2, atunci există o inversiune de pol P, care transformă în sine însăși orice sferă transformată în sine însăși prin fiecare dintre inversiunile date.*

Puterea acestei din urmă inversiuni este pe deplin determinată prin condiția ca ea să transforme în sine însăși oricare dintre aceste sfere.

Să notăm cu k_1 și cu k_2 puterile celor două inversiuni date. Centrul M și raza r a unei sfere arbitrare care se transformă în sine însăși prin fiecare dintre aceste inversiuni (astfel de sfere există, în virtutea celor spuse în soluția ex. 937), satisfac, evident, următoarele condiții:

$$P_1M^2 - r^2 = k_1;\ P_2M^2 - r^2 = k_2. \tag{1}$$

Trebuie să demonstrăm existența unei constante k, astfel că, pentru orice sferă $M(r)$ care satisface condiția (1), să aibă loc egalitatea

$$PM^2 - r^2 = k. \tag{2}$$

În virtutea celor arătate în soluția exercițiului 218 (teorema lui Stewart modificată), avem, pentru orice sferă $M(r)$ care satisface condițiile (1), ca mărime absolută și ca semn

$$\begin{aligned} PM^2 - r^2 &= \left(\frac{PP_2}{P_1P_2}\cdot P_1M^2 + \frac{P_1P}{P_1P_2}\cdot P_2M^2 - P_1P\cdot PP_2\right) - r^2 = \\ &= \frac{PP_2}{P_1P_2}\cdot(r^2+k_1) + \frac{P_1P}{P_1P_2}\cdot(r^2+k_2) - P_1P\cdot PP_2 - r^2 = \\ &= \frac{PP_2}{P_1P_2}\cdot k_1 + \frac{P_1P}{P_1P_2}\cdot k_2 - P_1P\cdot PP_2. \end{aligned}$$

Comparînd cu egalitatea (2), vedem că puterea k a inversiunii căutate este dată de relația

$$k = \frac{PP_2}{P_1P_2}\cdot k_1 + \frac{P_1P}{P_1P_2}\cdot k_2 - P_1P\cdot PP_2. \tag{3}$$

Această putere mai poate fi definită, evident, din egalitatea $k = PM_0^2 - r_0^2$, unde $M_0(r_0)$ este una oarecare dintre sferele care se transformă în sine însăși prin fiecare dintre cele două inversiuni date.

Pentru a generaliza acum propoziția IX la cazul a trei sfere arbitrare, îi vom modifica în prealabil întrucîtva forma. Să notăm sferele date cu S_1, S_2 și S_3; sferele bisectoare considerate cu Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12}; în sfîrșit, ultima sferă despre care este vorba în propoziția IX o vom nota cu Σ. Evident, putem enunța propoziția IX în modul următor:

IX a. *Dacă trei sfere S_1, S_2 și S_3 au două puncte comune, iar sferele Σ_{23}, Σ_{13} și Σ_{12}, inversiunile în raport cu care transformă una în alta sferele date, luate două cîte două, sînt astfel alese încît centrele lor să nu fie situate pe aceeași axă de asemănare, atunci există o sferă Σ avînd planul radical comun cu sferele S_1 și Σ_{23}, precum și planul radical comun cu sferele S_2 și Σ_{13} și planul radical comun cu sferele S_3 și Σ_{12}.*

În cazul a trei sfere arbitrare, inversiunile care le transformă una în alta două cîte două pot să nu aibă sfere de inversiune. În acest caz, condiția ca cele trei sfere să aibă planul radical comun poate fi înlocuită printr-o condiție mai generală, ca fiecare sferă care se transformă în sine însăși, prin două dintre cele trei inversiuni să fie transformată în sine însăși și de a treia (dacă cele trei inversiuni au toate sfere de inversiune, atunci cele trei sfere de inversiune vor avea, în acest din urmă caz, planul radical comun).

Ținînd seama de această observație, vom enunța acum următoarea generalizare a propoziției IXa:

IX b. *Dacă cele trei inversiuni I_{23}, I_{13} și I_{12}, care transformă cele trei sfere S_1, S_2 și S_3 una în alta două cîte două, sînt astfel alese încît polii lor să nu fie coliniari, atunci există o inversiune I, care se bucură de următoarea proprietate: inversiunea I transformă în sine însăși orice sferă transformată în sine însăși atît de inversiunea în raport cu sfera S_1, cît și de inversiunea I_{23}, precum și proprietăți analoge în raport cu sfera S_2 și cu inversiunea I_{13}, și în raport cu sfera S_3 și cu inversiunea I_{12}.*

Trecem la demonstrarea acestei propoziții. Fie O_1, O_2 și O_3 centrele sferelor date; r_1, r_2 și r_3 razele lor. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că polii S_{23}, S_{13} și S_{12} ai inversiunilor I_{23}, I_{13} și I_{12} coincid cu centrele de asemănare interioare ale sferelor date, luate două cîte două (în cazul cînd avem un centru de asemănare interior și două exterioare, va trebui să introducem doar o modificare neesențială în cele ce urmează). În virtutea egalității $S_{23}O_2 : S_{23}O_3 = -r_2 : r_3$ și în virtutea celor două analoge, avem

$$\frac{S_{23}O_2}{S_{23}O_3} \cdot \frac{S_{13}O_3}{S_{13}O_1} \cdot \frac{S_{12}O_1}{S_{12}O_2} = -1.$$

Prin urmare, dreptele O_1S_{23}, O_2S_{13} și O_3S_{12} sînt concurente într-un punct O (**198**). În virtutea propoziției X, putem alege astfel puterea inversiunii I_1 de pol O, încît inversiunea I_1 să transforme în sine însăși orice sferă care este transformată în sine însăși atît de inversiunea în raport cu sfera S, cît și de inversiunea I_{23}. În același mod, putem defini și alte două inversiuni analoge I_2 și I_3. Dat fiind că orice sferă ortogonală la cele trei sfere date se transformă în sine însăși atît prin inversiunile în raport cu fiecare dintre sferele S_1, S_2 și

S_3, cît și prin fiecare dintre inversiunile I_{23}, I_{13} și I_{12}, cele trei inversiuni I_1,I_2 și I_3 au toate (în virtutea părții finale a propoziției X) aceeași putere, și deci coincid. Propoziția IX b este demonstrată.

Exercițiul 482, 1°. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, un triedru dat, obținem imediat, din teorema enunțată la exercițiul 482, 1°, următoarea propoziție:

XI. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci alte trei sfere, trecînd fiecare prin cercul de intersecție a două dintre sferele date și fiind fiecare ortogonală la a treia dintre ele, trec prin același cerc.*

Această propoziție se extinde direct la cazul a trei sfere arbitrare, secante două cîte două (chiar și dacă nu au puncte comune).

XI a. *Dacă trei sfere sînt secante două cîte două, atunci trei sfere noi, trecînd fiecare prin cercul de intersecție a două dintre sferele date și fiind fiecare ortogonală la a treia dintre ele trec prin același cerc.*

Pentru demonstrație, vom nota cu S_1,S_2 și S_3 sferele date, cu H_1 sfera care trece prin intersecția sferelor S_2 și S_3 și este ortogonală la S_1, cu H_2 și cu H_3 alte două sfere analoge (existența și unicitatea fiecăreia dintre sferele H_1,H_2 și H_3 rezultă din soluția ex. 676). Evident, sferele H_2 și H_3 sînt secante.

Să efectuăm inversiunea I, de putere arbitrară și avînd polul în unul dintre punctele curbei de intersecție a sferelor H_2 și H_3. Sferele date se transformă în trei sfere noi S_1', S_2' și S_3', iar sferele H_2 și H_3 în planele H_2' și H_3'. În aceste condiții, planul H_2' trece prin intersecția sferelor S_3' și S_1' și este totodată ortogonal la S_2'; planul H_2' are proprietăți analoge. De aici rezultă că centrul sferei S_2' se află în planul radical H_2' al sferelor S_3' și S_1', iar centrul sferei S_3' în planul radical H_3' al sferelor S_1' și S_2'. Notînd (pentru simplitate, fără accente) cu O_1,O_2 și O_3 centrele sferelor S_1', S_2' și S_3', iar cu r_1, r_2 și r_3 razele lor, vom avea, evident,

$$O_1O_2^2 - r_1^2 = O_2O_3^2 - r_3^2;\ O_2O_3^2 - r_2^2 = O_3O_1^2 - r_1^2,$$

de unde, adunînd termen cu termen, găsim

$$O_1O_2^2 - r_2^2 = O_1O_3^2 - r_3^2.$$

Ultima egalitate ne arată că și centrul O_1 al sferei S_1' este situat în planul radical H_1' al celorlalte două sfere S_2' și S_3', adică acest plan radical este ortogonal la sfera S_1'. Inversiunea I transformă planele H_2' și H_3' în sferele H_2 și H_3, iar planul H_1' într-o sferă care trece prin intersecția sferelor S_2 și S_3 și este ortogonală la S_1, adică în sfera H_1. Deoarece cele trei plane H_1', H_2' și H_3' trec prin aceeași dreaptă-axă radicală a sferelor S_1', S_2' și S_3' — sferele H_1, H_2 și H_3, inversele acestor plane, vor trece prin același cerc.

La generalizarea propozițiilor XI și XI a, pentru sfere arbitrare (chiar și nesecante), va trebui să înlocuim, în mod firesc, sfera care trece prin intersecția a două sfere date cu o sferă avînd planul radical comun cu acestea. Aici apare însă o nouă dificultate: dacă sferele date S_2 și S_3 nu sînt secante, atunci sfera H_1, care are planul radical comun cu ele și este ortogonală la a treia sferă dată S_1, poate să existe sau să nu existe; același lucru este valabil,

Scanned with OKEN Scanner

bineînțeles, și în privința celorlalte două sfere analoge. În cazul particular cînd toate aceste sfere există, căpătăm următoarea propoziție:

XI b. *Dacă există trei sfere avînd fiecare planul radical comun cu două dintre sferele date și ortogonale la a treia dintre ele, atunci aceste trei sfere au planul radical comun.*

Pentru a extinde propoziția XIb la cazul în care nu există toate cele trei sfere menționate în ea, vom folosi următoarele observații.

Dacă sfera H_1, avînd planul radical comun cu sferele S_2 și S_3 și ortogonală la sfera S_1, există, atunci inversiunea I_1 în raport cu sfera H_1 transformă în sine însăși orice sferă ortogonală simultan la S_2 și la S_3, precum și sfera S_1. Reciproc, dacă inversiunea I_1, care se bucură de aceste proprietăți, există și are sferă de inversiune, atunci această sferă are proprietățile enumerate mai sus. De aceea, în cazul general, va trebui să considerăm, în locul sferei H_1, inversiunea I_1. Aceasta este valabil și pentru celelalte două sfere analoge cu H_1.

Dacă trei sfere oarecare au planul radical comun, atunci inversiunile în raport cu aceste sfere se bucură de următoarele proprietăți: polii celor trei inversiuni sînt coliniari, iar orice sferă care se transformă în sine însăși prin două oarecare dintre cele trei inversiuni se transformă în sine și prin a treia (prima dintre aceste proprietăți este consecința celei de-a doua).

Aceste considerații duc la următoarea generalizare a propoziției XI b:

XI c. *Dacă sînt date trei sfere, atunci există trei inversiuni transformînd fiecare în sine însăși orice sferă ortogonală la două dintre ele, precum și a treia sferă dată. Polii acestor trei inversiuni sînt coliniari; orice sferă transformată în sine de două dintre inversiuni este transformată în sine însăși și de a treia.*

Ne putem mărgini la demonstrarea propoziției XI c: dacă toate trei inversiunile au sfere de inversiune, propoziția XI c revine la XI b.

Fie O_1, O_2 și O_3 centrele celor trei sfere date; r_1, r_2 și r_3 razele lor. Să găsim inversiunea I_1, care transformă în sine însăși orice sferă ortogonală la sferele O_2 și O_3, precum și sfera O_1.

În virtutea celei dintîi dintre aceste proprietăți ale inversiunii I_1, polul ei P_1 trebuie să aibă aceeași putere în raport cu toate sferele ortogonale la O_2 și la O_3. Deoarece însă punctul O_2 are aceeași putere în raport cu toate aceste sfere, anume r_2^2, iar punctul O_3 se bucură de aceeași proprietate (puterea sa este egală cu r_3^2), toate sferele ortogonale la O_2 și la O_3 vor avea ca axă radicală comună dreapta O_2O_3. Prin urmare, polul P_1 al inversiunii căutate I_1 trebuie să se afle pe dreapta O_2O_3.

Din propoziția X, rezultă că orice punct P_1 de pe dreapta O_2O_3 este polul unei inversiuni care transformă în sine însăși orice sferă ortogonală la sferele O_2 și O_3; puterea k_1 a acestei inversiuni este dată de formula (3) (p. 361), care, în cazul de față, devine

$$k_1 = \frac{P_1O_3}{O_2O_3} \cdot r_2^2 + \frac{O_2P_1}{O_2O_3} \cdot r_3^2 - O_2P_1 \cdot P_1O_3. \qquad (4)$$

Dacă această inversiune transformă în sine însăși și sfera O_1, va trebui să avem, totodată,

$$k_1 = O_1P_1^2 - r_1^2. \qquad (5$$

Din ultimele două egalități, obținem

$$\frac{P_1O_3}{O_2O_3} \cdot r_2^2 + \frac{O_2P_1}{O_2O_3} \cdot r_3^2 - O_2P_1 \cdot P_1O_3 = O_1P_1^2 - r_1^2.$$

Înlocuind aici, conform teoremei modificate a lui Stewart (soluția ex. 218), pe $O_1P_1^2$ prin următoarea sa expresie:

$$O_1P_1^2 = \frac{P_1O_3}{O_2O_3} \cdot O_1O_2^2 + \frac{O_2P_1}{O_2O_3} \cdot O_1O_3^2 - O_2P_1 \cdot P_1O_3, \tag{6}$$

ajungem la egalitatea

$$\frac{P_1O_3}{O_2O_3}(O_1O_2 - r_2^2) + \frac{O_2P_1}{O_2O_3}(O_1O_3 - r_3^2) = r_1^2.$$

În sfîrșit, substituind lui O_2O_3 mărimea egală $O_2P_1 + P_1O_3$, căpătăm, după transformări evidente,

$$\frac{P_1O_2}{P_1O_3} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - O_1O_2^2}{r_1^2 + r_3^2 - O_1O_3^2}. \tag{7}$$

Se arată ușor că, și reciproc, inversiunea avînd polul în punctul P_1 de pe dreapta O_2O_3, definit de egalitatea (7), și puterea k_1, dată de egalitatea (4), satisface toate condițiile cerute.

Pentru aceasta, va fi suficient, evident, să ținem seama de propoziția X și să arătăm că, din egalitățile (4) și (7), rezultă egalitatea (5), cu ajutorul relației (6).

Așadar, poziția polului P_1 al inversiunii I_1 pe dreapta O_2O_3 este dată de formula (7), iar puterea ei rezultă din formula (4). Analog, demonstrăm și existența celorlalte două inversiuni și determinăm poziția polilor lor P_2 și P_3 și puterile lor.

Din expresia (7) pentru P_1O_2/P_1O_3 și din cele două expresii analoge pentru P_2O_3/P_2O_1 și pentru P_3O_1/P_3O_2, rezultă

$$\frac{P_1O_2}{P_1O_3} \cdot \frac{P_2O_3}{P_2O_1} \cdot \frac{P_3O_1}{P_3O_2} = 1.$$

De aici rezultă (**193**) că și polii P_1, P_2 și P_3 ai celor trei inversiuni sînt coliniari.

Mai rămîne să demonstrăm că orice sferă transformată în ea însăși de două dintre inversiunile găsite este transformată în ea însăși și de a treia. În virtutea concluziei propoziției X, este suficient, pentru aceasta, ca ultimul fapt să aibă loc pentru *una* oarecare dintre sferele transformate în ele însele prin două dintre cele trei inversiuni. În cazul de față însă, putem alege pentru această sferă oricare dintre sferele ortogonale la cele trei sfere date. Propoziția XI c este complet demonstrată.

Exercițiul 482, 2°. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, un triedru dat, obținem imediat, din teorema de la exercițiul 482, 2°, următoarea propoziție:

XII. *Dacă trei sfere au două puncte comune, atunci cele trei cercuri care trec fiecare prin aceste puncte comune, se află pe una dintre sferele date și formează unghiuri drepte cu intersecția celorlalte două, se află pe aceeași sferă.*

Scanned with OKEN Scanner

Exercițiul 482, 3°. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, un triedru dat, obținem pentru cercurile și pentru sferele considerate în propozițiile I, III, V, VI, VIII, IX, XI și XII, rezultate pe deplin analoge cu cele expuse în soluția exercițiului 482, 3°. În aceste condiții, rolul triedrului suplementar cu cel dat va reveni sferelor *reciproce* celor date, adică sferelor care trec fiecare prin punctele comune ale celor trei sfere date și formează unghiuri drepte cu linia de intersecție a două dintre ele.

Pe această cale, obținem următoarele propoziții:

XIII. *Cele patru cercuri despre care este vorba în propoziția I, construite pentru trei sfere date, coincid cu cele patru cercuri considerate în propoziția VI, construite pentru cele trei sfere reciproce celor date, și invers. Același lucru este valabil pentru sferele care formează obiectul propozițiilor III și V.*

În adevăr, cercurile despre care este vorba în propoziția I se obțin prin inversiune din dreptele D,D_1, ..., considerate în soluția exercițiului 479, iar cele despre care este vorba în propoziția VI se obțin din dreptele Δ,Δ_1, ..., considerate în soluția exercițiului 480, 2°. Sferele considerate în propozițiile III și V se obțin prin inversiune, respectiv din planele P,P_1, ... (ex. 479 *bis*) și Π,Π_1, ... (ex. 480, 1°). Însă dreptele D,D_1, ... și planele P,P_1, ... ale unuia dintre cele două triedre suplementare coincid (v. soluția ex. 482, 3°) respectiv cu dreptele Δ, Δ_1, ... și cu planele Π, Π_1, ... ale celuilalt.

XIV. *Fiecare dintre cele patru cercuri despre care este vorba în propoziția VIII, construite pentru trei sfere date, intersectează sub un unghi drept una dintre cele patru sfere despre care este vorba la propoziția IX, construite pentru cele trei sfere reciproce celor date, și invers.*

În adevăr, fiecare dintre cele patru cercuri despre care este vorba în propoziția VIII se obține prin inversiune din dreapta δ, considerată în soluția exercițiului 481, și din cele trei drepte analoge (compară soluția ex. 481 *bis*, Obs.), iar fiecare dintre cele patru sfere despre care este vorba în propoziția IX se obține din planul Π, considerat în soluția exercițiului 481 *bis*, și din cele trei plane analoge. Însă dreapta δ a unuia dintre cele două triedre suplementare este perpendiculară pe planul Π al celuilalt (compară cu soluția ex. 482, 3°) iar fiecare dreaptă analogă cu δ se bucură de aceeași proprietate în raport cu unul dintre cele trei plane analoge cu Π.

XV. *Cercul despre care este vorba în propoziția XI, construit pentru trei sfere date, coincide cu cercul analog construit pentru cele trei sfere reciproce. Aceasta este valabil și pentru sfera considerată în propoziția XII.*

În adevăr, cercul despre care este vorba în propoziția XI se obține prin inversiune din dreapta d (ex. 482, 1°), iar sfera despre care este vorba în propoziția XII se obține din planul p (ex. 482, 2°). Însă dreapta d și planul p ale unuia dintre cele două triedre suplementare coincid (compară soluția ex. 482, 3°) respectiv cu dreapta analogă și cu planul analog ale celuilalt.

Exercițiul 483. Transformînd, printr-o inversiune arbitrară, un triedru dat, obținem imediat următoarea propoziție:

XVI. *Fie S_1,S_2 și S_3 trei sfere avînd două puncte comune; H_1 o sferă care trece prin intersecția sferelor S_2 și S_3 și este ortogonală la sfera S_1; H_2 și H_3 două sfere analoge. În aceste condiții, sfera H_1 este sferă bisectoare a celor două sfere dintre care una trece prin intersecția sferelor S_1 și H_1 și prin intersecția sferelor*

S_2 și H_2, iar a doua prin intersecția sferelor S_1 și H_1 și prin intersecția sferelor S_3 și H_3; sferele H_2 și H_3 se bucură de proprietăți analoge.

961. Fie figura F situată pe sfera Σ, cu centrul în punctul O. Să notăm cu P' centrul și cu α' planul proiecției stereografice care transformă figura F în F'; P'' și α'' vor avea o semnificație analogă pentru figura F'' (din fig. 233, este reprezentată o secțiune a figurii considerate prin planul $OP'P''$). Proiecția stereografică din centrul P' poate fi considerată (**680**) ca inversiune în raport cu sfera S', de centru P', care trece prin intersecția sferei Σ cu planul α'. Tot astfel, proiecția stereografică de centru P'' poate fi considerată drept inversiune în raport cu sfera analogă S''.

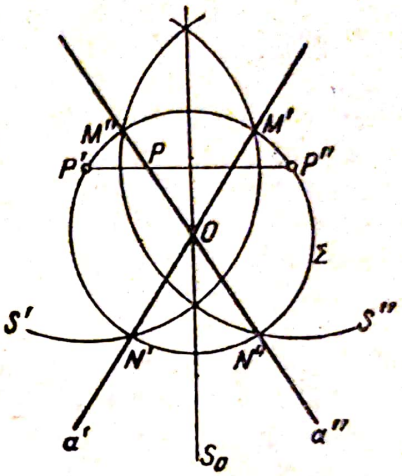


Fig. 233

Planul α' poate fi făcut să coincidă cu planul α'', rotindu-l în jurul intersecției celor două plane, în două moduri, anume astfel ca punctul M' să coincidă cu M'' și punctul N' cu N'' (notațiile punctelor reies din figură), sau astfel ca punctul M' să coincidă cu N'', iar punctul N' cu M''. Ambele rotații sînt echivalente, deoarece se consideră numai punctele planului α' cu simetrii în raport respectiv cu cele două plane bisectoare ale diedrelor formate de planele α' și α''. Vom alege simetria în raport cu planul S_0, față de care sînt simetrice punctele P' și P'' (altfel spus, alegem rotația care duce punctul M' în M'' și punctul N' în N''). Să notăm cu F''' figura în care F' este transformată prin această simetrie.

Se poate spune că figura F''' se obține din figura F'', situată cu ea în același plan α'', prin efectuarea consecutivă a următoarelor trei transformări:

1) inversiunea în raport cu sfera S'', care transformă pe F'' în F,

2) inversiunea în raport cu sfera S', care transformă pe F în F', și

3) simetria în raport cu planul S_0. Pe baza celor arătate în soluția exercițiului 937, două inversiuni consecutive în raport cu sferele S' și S'' pot fi înlocuite printr-o inversiune în raport cu o sferă S, avînd cu sferele S' și S'' planul radical S_0 comun, însoțită de o simetrie în raport cu acest din urmă plan. Așadar, figura F''' se obține din F'' printr-o inversiune în raport cu sfera S și printr-o dublă efectuare a simetriei în raport cu același plan S_0, adică *prin inversiune în raport cu sfera* S. Altfel spus, figura F''' va fi inversa figurii F''.

Dat fiind că sfera S are cu sferele S' și S'' planul radical comun, centrul ei P se va situa pe linia centrelor $P'P''$ a sferelor S' și S''. Totodată, inversiunea în raport cu sfera S transformă, cum rezultă din cele de mai sus, punctele planului α'' în puncte ale aceluiași plan. Aceasta este posibil numai cu condiția ca planul α'' să treacă prin centrul sferei S. Așadar, *polul inversiunii care transformă figura F'' în F''' este punctul de intersecție al dreptei $P'P''$ cu planul α''*.

962. Fie C și C' două cercuri mici de pe aceeași sferă; M și N două puncte ale cercului mic C; M' și N' puncte ale cercului C', antiomoloagele punctelor M și N, adică corespunzîndu-le una dintre cele două inversiuni care transformă cercurile C și C' unul în celălalt; P și Q punctele de intersecție ale cercurilor mari MN și $M'N'$.

Să luăm punctul Q ca centru al proiecției stereografice. În proiecție, vom căpăta două cercuri c și c', două puncte m și n pe cercul c și două puncte m' și n' pe cercul c'. Deoarece inversiunilor pe sferă le corespund, în proiecția stereografică, inversiuni în plan, punctele m' și n' vor fi, de asemenea, respectiv antiomoloagele punctelor m și n. Cercurile mari MN și $M'N'$ vor avea ca proiecție *dreptele* mn și $m'n'$, deoarece acestea trec prin centrul de proiecție Q. Punctul p — proiecția punctului P — se va situa pe axa radicală c_0 a cercurilor c și c', ca punct de intersecție al celor două coarde antiomoloage mn și $m'n'$ (**224**).

Axa radicală c_0 a cercurilor c și c' este proiecția stereografică a unui cerc C_0, situat pe sfera dată. Acest cerc C_0 trece prin cele două puncte diametral opuse P și Q și va fi, de aceea, un cerc mare. Totodată, orice cerc situat pe sfera considerată și ortogonal la cercurile C și C' intersectează sub un unghi drept și cercul C_0, dat fiind că orice cerc din planul ortogonal la cercurile c și c' intersectează sub un unghi drept și axa lor radicală c_0. Aceasta arată că C_0 este cercul mare radical al cercurilor mici C și C' considerate.

Așadar, cercurile mari MN și $M'N'$ se intersectează în punctele P și Q, situate pe cercul mare radical C_0 al cercurilor mici date.

963. *Generalizarea exercițiului* 260. Pentru a extinde la geometria sferică conținutul exercițiului 260 din Geometria plană, este necesar să găsim în geometria sferică un analog al noțiunii de centru de asemănare a două cercuri în plan.

În acest scop, vom folosi următoarea proprietate a inversiunii pe sferă (**689**, Obs.): toate cercurile mari care leagă două cîte două puncte inverse trec prin două puncte comune. Pentru a scurta exprimarea, vom denumi aceste puncte *polii sferici ai inversiunii* considerate. Polii de inversiune sferici sînt, după cum se vede ușor, punctele de intersecție ale sferei date cu dreapta care trece prin centrul ei și prin polul inversiunii date (în spațiu). De aici rezultă că, dacă inversiunea dată are cerc de inversiune, polii acestui cerc coincid cu polii sferici ai inversiunii.

Dacă sînt date două cercuri de pe aceeași sferă, atunci există două inversiuni care transformă aceste două cercuri unul în celălalt (**690**). Cele două perechi de poli sferici ai acestor două inversiuni vor juca, în geometria sferică, un rol analog cu al celor două centre de asemănare a două cercuri în plan (amintim că fiecare dintre centrele de asemănare a două cercuri în plan este polul unei inversiuni care le duce unul în celălalt).

Conținutul exercițiului 260 din Geometria plană se extinde acum fără dificultate la cazul a două cercuri de pe aceeași sferă:

I. Dacă vom duce pe sferă, prin două puncte date A și B, două cercuri tangente la un cerc dat C, și un al treilea cerc ortogonal la C, acest din urmă cerc va tăia în două părți egale unghiul dintre primele două cercuri și va avea ca poli polii sferici ai uneia dintre cele două inversiuni care transformă unul în celălalt primele două cercuri.

Demonstrația acestei propoziții în geometria plană (soluția ex. 260) își păstrează valabilitatea și în geometria sferică, dacă centrul cercului în plan este înlocuit prin polii cercului pe sferă, iar centrul de asemănare a două cercuri în plan este înlocuit prin polii sferici ai inversiunii care transformă unul în celălalt cele două cercuri de pe sferă.

Scanned with OKEN Scanner

Generalizarea exercițiului 261. Să începem prin a menționa că orice cerc tangent la două cercuri date de pe aceeași sferă se corespunde în una dintre cele două inversiuni care transformă cercurile date unul în celălalt (caz particular al primei propoziții de la nr. **691**). Corespunzător celor două inversiuni care transformă unul în celălalt cele două cercuri date, obținem *două familii* de cercuri pe sferă, tangente la cele două cercuri date.

Folosind noțiunea de regiune interioară a unui cerc mic (**370** *bis*), putem da noțiunile de *contact exterior* și de *contact interior* pentru cercurile mici pe sferă și demonstra că una dintre cele două familii este formată din cercurile care au contacte de aceeași speță cu cele două cercuri date, iar a doua, din cercuri care au cu ele contacte de spețe diferite. Nu vom insista asupra acestui fapt.

Conținutul exercițiului 261 se extinde după cum urmează la geometria sferică:

II. *Dacă vom duce pe sferă, printr-un punct A, două cercuri tangente fiecare la două cercuri date (și aparținînd la una dintre cele două familii despre care a fost vorba mai sus) și un al treilea cerc ortogonal la ele, acest din urmă cerc va trece prin al doilea punct comun B al primelor două cercuri și se va bucura de proprietățile menționate în propoziția I.*

Pentru demonstrație, efectuăm o proiecție stereografică, luînd ca centru un punct arbitrar de pe sferă. Obținem în plan trei cercuri care trec printr-un același punct a, proiecția punctului A. Fiecare dintre două din aceste trei cercuri va fi tangent la cele două cercuri care sînt inversele celor două cercuri date (și anume, ambele vor avea contacte de aceeași speță cu ultimele două cercuri sau ambele vor avea contacte de spețe diferite), iar al treilea cerc va fi ortogonal la ele. În virtutea propoziției corespunzătoare din Geometria plană (ex. 261), aceste trei cercuri din plan vor avea și un al doilea punct comun b, deci și cele trei cercuri care le corespund pe sferă vor avea al doilea punct comun B, a cărui proiecție este punctul b. Aceste trei cercuri de pe sferă vor satisface condițiile propoziției I, din care cauză al treilea cerc va avea, față de primele două, proprietățile enunțate în această propoziție.

Generalizarea exercițiului 262. Conținutul acestui exercițiu se extinde, după cum urmează, la geometria sferică:

III. *Fie descrise pe sferă, printr-un punct A, două cercuri tangente la două cercuri date, așa cum se arată în propoziția II. Dacă vom nota cu P și cu Q punctele lor de contact cu primul dintre cercurile date, iar cu P' și cu Q' punctele lor de contact cu al doilea, atunci au loc următoarele propoziții:*

1° *Cercurile APQ și AP'Q' sînt tangente; ele sînt secante la al treilea cerc despre care este vorba în propoziția II, și anume sub un unghi drept.*

2° *Cercurile APQ și BPQ, unde B este, ca și în propoziția II, al doilea punct comun al cercurilor APP' și AQQ', sînt inverse în raport cu primul cerc dat, iar cercurile AP'Q' și BP'Q' sînt inverse în raport cu al doilea.*

3° *Dacă cercurile date sînt cercuri mari, atunci cele patru cercuri APQ, AP'Q', BPQ și BP'Q' sînt egale.*

Afirmațiile 1° și 2° se pot demonstra în două moduri. Întîi, putem efectua proiecția stereografică avînd centrul într-un punct arbitrar de pe sferă; vom ajunge astfel la exercițiul 262 din Geometria plană. Al doilea, putem repeta pentru sferă aceleași raționamente la care am recurs pentru plan (soluția ex. 262).

Scanned with OKEN Scanner

Afirmația 3° rezultă din următoarele considerații. Dacă ambele cercuri date sînt cercuri mari, atunci inversiunile în raport cu cercurile date se transformă în simetrii în raport cu planele acestor cercuri mari. Prin urmare, cercurile APQ și BPQ sînt egale, deoarece sînt simetrice în raport cu planul primului cerc mare (cf. lui 2°), iar același lucru este valabil și pentru cercurile $AP'Q'$ și $BP'Q'$. În același timp, cercurile APQ și $BP'Q'$ sînt simetrice, cum se vede ușor, în raport cu unul dintre cercurile mari care trec prin punctele de intersecție ale celor două cercuri date și împart în părți egale unghiul dintre ele (reiese din faptul că cercurile APP' și AQQ' aparțin aceleiași familii de cercuri tangente la cele două cercuri mari date). Prin urmare, cele patru cercuri considerate sînt egale (compară cu soluția analogă la ex. 262, 3°).

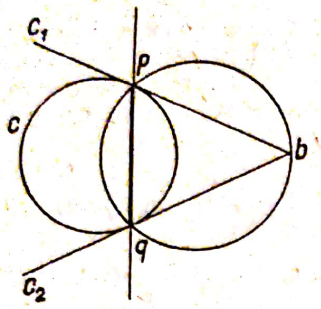


Fig. 234

După ce am extins astfel la geometria sferică exercițiile 260—262 din Geometria plană, trecem la considerarea celorlalte afirmații cuprinse în enunțul exercițiului de față.

Vom folosi pe sferă aceleași notații ca și la soluția exercițiului 262 în Geometria plană (cercurile și dreptele reprezentate în fig. 490, ni le putem imagina ca cercuri pe sferă).

Să efectuăm o proiecție stereografică, luînd ca centru punctul A. Primul cerc dat C, se transformă într-un cerc c (fig. 234), punctul B într-un punct b, cele două cercuri C_1 și C_2, care trec prin punctele A și B și sînt tangente la cercurile date C și C', se transformă în tangentele c_1 și c_2 la cercul c și care trec prin punctul b, punctele de contact P și Q se transformă în punctele de contact p și q ale acestor două tangente, cercul APQ devine dreapta pq. Segmentul pq, interior cercului c, este locul geometric al punctelor conjugate armonic cu punctul b în raport cu extremitățile segmentelor determinate de cercul c pe dreptele care trec prin punctul b. De aici rezultă că arcul PQ al cercului APQ, a cărui proiecție stereografică este segmentul pq, este locul geometric al punctelor conjugate armonic cu punctul B, în raport cu extremitățile arcelor determinate de cercul C pe cercurile care trec prin punctele A și B. Aceleași considerații sînt aplicabile și locului geometric al punctelor conjugate armonic cu punctul A.

Deoarece unghiul format de dreapta pq cu cercul bpq (fig. 234) este egal cu unghiul pbq, rezultă că unghiul format de cercurile APQ și BPQ, ale căror proiecții sînt dreapta pq și cercul bpq, este egal cu unghiul format de cercurile ABP și ABQ, ale căror proiecții sînt dreptele bp și bq.

Dacă punctele A și B coincid, atunci tangentele în punctele p și q la cercul c vor fi paralele și dreapta pq va intersecta cercul c sub un unghi drept. Prin urmare, și cercul APQ va fi ortogonal la cercul dat C.

964. Deoarece, prin proiecția stereografică, un cerc din plan se transformă într-un cerc situat pe sfera dată, iar o dreaptă într-un cerc situat pe sfera dată și care trece prin centrul proiecției stereografice (îl vom nota cu A), teorema de la nr. **211** din Geometria plană conduce imediat la următoarea propoziție (dreptele și cercurile reprezentate în fig. 194, ni le putem închipui respectiv

ca cercuri pe sferă care trec prin punctul comun A și ca un cerc de pe sferă care nu trece prin acest punct A):

Fie date pe sferă două puncte A și B și un cerc C. Dacă prin punctele A și B vom duce două cercuri care interesectează cercul dat C, primul în punctele M și N, iar al doilea în punctele M' și N', și vom construi apoi cercurile AMM', ANN', AMN' și $AM'N$, aceste patru cercuri se vor intersecta în două puncte noi H și K, al căror loc geometric (cercurile AMB și $AM'B$ fiind variabile) *este un cerc care trece prin punctul A.*

Acest din urmă cerc trece prin punctele de contact cu cercul C ale celor două cercuri tangente la el și care trec prin punctele A și B.

A doua parte a acestei propoziții rezultă imediat din faptul că, în plan, polara unui punct în raport cu un cerc trece prin punctele de contact cu cercul ale tangentelor duse din acest punct (**204**).

Trecem la rezolvarea problemei noastre de construcție:

Se dau pe sferă două puncte A și B și un cerc C. Să se construiască un cerc care să treacă prin punctele A și B și să fie tangent la cercul C.

Din cele arătate mai sus, rezultă următoarea metodă de rezolvare. Prin punctele A și B, ducem două cercuri arbitrare, care intersectează cercul dat C, unul în punctele M și N, iar celălalt în punctele M' și N'. Construim, mai departe, cercurile AMM', ANN', AMN', $AM'N$ și notăm cu H punctul de intersecție, distinct de A, al cercurilor AMM' și ANN', iar cu K punctul de intersecție, distinct de A, al cercurilor AMN și $AM'N$. Punctele de intersecție ale cercului AHK cu cercul dat C vor fi punctele de contact căutate. Mai rămîne doar să descriem un cerc prin punctele A și B și prin fiecare dintre punctele de contact construite.

Numărul maxim de soluții este doi.

965. Fie în plan două drepte c și c', care se intersectează într-un punct o, și două drepte paralele c_1 și c_2, care intersectează dreapta c în punctele a și b, iar dreapta c' în punctele a' și b' (fig. 235). În acest caz, avem $oa : ob = oa' : ob'$. Raportul oa/ob poate fi considerat însă (**199**) ca raport anarmonic al punctelor a, b, o și ∞, unde am notat cu ∞ punctul de la infinit al dreptei ab; același lucru este valabil și pentru raportul oa'/ob'.

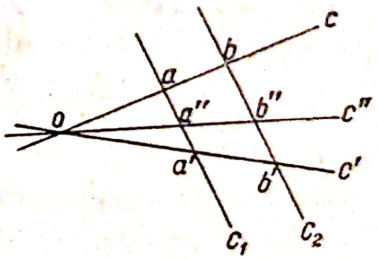


Fig. 235

Dacă vom efectua o proiecție stereografică, dreptele paralele c_1 și c_2 se transformă în cercurile tangente C_1 și C_2, cum se vede ușor, în centrul P a proiecției stereografice; dreptele c și c' se transformă în două cercuri C și C', care trec prin punctul O, avînd ca proiecție punctul o, și prin centrul de proiecție P. Raportul anarmonic a patru puncte nu se schimbă prin proiecție stereografică (**688**). Așadar, obținem următoarea propoziție:

Fie date pe sferă două cercuri C_1 și C_2, tangente într-un punct P, și două cercuri C și C', care trec prin punctul P și care au ca al doilea punct de intersecție pe O. Dacă cercurile C_1 și C_2 taie cercul C respectiv în punctele A și B, iar cercul C' în punctele A' și B', are loc egalitatea rapoartelor anarmonice $(ABOP) = (A'B'OP)$.

Dacă acum prin punctul o va trece, în afară de dreptele c și c', o a treia dreaptă c'', care taie dreapta c_1 în punctul a'' și dreapta c_2 în punctul b'', vom avea $a''a : a''a' = b''b : b''b'$. Raționînd ca mai sus, ajungem la următoarea propoziție:

Fie date pe sferă două cercuri C_1 și C_2, tangente într-un punct P și alte trei cercuri C, C' și C'', care trec prin punctul P și care se intersectează într-un al doilea punct O. Dacă cercurile C_1 și C_2 taie cercul C respectiv în punctele A și B, cercul C' în punctele A' și B' și cercul C'' în punctele A'' și B'', va avea loc egalitatea rapoartelor anarmonice $(AA'A''P) = (BB'B''P)$.

965 *bis*. Fie date pe sferă două puncte A și B și un cerc C_0; se cere să ducem prin punctele A și B un al doilea cerc C, care să intersecteze pe C_0 în punctele M și N, astfel ca raportul anarmonic $(MNAB)$ să aibă o valoare λ dată.

Să luăm punctul B ca centru al proiecției stereografice și să notăm, cu a, m, n, c_0 și c proiecțiile punctelor A, M, N și ale cercurilor C_0 și C. Proiecția c a cercului căutat C va fi o dreaptă care trece prin punctul a, deoarece cercul căutat C trece prin punctul A și prin centrul de proiecție B. Raportul anarmonic $(MNAB)$ va fi egal cu raportul anarmonic al celor patru puncte de pe dreapta c, anume al punctelor m, n, a și al punctului de la infinit (**199**), adică va fi egal cu am/an. Așadar, sîntem conduși la următoarea problemă:

Se dau în plan un punct a și un cerc c_0. Să se ducă prin punctul a o dreaptă c, care să intersecteze cercul c_0 în punctele m și n, astfel ca să aibă loc egalitatea $am:an = \lambda$, unde λ este un număr dat.

Rezolvarea acestei probleme nu prezintă dificultăți (compară cu soluția ex. 165). Numărul maxim de soluții este doi.

Trecem la căutarea cercului C, pentru care raportul anarmonic $(MNAB)$ are valoarea maximă sau minimă. Pentru dreapta omoloagă c — proiecția stereografică a cercului C — raportul am/an trebuie să fie maxim sau minim. Dacă vom nota, pentru a fixa ideile, cu m acela dintre punctele de intersecție ale dreptei c cu cercul c_0 care este mai îndepărtat de punctul a. raportul am/an va fi maxim (iar raportul an/am va fi minim), cînd dreapta c va trece prin centrul cercului c_0. Deoarece unghiul a două cercuri nu se schimbă prin proiecție stereografică, obținem următorul rezultat: *raportul anarmonic $(MNAB)$ a patru puncte M, N, A și B ale cercului C de pe sferă este* (punctele A și B și cercul C_0 fiind date) *maxim sau minim, dacă cercul C este ortogonal la cercul dat C_0.*

Pentru a duce prin punctele A și B un cerc C ortogonal la cercul dat C_0, este suficient să ducem un plan prin punctele A, B și prin polul planului cercului C în raport cu sfera dată. Intersecția acestui plan cu sfera dată va fi tocmai cercul căutat (**452** *bis*).

Am considerat cazul în care punctele date A și B și cercul C erau situate pe aceeași sferă. Dacă punctele date și cercul dat se află în același plan, problema se rezolvă la fel; numai că proiecția stereografică este înlocuită printr-o inversiune (în plan) de pol B și de putere arbitrară.

966. Să alegem unul dintre punctele date, anume pe A, ca centru al proiecției stereografice și să notăm cu b, p, q și c proiecțiile stereografice ale punctelor B, P, Q și a cercului C. Deoarece punctele de pe sferă și proiecțiile lor stereografice se corespund într-o inversiune a cărei putere o vom nota cu k, vom avea

$AP = \frac{k}{Ap}$; $AQ = \frac{k}{Aq}$. Mai departe (cf. nr. **670**), avem $BP = \frac{k \cdot pb}{Ab \cdot Ap}$; $BQ = \frac{k \cdot qb}{Ab \cdot Aq}$. De aici deducem

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \frac{Ab^2}{bp \cdot bq}.$$

Proiecția stereografică a cercului care trece prin punctele A și B și taie cercul C în punctele P și Q va fi dreapta care trece prin punctul b și taie cercul c în punctele p și q. Produsul $bp \cdot bq$, egal cu puterea punctului b în raport cu cercul c, nu depinde de alegerea secantei duse din punctul b; evident, nici segmentul Ab nu depinde de această alegere. În virtutea ultimei egalități, nici mărimea $(AP \cdot AQ) : (BP \cdot BQ)$ nu depinde de alegerea cercului, de pe sferă, care trece prin punctele A și B și intersectează cercul C.

Fie date acum punctul A și cercul C pe sferă, deci și cercul c în plan și se cere să aflăm locul geometric al punctelor B de pe sferă pentru care avem $(AP \cdot AQ) : (BP \cdot BQ) = \lambda$, unde λ este un număr dat. În virtutea egalității deduse mai sus, problema se reduce la găsirea în plan a proiecțiilor locului geometric al punctelor b care satisfac condiția $Ab^2 : (bp \cdot bq)) = \lambda$.

Mărimea Ab^2 poate fi considerată ca puterea punctului b în raport cu sfera A de rază nulă, iar produsul $bp \cdot bq$ ca putere a punctului b în raport cu o sferă S, care trece printr-un cerc c (care cerc anume este indiferent pentru cele ce urmează). Locul geometric al punctelor b *din spațiu* care au raportul dintre puterile lor față de sferele A și S egal cu λ este o sferă, dacă acest loc geometric există și nu degenerează într-un punct (v. soluția ex. 669). Prin urmare, locul geometric al punctelor p *din planul proiecțiilor*, care satisfac condiția de mai sus, este un cerc, dacă acest loc există și nu se reduce la un punct. Prin urmare, locul geometric al punctelor B *de pe o sferă dată* care satisfac condiția $(AP \cdot AQ) : (BP \cdot BQ) = \lambda$ este de asemenea un cerc având ca proiecție stereografică cercul considerat mai sus.

966 *bis*. În primul rînd, vom arăta că mărimea $pq/\sin\theta$ are aceeași valoare pentru toate coardele pq ale cercului dat în plan, deoarece, cum se vede ușor, această mărime este egală cu diametrul cercului dat.

Să efectuăm acum o inversiune (în spațiu) având polul într-un punct A, exterior planului cercului dat (și de putere arbitrară). Planul cercului dat se transformă într-o sferă, cercul dat într-un cerc C, situat pe această sferă, dreapta pq într-un cerc arbitrar care trece prin punctul A și intersectează cercul C în două puncte P și Q. Unghiul θ va fi egal cu unghiul dintre cele două cercuri. În aceste condiții, vom avea egalitatea (**672**) $\frac{pq}{\sin\theta} = \frac{k \cdot QP}{AP \cdot AQ \cdot \sin\theta}$, unde k este puterea de inversiune. Deoarece, prin acest procedeu, putem obține, evident, pe o sferă arbitrară orice punct A și orice cerc, sîntem conduși la următoarea propoziție:

Dacă se dau pe sferă un cerc C și un punct A, atunci pentru toate cercurile care trec prin punctul A și intersectează cercul C în două puncte P și Q sub un unghi θ, mărimea $PQ : (AP \cdot AQ \sin\theta)$ are aceeași valoare.

(Dacă vom considera numai cercurile care mai trec și printr-un punct dat B, nu numai prin punctul A, atunci vor avea valori constante pentru toate

aceste cercuri rapoartele $\alpha = \frac{PQ}{AP \cdot AQ \cdot \sin\theta}$ și $\beta = \frac{PQ}{BP \cdot BQ \cdot \sin\theta}$, deci și mărimea $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ}$; așadar, obținem propoziția considerată la ex. 966.)

967. Efectuăm o proiecție stereografică având centrul în unul dintre punctele cercului C. Cercurile A și B se transformă în cercurile a și b din plan, iar cercul C într-o dreaptă c, pe care cercurile a și b o intersectează în patru puncte conjugate armonic. Cercul d din plan, având ca puncte diametral opuse punctele de intersecție ale cercului a cu dreapta c, va fi ortogonal la dreapta c și la cercul b (v. nr. **189**, Cor.). Prin urmare, cercul D de pe sferă, având ca proiecție stereografică cercul d, se va bucura de toate proprietățile indicate în enunțul problemei.

968. Efectuăm o proiecție stereografică având centrul într-un punct comun al cercurilor Abc, Bca și Cab și notăm cu A', B', C', a', b' și c' proiecțiile punctelor A, B, C, a, b și c. Cercurile Abc, Bca și Cab trec prin centrul de proiecție și au, de aceea, ca proiecție dreptele (nu cercurile) $A'b'c'$, $B'c'a'$ și $C'a'b'$, care formează triunghiul $a'b'c'$. Pe laturile acestui triunghi (sau pe prelungirile lor), se află respectiv punctele A', B' și C'. În virtutea problemei 344, 1° din Geometria plană, cercurile $a'B'C'$, $b'C'A'$ și $c'A'B'$ din plan trec prin același punct. Prin urmare, se vor bucura de aceeași proprietate și cercurile aBC, bCA și cAB de pe sferă.

969. În soluția exercițiului 942, am demonstrat, între altele, că raportul anarmonic al punctelor de intersecție a două cercuri de pe aceeași sferă cu oricare dintre cercurile ortogonale la ele are aceeași valoare, independent de alegerea ultimului cerc. Dat fiind că orice pereche de cercuri secante se află pe aceeași sferă, această propoziție este aplicabilă și în cazul de față.

În cazul a două cercuri din plan, acest raport anarmonic este egal cu $\lambda = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. În adevăr, în notațiile adoptate la soluția problemei 396 din Geometria plană, avem $\lambda = -\left(\frac{KM}{LM}\right)^2 = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ (v. fig. 649 din Geometria plană). Ne putem convinge că această relație subsistă și pentru două cercuri situate pe aceeași sferă, efectuînd o inversiune cu polul într-un punct oarecare al sferei și de putere arbitrară (compară cu nr. **688**). Așadar, *raportul anarmonic considerat este pe deplin determinat de unghiul dintre cercurile date.*

Fie date acum două sfere secante. Atunci are loc următoarea propoziție:

Raportul anarmonic al punctelor de intersecție a două sfere cu orice cerc ortogonal la ele nu depinde nici de poziția acestuia din urmă, nici de poziția sferelor date, cu condiția ca unghiul dintre ele să rămînă constant.

Pentru demonstrație, observăm că orice cerc care intersectează sub un unghi drept o sferă dată se află într-un plan care trece prin centrul sferei. De aceea, un cerc care taie fiecare dintre cele două sfere date sub un unghi drept se situează într-un plan care trece prin linia centrelor lor. Considerînd secțiunea sferelor date prin acest plan, vom ajunge la rezultatul cerut, deoarece unghiul dintre cercurile după care acest plan intersectează sferele date este, evident, egal cu unghiul format de cele două sfere.

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, fie date o sferă și un cerc secant cu ea. Are loc următoarea propoziție:

Raportul anarmonic al punctelor de intersecție ale unei sfere și ale unui cerc secant cu ea, cu oricare dintre cercurile ortogonale la sfera dată și care intersectează în două puncte cercul dat sub un unghi drept nu depinde nici de poziția cercului secant, nici de poziția sferei date și a cercului dat cu condiția ca unghiul dintre ele să rămînă constant.

Pentru demonstrație, vom folosi cele arătate în soluția exercițiului 942, păstrînd notațiile adoptate acolo. Raportul anarmonic despre care este vorba este raportul anarmonic al punctelor de intersecție ale cercurilor C_0 și C cu oricare dintre cercurile Γ, unghiul dintre cercurile C_0 și C fiind evident egal cu unghiul dintre sfera dată și cercul dat. Așadar, reajungem la cazul considerat la începutul soluției exercițiului de față.

970. Să luăm planul figurii despre care este vorba la exercițiul 65 din Geometria plană (v. fig. 316 din Geometria plană) ca plan al proiecției stereografice, alegînd în mod arbitrar o sferă cu centrul în acest plan. Vom păstra notațiile adoptate în soluția acestui exercițiu.

Cele două cercuri date, considerate la exercițiul 65, se transformă în două cercuri de pe sferă, secante în două puncte $\overline{A}$ și $\overline{B}$, cele două secante arbitrare din plan, care trec respectiv prin ambele puncte de intersecție ale cercurilor date, se transformă în două cercuri Γ și Γ' de pe sferă, dintre care unul trece prin punctul $\overline{A}$, iar celălalt prin punctul $\overline{B}$ și care trec ambele prin centrul $\overline{P}$ al proiecției stereografice; dreapta MM' din plan se transformă într-un cerc care trece prin celelalte puncte de intersecție $\overline{M}$ și $\overline{M}'$ respectiv ale cercurilor Γ și Γ' cu primul dintre cercurile date și prin punctul $\overline{P}$; dreapta NN' din plan se transformă într-un cerc analog, care trece prin celelalte puncte de intersecție $\overline{N}$ și $\overline{N}'$ respectiv ale cercurilor Γ și Γ' cu cel de-al doilea cerc dat și prin punctul $\overline{P}$. Deoarece dreptele MM' și NN' din plan sînt paralele, cercurile $\overline{PMM'}$ și $\overline{PNN'}$ de pe sferă sînt tangente în punctul $\overline{P}$. Așadar, capătăm următoarea propoziție (omitem barele de deasupra literelor):

Dacă, printr-un punct P de pe o sferă și prin unul dintre punctele de intersecție A a două cercuri date de pe aceeași sferă, vom descrie un cerc pe această sferă și vom nota cu M și cu N celelalte puncte de intersecție ale acestuia respectiv cu cele două cercuri date, iar prin același punct P și prin celălalt punct de intersecție B al cercurilor date vom duce un al doilea cerc și vom nota cu M' și cu N' punctele sale de intersecție secunde respectiv cu cele două cercuri date, atunci cercurile PMM' și PNN' vor fi tangente în punctul P.

970 *bis.* Să efectuăm o proiecție stereografică cu centrul în punctul A' și să notăm proiecțiile celorlalte puncte considerate de pe sferă cu aceleași litere ca și punctele, însă minuscule (fig. 236 și 237).

Cercurilor $bcc'b'$ și $b'c'q_1r_1$ din plan, secante în punctele b' și c', le putem aplica la fel ca în exercițiul precedent, teorema considerată la exercițiul 65 din Geometria plană. Anume, prin punctul comun b' al acestor cercuri, este dusă secanta $b'p'q_1$, care le taie a doua oară respectiv în punctele p' și q_1, iar prin celălalt punct comun c' al acelorași cercuri, este dusă secanta $c'p''r_1$, care le taie a doua oară respectiv în punctele p'' și r_1. În virtutea teoremei

menționate, dreptele $p'p''$ și q_1r_1 sînt paralele. Prin urmare, pe sferă *cercurile* $A'P'P''$ și $A'Q_1R_1$, care au ca proiecții aceste drepte, *sînt tangente în punctul* A'.

În plan, direcția dreptelor paralele $p'p''$ și q_1r_1 nu depinde de alegerea cercului $b'c'q_1r_1$, care trece prin punctele b' și c', deoarece direcția acestor drepte este antiparalelă (**217**) cu direcția dreptei $b'c'$ în raport cu laturile unghiului $b'ac'$. Prin urmare, pe sferă, *tangenta comună la cercurile* $A'P'P''$ *și* $A'Q_1R_1$ *în punctul* A' *nu depinde de alegerea cercului* Γ, *dus prin punctele* B' *și* C'.

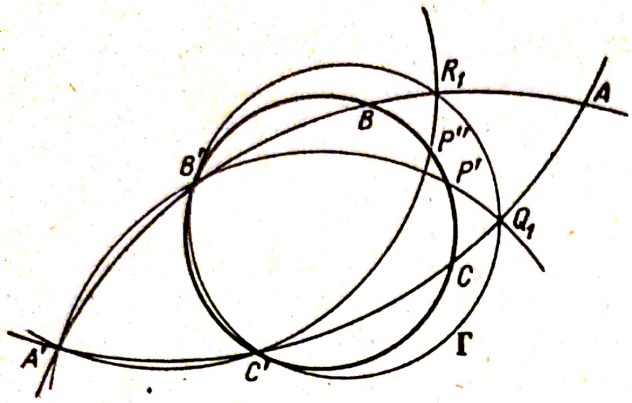
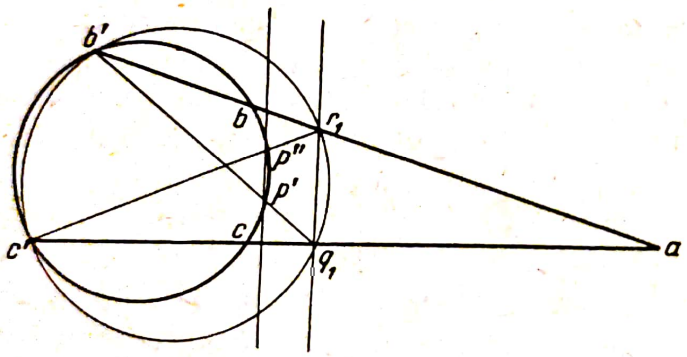


Fig. 236



Fig, 237

Fie acum, în particular, cercul Γ_0 de pe sferă, care este dus prin punctele B' și C' și intersectează cercurile $ACA'C'$ și $ABA'B'$ respectiv în punctele Q și R, astfel ales încît cercurile $A'B'Q$ și $A'C'R$ să intersecteze cercul $BCB'C'$ într-un același punct P (altfel spus, ca punctele P' și P'', despre care a fost vorba mai sus, să coincidă). În acest caz, în plan, dreapta qr și tangenta în punctul p la cercul $bcb'c'$ vor fi paralele (pentru a ne convinge de aceasta, este suficient să considerăm cazul limită al teoremei studiate la ex. 65 din Geometria plană, cînd punctele de intersecție ale celor două secante cu unul dintre cercurile date coincid). Aceste două drepte vor fi paralele cu dreapta q_1r_1, considerată mai sus, deoarece direcția fiecăreia dintre cele trei drepte este iarăși antiparalelă cu direcția dreptei $b'c'$ în raport cu laturile unghiului $b'ac'$. Prin urmare, pe sferă, *cercul* $A'QR$ *și cercul care trece prin punctul* A' *și este tangent în punctul* P *la cercul* $BCB'C'$ *sînt ambele tangente în punctul* A' *la cercurile* $A'P'P''$ *și* $A'Q_1R_1$.

De aici rezultă următoarea metodă pentru construirea punctelor P, Q și R, despre care este vorba în enunțul problemei. Să ducem pe sferă, prin punctele B' și C', un cerc Γ și să notăm cu Q_1 și cu R_1 punctele sale de intersecție respective cu cercurile $ACA'C'$ și $ABA'B'$. Mai departe, construim cercul $A'Q_1R_1$. În sfîrșit, construim (ex. 489, construcția r) un cerc tangent la cercul $A'Q_1R_1$ în punctul A' și, totodată, tangent într-un punct oarecare la cercul $BCB'C'$; acest din urmă punct de contact va fi tocmai punctul P căutat. Punctul de intersecție al cercurilor $ACA'C'$ și $A'B'P$ va fi punctul căutat Q, iar punctul de intersecție al cercurilor $ABA'B'$ și $A'C'P$ va fi punctul căutat R.

Deoarece problema construirii unui cerc tangent într-un punct A' la cercul $A'Q_1R_1$ și, totodată, tangent la un cerc $BCB'C'$ are, în general, două soluții (compară cu soluția ex. 489, Construcția r), problema construirii punctelor P, Q și R va avea și ea, în general, două soluții. În cele ce urmează, vom înțelege prin P, Q și R una oarecare dintre aceste soluții.

Mai rămîne să demonstrăm că punctele Q și R, astfel construite, se află pe același cerc cu punctele B' și C'. Aceasta se poate face în modul următor. Să notăm cu R_0 un punct de intersecție al cercului $B'C'Q$ cu cercul $A'C'P$. În plan, vom avea iarăși două cercuri $b'c'qr_0$ și $bcb'c'$, secante în punctele b' și c'. Prin punctul comun b' al acestor cercuri, este dusă secanta $b'qp$, care le taie a doua oară respectiv în punctele q și p, iar din al doilea punct comun c' al acelorași cercuri, este dusă secanta $c'r_0p$, care le taie a doua oară respectiv în punctele r_0 și p. Dreapta qr_0 și tangenta în punctul p la cercul $bcb'c'$ trebuie să fie, ca și înainte, paralele. În consecință, pe sferă, cercul $A'QR_0$ și cercul care trece prin punctul A' și este tangent în punctul P la cercul $BCB'C'$ sînt tangente în punctul A'. De aici rezultă că cercul $A'QR_0$ coincide cu $A'QR$, deoarece trec ambele prin punctul Q și sînt ambele tangente în punctul A' la cercul care trece prin acest din urmă punct și este tangent, în punctul P, la cercul $BCB'C'$. În virtutea coincidenței cercurilor $A'QR_0$ și $A'QR$, punctul R_0 va coincide cu R, deoarece aceste două puncte sînt situate pe cercul $A'C'P$. Punctele B,C,Q și R se află efectiv pe același cerc.

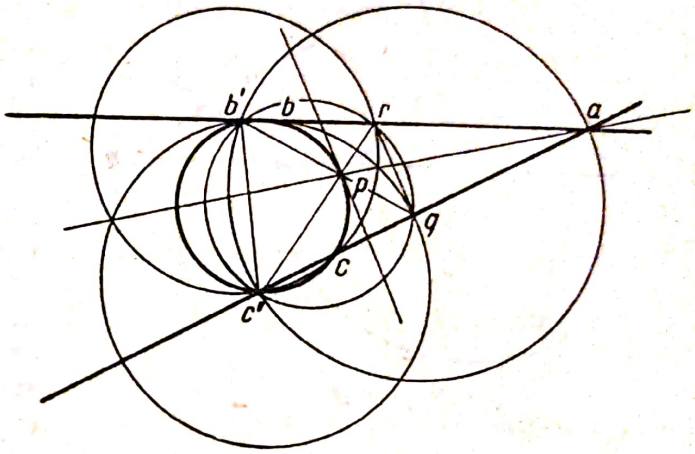


Fig. 238

Proiecția stereografică a celor trei cercuri date și a celor trei cercuri $B'C'Q'R$, $A'C'PR$ și $A'B'PQ$ este reprezentată în fig. 238.

În plan, inversiunea de pol p și avînd puterea egală cu puterea acestui punct în raport cu cercul $b'c'qr$ transformă acest din urmă cerc în el însuși, punctele b' și c' respectiv în punctele q și r, iar cercul $bcb'c'$, care trece prin polul de inversiune, în dreapta qr. Prin urmare, unghiul format de cercurile $b'c'qr$ și $bcb'c'$ este egal cu unghiul dintre cercul $b'c'qr$ și dreapta qr. Mai departe, inversiunea de pol a și de putere egală cu puterea acestui punct în raport cu cercul $b'c'qr$ transformă acest din urmă cerc în sine însuși, punctele b' și c' respectiv în punctele r și q, iar cercul $ab'c'$, care trece prin polul de inversiune, în dreapta qr. Așadar, unghiul dintre cercurile $b'c'qr$ și $ab'c'$ este de asemenea egal cu unghiul format de cercul $b'c'qr$ cu dreapta qr. De aici rezultă că unghiul dintre cercul $b'c'qr$ și cercul $bcb'c'$ este egal cu unghiul format de cercurile $b'c'qr$ și $ab'c'$. Dat fiind că unghiurile dintre cercuri nu se schimbă printr-o proiecție stereografică, rezultă că și pe sferă cercul $B'C'QR$ *formează unghiuri egale cu cercurile* $BCB'C'$ *și* $AB'C'$.

Mai departe, punctul p are, în raport cu fiecare dintre cercurile $bb'q$ și $cc'r$ (fig. 238 și 239), aceeași putere, egală cu puterea aceluiași punct p în raport cu cercul $b'c'qr$. Analog, punctul a are, în raport cu aceleași cercuri $bb'q$ și $cc'r$, aceeași putere, egală cu puterea punctului a în raport cu cercul $bcb'c'$. Prin urmare, dreapta ap este axa radicală a cercurilor $bb'q$ și $cc'r$. De aici rezultă că (**686**), pe sferă, *cele trei cercuri $AA'P$, $BB'Q$ și $CC'R$ aparțin aceluiași fascicul.*

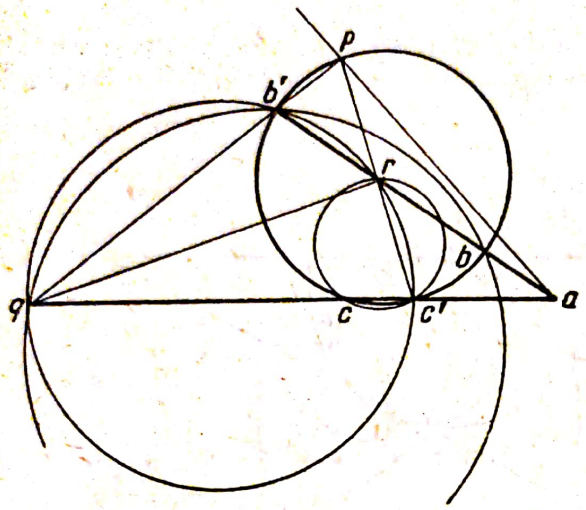


Fig. 239

Observație. Cele trei cercuri $AA'P$, $BB'Q$ și $CC'R$, care aparțin aceluiași fascicul, pot fie să treacă prin două puncte comune (fig. 238), fie să aibă un singur punct comun, fie să nu aibă de loc puncte comune (fig. 238).

971. *Generalizarea exercițiului* 256. Prin unghiul format de două cercuri mici pe sferă, putem înțelege pe oricare dintre cele două unghiuri suplementare, formate de tangentele lor în punctul comun, cu alte cuvinte, oricare dintre cele două unghiuri suplementare dintre razele sferice atît mai mici, cît și mai mari decît un sfert de cerc mare, ale celor două cercuri, duse în punctul lor comun. În cazurile cînd va trebui să facem distincție între aceste două unghiuri, vom spune că „unghiul dintre cele două cercuri mici este *strict* egal cu α", înțelegînd prin aceasta că α este exact unghiul dintre razele sferice mai mici decît un sfert de cerc mare duse spre unul dintre punctele de intersecție (și nu suplementul acestuia; compară cu soluția ex. 256 și cu soluția ex. 933).

Două cercuri mici tangente formează un unghi strict egal cu 2 dr, în cazul contactului exterior, și un unghi strict egal cu zero, în cazul contactului interior (în legătură cu contactul exterior și interior al cercurilor mici, v. indicația de la soluția ex. 963).

Dacă este vorba despre intersecția unui cerc mare cu un cerc mic, putem denumi arbitrar „interioară" în raport cu cercul mare una dintre cele două emisfere în care cercul mare împarte sfera, considerînd unghiul dintre raza sferică a cercului mic, mai mică decît un sfert de cerc mare, care trece prin unul dintre punctele de intersecție, și raza sferică a cercului mare, dusă în regiunea „interioară".

În cazul a două cercuri mari, putem denumi arbitrar „interioară" în raport cu fiecare cerc mare una dintre cele două emisfere în care acest cerc mare taie sfera, considerînd apoi unghiul dintre razele sferice ale celor două cercuri mari, duse în regiunile „interioare".

Propoziția considerată la nr. **691**: „Orice cerc secant sub unghiuri egale la două cercuri date, situate pe aceeași sferă, se corespunde în una dintre

cele două inversiuni care transformă cercurile date unul în celălalt, și reciproc", poate fi acum enunțată în următoarea formă mai precisă:

I. *Orice cerc care intersectează două cercuri date de pe aceeași sferă sub unghiuri strict egale (strict suplementare) se corespunde în una și aceeași dintre cele două inversiuni care transformă cercurile date unul în celălalt (respectiv în cealaltă dintre aceste două inversiuni).*

Să demonstrăm această propoziție pentru cazul unghiurilor strict egale (demonstrația este în totul analogă pentru unghiuri strict suplementare); ne vom mărgini la cazul cercurilor mici, fără a insista asupra modificărilor (aproape evidente) care se impun, dacă unele dintre cercurile considerate pe sferă sînt cercuri mari.

Să presupunem că cercul Γ intersectează cele două cercuri date C și C' de pe aceeași sferă sub unghiuri *strict* egale. Ducem prin cercurile C, C' și Γ respectiv sferele S, S' și Σ, ortogonale la sfera dată. În aceste condiții, unghiul dintre cercurile C și Γ va fi egal cu unghiul dintre sferele S și Σ. Mai exact, unghiul dintre cercurile C și Γ va fi *strict* egal cu unghiul dintre sferele S și Σ. Aceasta reiese din faptul că regiunea de pe sfera dată, interioară în raport cu cercul C (sau Γ), va fi interioară sferei S (sau, respectiv, sferei Σ). Tot astfel, unghiul dintre cercurile C' și Γ va fi strict egal cu unghiul dintre sferele S' și Σ.

De aici rezultă că, dacă cercul Γ intersectează cercurile C și C' sub unghiuri *strict* egale, atunci și sfera Σ va intersecta sferele S și S' sub unghiuri de asemenea strict egale. Prin urmare, sfera dată și sfera Σ se transformă fiecare în sine însăși prin inversiunea care transformă sferele S și S' una în cealaltă și al cărei pol este centrul de asemănare *exterior* al acestor două sfere. Aceeași inversiune duce cercurile C și C' unul în celălalt, iar cercul Γ în el însuși. Propoziția I este demonstrată.

Conținutul exercițiului 256 din Geometria plană se extinde după cum urmează la cazul sferei:

II. *Toate cercurile de pe sferă care intersectează două cercuri date A și B sub unghiuri date formează două familii, astfel încît un cerc C aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B intersectează toate cercurile din aceeași familie sub un același unghi.*

Demonstrația acestei propoziții este în totul analogă cu demonstrația propoziției corespunzătoare în plan. Mulțimea cercurilor care intersectează cercurile A și B sub unghiuri respectiv egale cu α și cu β poate fi împărțită în patru clase. Anume, vom încadra într-o clasă toate cercurile care intersectează cercurile A și B sub unghiuri strict egale cu

$$(1)\alpha \text{ și } \beta; \qquad (2)\ 2\text{dr} - \alpha \text{ și } 2\text{dr} - \beta; \tag{I}$$

$$(3)\alpha \text{ și } 2\text{dr} - \beta; \quad (4)\ 2\text{dr} - \alpha \text{ și } \beta. \tag{II}$$

Cercurile din primele două clase le vom denumi cercuri din prima familie, iar pe cele din ultimele două clase, cercuri ale celei de-a doua familii, și vom arăta că fiecare dintre aceste două familii de cercuri se bucură de proprietățile cerute. Este suficient să demonstrăm aceasta pentru cercurile din prima familie, deoarece a doua familie de cercuri se obține din prima, înlocuind unul dintre unghiurile α și β prin suplementul său.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două familii de cercuri există, oricare ar fi cercurile A și B și unghiurile α și β. Ne putem convinge de aceasta, efectuînd pe sferă construcția considerată la problema 402 *bis* din Geometria plană, la rubrica A.

Se poate întîmpla însă ca toate cercurile unei familii să aparțină unei clase, astfel încît să nu existe în această familie cercuri din a doua clasă (v. un exemplu corespunzător la soluția ex. 933).

În demonstrația acestei propoziții pentru cercurile din prima familie, vom considera în paralel cercurile din clasele (1) și (2), indicînd, în cazurile respective, întîi (fără paranteze) ceea ce se referă la cercurile din clasa (1) și apoi, între paranteze, ceea ce privește cercurile din clasa (2).

Fie în prima familie, un cerc Γ_0 din clasa (1), adică un cerc care taie cercurile A și B sub unghiuri strict egale cu α și cu β. Fie, mai departe, Γ un alt cerc al primei familii, aparținînd primei (celei de-a doua) clase, adică intersectînd cercurile A și B sub unghiuri strict egale cu α și cu β (strict egale cu 2 dr — α și cu 2 dr — β). Deoarece cercul A intersectează cercurile Γ_0 și Γ sub unghiuri strict egale (strict suplementare), el se transformă în sine însuși prin una dintre cele două inversiuni care duc cercurile Γ_0 și Γ unul în celălalt; vom nota această inversiune cu I, iar polul ei cu H (prin cealaltă dintre aceste inversiuni; pe aceasta o vom nota cu J, iar polul ei cu K). Același lucru este valabil pentru cercul B. De aici rezultă că planele cercurilor A și B trec ambele prin polul H al inversiunii I (prin polul K al inversiunii J). Prin urmare, planul oricărui cerc C, care aparține aceluiași fascicul cu A și cu B, trece de asemenea prin punctul H (prin punctul K). Inversiunea I de pol H (inversiunea J de pol K) duce cercul C în el însuși, deoarece ea transformă în sine însăși atît sfera dată, cît și planul cercului C. În virtutea propoziției I, demonstrată mai sus, cercul C intersectează cercurile Γ_0 și Γ sub unghiuri strict egale (strict suplementare). Așadar, toate cercurile Γ din prima familie, care intersectează cercurile A și B sub unghiuri strict egale cu α și cu β (strict egale cu 2dr — α și cu 2dr — β), intersectează cercul C sub un unghi strict egal (strict suplementar) cu cel sub care îl intersectează cercul Γ_0. Dacă nu vom face distincția între cele două unghiuri pe care cercul Γ le formează cu cercul C, vom putea spune că toate cercurile din prima familie taie sub același unghi cercul C.

Propoziția II este demonstrată pentru cercurile din prima familie, în ipoteza că printre cercurile acestei familii există un cerc aparținînd clasei (1). Dacă printre cercurile din prima familie nu ar exista nici unul din clasa (1), am putea relua aceleași raționamente pentru un cerc Γ_0 din clasa (2), (aceasta se reduce la înlocuirea unghiurilor α și β prin unghiurile 2dr — α și 2dr — β). Așadar, propoziția II este complet demonstrată pentru cercurile din prima familie, deci, în virtutea observației de la începutul demonstrației noastre, și pentru cercurile din a doua familie.

Observație. Distribuția cercurilor care intersectează două cercuri date A și B, sub unghiuri respectiv egale cu α și cu β, în două familii este esențială (compară cu soluția ex. 256, Obs.).

Generalizarea problemei 402. Conținutul problemei 402 din Geometria plană se extinde la sferă fără nici un fel de modificări.

III. *Să se găsească pe sferă un cerc care să intersecteze sub unghiuri egale patru cercuri date.*

Această problemă poate fi rezolvată, folosind proiecția stereografică și reducînd-o la problema corespunzătoare în plan. Însă rezolvarea ei directă pe sferă se dovedește a fi întrucîtva mai simplă decît rezolvarea problemei corespunzătoare în plan (v. soluția probl. 402).

Fie C_1, C_2, C_3 și C_4 cercurile date, iar σ cercul căutat, care le intersectează sub unghiuri egale.

La nr. **691**, am arătat că, pe sferă, toate cercurile care intersectează sub unghiuri egale trei cercuri date C_1, C_2 și C_3 formează patru fascicule; planele cercurilor fiecăruia dintre aceste patru fascicule trec prin una dintre cele patru drepte pe care se situează trei cîte trei polii inversiunilor care transformă cele trei cercuri date, luate două cîte două unul în celălalt (adică vîrfurile conurilor care trec prin cercurile date, luate două cîte două).

Folosind cele arătate mai sus, la generalizarea ex. 256 din Geometria plană, am fi putut demonstra că unul dintre aceste fascicule este format din cercurile care intersectează cele trei cercuri date sub unghiuri strict egale; fiecare dintre celelalte trei fascicule se compune din cercuri care intersectează sub unghiuri strict egale două dintre cercurile date, iar pe al treilea sub un unghi strict suplementar cu cel dintîi.

Să notăm acum cu s_4 pe aceea dintre cele patru drepte considerate prin care trece planul cercului căutat σ. Punctele de intersecție ale cercului σ cu cercurile C_1 și C_2 se transformă două cîte două unul în celălalt, prin aceea dintre cele două inversiuni care duc cercurile C_1 și C_2 unul în celălalt, avînd polul H pe dreapta s_4. În baza unor considerații analoge, planul cercului căutat σ trece prin una dintre cele patru drepte după care se dispun trei cîte trei polii inversiunilor care transformă unul în altul cercurile C_1, C_2 și C_4, luate două cîte două; să notăm această dreaptă cu s_3. Deoarece planul cercului σ trece prin polul H al uneia dintre cele două inversiuni care duc cercurile C_1 și C_2 unul în celălalt, dreapta s_3 va trece și ea prin punctul H.

De aici rezultă următoarea metodă pentru construirea cercului căutat. Construim polii inversiunilor care transformă cercurile date, luate două cîte două, unul în celălalt (metoda construcției rezultă din nr. **682**). Alegem arbitrar una dintre cele patru drepte pe care se dispun cei trei poli ai inversiunilor care transformă unul în altul cercurile C_1, C_2 și C_3, luate două cîte două; să notăm această dreaptă cu s_4. Fie H polul situat pe dreapta s_4 al inversiunii care duce unul în celălalt cercurile C_1 și C_2. Alegem acum una dintre cele două drepte care trec prin punctul H și pe care se află cei trei poli ai inversiunilor care duc unul în celălalt cercurile C_1, C_2 și C_4, luate două cîte două; notăm această dreaptă cu s_3. Planul care trece prin dreptele s_3 și s_4 va fi tocmai planul cercului σ căutat. Acest cerc σ va exista, dacă planul construit intersectează cel puțin unul dintre cercurile date, să zicem pe C_1, și va fi determinat ca intersecție a planului construit cu sfera dată.

Cercul astfel construit va intersecta toate cele patru cercuri date sub unghiuri egale, dacă el este secant la unul dintre aceste cercuri, de exemplu la C_1. În adevăr, cercul construit se transformă în sine însuși prin fiecare dintre cele trei inversiuni care transformă cercul C_1 respectiv în celelalte trei cercuri date și au polii pe dreptele s_3 și s_4.

Deoarece fiecăreia dintre cele patru drepte dintre care am ales pe una ca s_4 îi corespund două drepte dintre care am denumit una s_3, numărul maxim de soluții va fi egal cu opt.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate arăta că, dacă există toate cele opt cercuri căutate, atunci unul dintre ele taie toate cele patru cercuri date sub unghiuri *strict* egale, iar pe celelalte patru astfel: trei dintre ele sub unghiuri strict egale și pe al patrulea sub un unghi strict suplementar, iar ultimele trei intersectează cercurile date astfel: două dintre cercurile date sub unghiuri strict egale, iar pe celelalte două sub unghiuri strict suplementare cu acestea.

Generalizarea problemei 402 *bis*. Pentru a nu întrerupe expunerea care urmează, vom rezolva în prealabil următoarele patru probleme.

IV. *Să se construiască pe sferă un cerc care intersectează două cercuri date A și B respectiv sub unghiurile* α *și* β *date și care, în plus, intersectează primul dintre ele, adică pe A, într-un punct dat.*

Soluția acestei probleme în plan (probl. 402 *bis*) se extinde fără nici un fel de modificări esențiale la cazul sferei:

V. *Să se construiască pe sferă un cerc aparținînd aceluiași fascicul cu cercurile A și B și tangent la un al treilea cerc dat* Γ.

Deoarece planul cercului căutat trece prin intersecția D a planelor cercurilor A și B, tangenta comună la cercul Γ și la cercul căutat intersectează dreapta D sau este paralelă cu ea.

De aici rezultă următoarea construcție. Construim tangentele la cel de-al treilea cerc dat Γ, care trec prin punctul de intersecție al planului său cu dreapta de intersecție D a planelor cercurilor A și B (sau sînt paralele cu dreapta D). Planele care trec prin dreapta D și prin fiecare dintre tangentele construite vor fi planele cercurilor căutate.

Numărul maxim de soluții este doi.

Menționăm că problema are întotdeauna două soluții, dacă cercurile A și B nu au puncte comune. În adevăr, în acest caz, dreapta D nu are puncte comune cu sfera dată, iar punctul de intersecție al dreptei D cu planul cercului Γ (dacă acest punct de intersecție există) este exterior acestui cerc.

VI. *Să se construiască pe sferă un cerc aparținînd aceluiași fascicul cu două cercuri date A și B și ortogonal la un al treilea cerc dat* Γ.

Deoarece cercul căutat trebuie să aparțină aceluiași fascicul cu cercurile A și B, planul său trebuie să treacă prin intersecția D a planelor cercurilor A și B, și, deoarece cercul căutat trebuie să fie ortogonal la cercul Γ, planul său trebuie să treacă prin polul P al planului cercului Γ în raport cu sfera. Prin urmare, planul cercului căutat va fi planul care trece prin dreapta D și prin punctul P. Cercul căutat este astfel construit.

Dacă cercurile A și B au două puncte comune, atunci dreapta D, deci și planul care trece prin această dreaptă și prin punctul P, intersectează sfera dată și problema are soluție. În celelalte cazuri, problema poate să nu aibă soluții.

VII. *Să se construiască pe sferă un cerc care intersectează sub un unghi dat un cerc A și este ortogonal la fiecare dintre alte cercuri date B și C.*

Să studiem separat cele trei cazuri posibile(compară cu soluția ex. 259).

1) Cercurile B și C sînt secante în două puncte M și N. Efectuăm una dintre inversiunile (compară cu soluția ex. 948) care transformă sfera dată în sine însăși, punctele M și N în două puncte diametral opuse M' și N', și deci cercurile B și C în două cercuri mari B' și C'. Să presupunem că cercul dat A se transformă într-un cerc A'. Cercul căutat se transformă prin această inversiune într-un cerc ortogonal la cele două cercuri mari B' și C',

Scanned with OKEN Scanner

adică într-un cerc având ca poli punctele M' și N', și sîntem conduși la problema: *să se construiască pe sferă un cerc având polii în punctele M' și N' și care intersectează sub un unghi dat cercul A'.*

Soluția acestei probleme se reduce, evident, la construirea unui triunghi sferic după două laturi și după unghiul opus uneia dintre ele (compară cu ex. 489, Construcția h): laturile date vor fi arcul care unește punctul M' cu polul cercului A' și raza sferică a acestuia; unghiul opus primei dintre aceste laturi trebuie să fie egal cu unghiul dat.

2) Cercurile B și C sînt tangente în punctul T. Cercul căutat intersectează ambele cercuri în punctul T sub un unghi drept. Ajungem la următoarea problemă: *să se construiască pe sferă un cerc care intersectează cercul B sub un unghi drept, într-un punct T al acestuia, și care intersectează cercul A sub un unghi dat.* Această din urmă problemă reprezintă, evident, un caz particular al uneia dintre problemele studiate mai sus (anume cea de la IV).

3) Cercurile B și C nu au puncte comune. Efectuăm una dintre inversiunile (ex. 950) care transformă în sine însăși sfera dată, iar cercurile date B și C în două cercuri B' și C', situate în plane paralele, deci având polii P' și Q' comuni. Să presupunem că, în aceste condiții, cercul A este dus într-un cerc A'. Cercul căutat se transformă prin această inversiune într-un cerc ortogonal la cele două cercuri B' și C', având polii P' și Q' comuni, adică în cercul mare care trece prin punctele P' și Q', astfel că sîntem conduși la următoarea problemă: *să se construiască pe sferă un cerc mare care trece prin punctele P' și Q' și care intersectează sub un unghi dat cercul A'.*

Rezolvarea acestei probleme nu prezintă dificultăți, deoarece toate cercurile mari de pe sferă care intersectează cercul dat sub un unghi dat sînt, evident, tangente la un același cerc având polii comuni cu cercul dat.

Trecem, în sfîrșit, la rezolvarea pe sferă a problemei 402 *bis* din Geometria plană.

VIII. *Să se găsească pe sferă un cerc care să intersecteze trei cercuri date A, B și C sub unghiurile date α, β și γ.*

Această problemă poate fi și ea rezolvată, recurgînd la proiecția stereografică și reducînd-o la problema corespunzătoare în plan. Vom da aici soluția directă a acestei probleme, analogă cu soluția problemei corespunzătoare din plan (probl. 402 *bis*).

Dacă vom lua în considerare unghiul dintre razele a două cercuri, duse spre punctele lor de contact, atunci este firesc să distribuim cercurile căutate în patru familii, după cum cercul căutat intersectează cele trei cercuri date sub unghiuri strict egale cu

1) α, β, γ sau $2\text{dr} - \alpha, 2\text{dr} - \beta, 2\text{dr} - \gamma$;

2) $2\text{dr} - \alpha, \beta, \gamma$ sau $\alpha, 2\text{dr} - \beta, 2\text{dr} - \gamma$;

3) $\alpha, 2\text{dr} - \beta, \gamma$ sau $2\text{dr} - \alpha, \beta, 2\text{dr} - \gamma$;

4) $\alpha, \beta, 2\text{dr} - \gamma$ sau $2\text{dr} - \alpha, 2\text{dr} - \beta, \gamma$.

Pentru a fixa ideile, vom începe prin a găsi cercurile aparținînd primei familii și vom presupune chiar că cercul σ căutat intersectează cercurile date sub unghiuri *strict* egale cu α, β și γ.

Scanned with OKEN Scanner

Să construim, cum s-a arătat mai sus (la IV), un cerc σ_1, care intersectează cercurile A și B sub unghiuri strict egale cu α și cu β (sau un cerc σ_1', care le intersectează sub unghiuri strict egale cu $2dr - \alpha$ și cu $2dr - \beta$). În acest caz, cercul căutat σ și cercul σ_1 (sau σ_1') vor aparține aceleiași familii (în sensul propoziției II) de cercuri care intersectează cercurile A și B sub unghiurile α și β. Prin urmare, orice cerc aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B intersectează cercurile σ și σ_1, în virtutea celor spuse la demonstrația propoziției II, sub unghiuri strict egale (iar cercurile σ și σ_1' sub unghiuri strict suplementare).

Să găsim, mai departe, printre cercurile aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B, două cercuri A' și B', tangente la cercul σ_1 (sau σ_1'), folosind procedeul indicat mai sus (la V). Vom presupune, deocamdată, că astfel de cercuri există. Aceste două cercuri vor fi tangente, în virtutea celor arătate mai sus, și la cercul căutat σ (deoarece contactul este o intersecție sub un unghi 0 sau $2dr$). În aceste condiții, cercul A' va fi tangent la cercurile σ și σ_1 cu contacte de aceeași speță (iar la σ și la σ_1' cu contacte de spețe diferite), deoarece el trebuie să le intersecteze sub unghiuri strict egale (strict suplementare). Aceasta este valabil și pentru cercul B'.

Prin urmare, *cercul căutat σ trebuie să fie tangent și anume cu contact de o speță determinată* (interior sau exterior) *la fiecare dintre cercurile A' și B' și să intersecteze cercul C sub un unghi strict egal cu γ.*

Să construim acum un cerc σ_2, care intersectează cercul C sub un unghi strict egal cu γ și este tangent la cercul A' cu contact de aceeași speță ca și cercul σ (sau ca un cerc oarecare σ_2', care intersectează cercul C sub un unghi strict egal cu $2dr - \gamma$ și avînd cu cercul A' un contact de speță opusă contactului cercurilor σ și A'). În virtutea propoziției II, orice cerc aparținînd aceluiași fascicul cu cercurile A' și C intersectează cercurile σ și σ_2, sub unghiuri strict egale (iar cercurile σ și σ_2' sub unghiuri strict suplementare).

Deoarece, printre cercurile aparținînd aceluiași fascicul cu A' și cu C, există un cerc (anume A') tangent la cercul σ_2 (sau σ_2'), înseamnă că, printre aceleași cercuri, se va găsi (compară mai sus, V) în general și un al doilea cerc C', tangent la cercul σ_2 (sau σ_2'). În aceste condiții, cercurile σ și σ_2 au contacte de aceeași speță cu cercul C' (iar cercurile σ_2 și σ_2' au contacte de spețe diferite).

Așadar *cercul căutat σ trebuie să fie tangent la cele trei cercuri A', B' și C', pe care știm să le construim, și anume să aibă cu fiecare dintre ele contacte de o speță determinată* (interioare sau exterioare).

Am căutat un cerc σ, care intersectează cercurile date sub unghiuri strict egale cu α, β și γ. Se vede ușor, reluînd raționamente analoge, că cercul σ', care intersectează cele trei cercuri date sub unghiuri strict egale cu $2dr - \alpha$, $2dr - \beta$ și $2dr - \gamma$, trebuie să fie tangent la aceleași trei cercuri A', B' și C' ca și cercul σ. Însă cele două cercuri σ și σ' au contacte de spețe diferite cu fiecare dintre cele trei cercuri A', B' și C'. Aceasta rezultă din faptul că, la construirea cercului σ, putem folosi același cerc ajutător σ_1 sau σ'_1 ca și mai sus, și același cerc ajutător σ_2 sau σ_2'. Însă cercurile σ_1 și σ_1', precum și σ_2 și σ_2' își inversează acum rolurile.

Se poate demonstra că, și reciproc, orice cerc tangent la cercurile A', B' și C', cu contacte de speță determinată (interioare sau exterioare), inter-

Scanned with OKEN Scanner

sectează cercurile date sub unghiuri strict egale cu α, β, γ sau cu $2dr - \alpha$, $2dr - \beta$, $2dr - \gamma$ (v. demonstrația corespunzătoare în soluția problemei 403).

Așadar, *cercurile căutate*, care aparțin primei dintre cele patru familii enumerate la începutul soluției problemei noastre, adică *cele care intersectează cercurile date sub unghiuri strict egale cu* α, β, γ *sau cu* $2dr - \alpha$, $2dr - \beta$, $2dr - \gamma$, *sînt tangente la cele trei cercuri* A', B' *și* C'.

În aceste condiții, ambele aparțin unui anumit fascicul dintre cele patru fascicule de cercuri care intersectează cele trei cercuri date sub unghiuri egale (**691**). În adevăr, din cele arătate mai sus, rezultă că, dacă unul dintre cercurile căutate din prima familie are contacte de aceeași speță cu două oarecare dintre cele trei cercuri, să zicem cu A' și cu B', atunci și orice cerc din prima familie va avea cu ele contacte de aceeași speță.

Am presupus mai sus că, printre cercurile aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B, se vor găsi două cercuri A' și B' tangente la cercul auxiliar σ_1 (sau σ_1'). După cum am remarcat mai sus (la V), aceasta se va întîmpla întotdeauna dacă cercurile A și B nu vor avea puncte comune. Cercurile A' și B' pot exista însă și în cazul cînd cercurile A și B sînt secante (v. fig. 664 din Geometria plană).

În cazul cînd, printre cercurile aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B, nu există cercuri tangente la cercul căutat, și acest lucru are loc pentru fiecare dintre perechile de cercuri B și C, A și C, metoda descrisă mai sus este inaplicabilă. Aceasta se poate întîmpla numai în cazul cînd toate trei cercurile date au două cîte două puncte comune (compară cu fig. 665 din Geometria plană).

Pentru a da soluția problemei noastre care să fie valabilă și în acest caz, vom proceda astfel. După ce am construit cercul auxiliar σ_1 (sau σ_1'), așa cum s-a indicat mai sus, vom găsi, printre cercurile aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu B, un cerc B_0, ortogonal la σ_1 (sau σ_1'). Procedeul construcției a fost indicat mai sus (la VI). Cercul căutat σ (sau σ') trebuie să fie de asemenea ortogonal la B_0, deoarece cercurile σ și σ_1 (sau σ și σ_1') intersectează pe B_0 sub unghiuri egale. Analog, după ce am construit, mai departe, un nou cerc auxiliar σ_2, care intersectează cercurile A și C sub unghiuri respectiv egale cu α și γ, putem găsi un cerc C_0, aparținînd aceluiași fascicul cu A și cu C și ortogonal la cercul σ_3. Cercul C_0 va fi ortogonal și la cercul σ căutat.

Așadar, *cercul căutat* σ *(sau* σ'*) trebuie să intersecteze cercul* A *sub un unghi strict egal cu* α *(sau cu* $2dr - \alpha$*) și să fie ortogonal la cercurile* B_0 *și* C_0. Se poate arăta că, și reciproc, orice cerc care satisface aceste din urmă condiții va satisface și condițiile problemei inițiale. Sîntem conduși astfel la construcția considerată înainte, la VII.

Menționăm că această a doua cale de rezolvare va fi, evident, potrivită în cazurile cînd prima metodă s-ar putea dovedi inaplicabilă, adică atunci cînd cele trei cercuri date sînt secante două cîte două. În adevăr, dacă două cercuri sînt secante, atunci putem duce întotdeauna prin punctele lor de intersecție un cerc ortogonal la un al treilea cerc dat (compară cu cele arătate la VI). Prin urmare, în cazul de față, cercurile B_0 și C_0 există.

Aceasta a doua cale se poate dovedi însă inaplicabilă în cazurile cînd prima metodă este evident bună. În adevăr, dacă două cercuri (să zicem A și B) nu sînt secante, atunci, printre cercurile care aparțin aceluiași fascicul cu ele, s-ar putea să nu existe un cerc ortogonal la un cerc dat (să zicem la σ_1).

Scanned with OKEN Scanner

Pînă acum, am căutat cercuri aparținînd primei dintre cele patru familii despre care a fost vorba la începutul soluției. În același mod, putem găsi cercurile aparținînd fiecăreia dintre celelalte trei familii. Trebuie doar să înlocuim unul dintre unghiurile α, β și γ prin suplementul său. Este esențial că, în aceste condiții, vom fi nevoiți, de fiecare dată, să recurgem la cercuri auxiliare de felul cercurilor A', B' și C' sau B_0 și C_0, în general *distincte de acestea*.

Fiecare dintre cele patru familii de cercuri conține cel mult două cercuri căutate, astfel că numărul maxim de soluții este opt.

972. În soluția exercițiului 692, am arătat că problema pusă acolo devine nedeterminată, dacă cele două cercuri date sînt situate pe aceeași sferă și că, în aceste condiții, toate cercurile căutate se situează pe aceeași sferă, iar planele cercurilor căutate trec printr-o aceeași dreaptă l, care unește centrele celor două cercuri date.

Prin urmare (**668**), vîrfurile conurilor circumscrise sferei și tangente la ea în lungul cercurilor căutate, adică polii planelor cercurilor căutate în raport cu sfera, se află pe aceeași dreaptă, anume polara reciprocă l' a dreptei l în raport cu sfera. Deoarece dreapta l intersectează sfera în două puncte, polara ei reciprocă l' nu va avea puncte comune cu sfera. De aceea, *locul geometric al vîrfurilor conurilor considerate va fi întreaga dreaptă* l'.

Mai departe, în soluția exercițiului 693 s-a arătat că problema pusă acolo devine nedeterminată, dacă cele două cercuri date sînt situate pe aceeași sferă și se intersectează în două puncte A și B, că toate cercurile căutate sînt situate atunci pe aceeași sferă, iar locul geometric al centrelor acestor cercuri este segmentul AB. Deoarece vîrfurile conurilor circumscrise sferei date și tangente la ea în lungul cercurilor căutate sînt, evident, inversele centrelor cercurilor căutate în raport cu sfera dată, locul geometric al acestor vîrfuri va fi arcul AB al cercului care este inversul segmentului AB în raport cu sfera dată.

973. Orice cerc mare de pe sferă, distinct de cercul c, îl intersectează pe acesta în două puncte diametral opuse. Prin urmare, pentru ca cercul C din planul P să fie proiecția unui cerc mare al sferei, el trebuie să intersecteze cercul dat c în două puncte diametral opuse (sau să coincidă cu el); evident, aceeași condiție este și suficientă.

Condiția menționată poate fi prezentată și într-o altă formă. Dacă o este centrul cercului c, iar r raza lui, atunci puterea punctului o în raport cu orice cerc C trebuie să fie egală cu $-r^2$. De aici rezultă că proiecțiile stereografice m și m' a două puncte diametral opuse de pe sferă (adică ale punctelor de intersecție a două cercuri mari), ca puncte de intersecție a două cercuri C, trebuie să fie situate pe aceeași dreaptă cu punctul o și să satisfacă (ca mărime și ca semn condiția $om \cdot om' = -r^2$.

973 *bis*. Fie dat, ca și la exercițiul 973, în planul P cercul c, care este un cerc mare al sferei proiectate stereografic pe planul P, din unul dintre polii acestui cerc. Vom nota cu o și cu r centrul și raza cercului c.

1° *Se dau proiecțiile stereografice* a *și* b *a două puncte* A *și* B *de pe o sferă; trebuie construită proiecția stereografică a cercului mare care trece prin aceste două puncte ale sferei.*

Construim inițial proiecția stereografică a' a punctului A' de pe sferă, diametral opus punctului A. Punctul a' se află pe dreapta oa și satisface (compară soluția ex. 973) condiția $oa \cdot oa' = -r^2$. Ultima egalitate arată că punctul a' este simetricul în raport cu punctul o al inversului punctului a în raport cu sfera dată. Aceasta ne permite să construim punctul a'. De exemplu, acesta poate fi determinat ca punct de intersecție cu dreapta oa al cercului care trece prin punctul a și prin extremitățile m și m' ale diametrului cercului c, perpendicular pe oa.

După ce am construit punctul a', este suficient să ducem un cerc prin punctele a, b și a'.

2° *Se dau proiecțiile stereografice a și b a două puncte A și B de pe o sferă. Trebuie construit în plan un unghi egal cu unghiul AoB, care măsoară distanța sferică dintre punctele A și B.*

În locul unghiului AoB, distanța sferică poate fi măsurată și prin unghiul format de două cercuri mari, perpendiculare pe cercul mare AB și care trec respectiv prin punctele A și B. Deoarece proiecția stereografică nu modifică unghiurile dintre cercuri, această construcție poate fi realizată după cum urmează:

Construim proiecția a' a punctului diametral opus lui A și proiecția cercului mare AB (v. mai sus 1°); pe cercul construit $aa'b$, găsim proiecția b' a punctului diametral opus lui B, ca intersecție a acestui cerc cu dreapta ob. Prin punctele a și a', ducem un cerc ortogonal la cercul $aa'b$ (v. nr. 90, constr. 13); prin punctele b și b', ducem un cerc analog, de asemenea ortogonal la cercul $aa'b$ (pe care este situat și punctul b'). Unghiul format de ultimele două cercuri construite va fi cel căutat.

3° *Să se construiască proiecția stereografică a cercului de pol A, care trece prin punctul B, cunoscînd proiecțiile stereografice a și b ale punctelor A și B.*

Deoarece acest din urmă cerc taie sub un unghi drept toate cercurile mari care trec prin punctul A și prin punctul diametral opus lui, rezultă că și proiecția stereografică căutată a aceluiași cerc trebuie să intersecteze sub un unghi drept proiecțiile tuturor acestor cercuri mari. Prin urmare, problema se reduce la următoarea:

Să se ducă în plan, printr-un punct b, un cerc ortogonal la toate cercurile care trec printr-un punct dat a și printr-un punct a', construit cum se arată la 1°.

Centrul cercului căutat va fi, evident, punctul de intersecție al dreptei aa' cu tangenta în punctul b la cercul $aa'b$. Construcția trebuie modificată, dacă punctul b se află pe dreapta aa'; în acest caz, cercul căutat va intersecta a doua oară dreapta aa' într-un punct care este conjugatul armonic al lui b în raport cu extremitățile segmentului aa' (**189**).

Fie dat acum, *în locul punctului b, un arc al cercului c, egal cu raza sferică a cercului căutat.* În acest caz, trebuie să construim în prealabil proiecția b a unuia dintre punctele cercului considerat, pentru a reduce problema la cea de mai sus. Cel mai simplu este să construim punctul b situat pe dreapta oa. În acest scop, ducem un cerc prin punctul a și prin extremitățile m și m' ale diametrului cercului c, perpendicular pe dreapta oa. Mai departe, ducem prin punctele m și m' un cerc (mai exact, unul dintre cele două cercuri) care formează cu cercul amm' un unghi măsurat de un arc dat. Punctul de

Scanned with OKEN Scanner

intersecție al acestui din urmă cerc cu dreapta *oa* va fi tocmai punctul *b*. Valabilitatea acestei construcții rezultă din faptul că punctele *m* și *m'* vor fi proiecțiile stereografice ale polilor cercului mare a cărui proiecție este dreapta *oa*.

4° *Să se construiască proiecția stereografică a cercului mare care este locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date, cunoscînd proiecțiile stereografice ale acestora.*

Construim proiecțiile celor două cercuri care au fiecare ca pol unul dintre punctele date și trec prin celălalt (v. 3°); mai departe, construim proiecția cercului mare care trece prin punctele de intersecție ale celor două cercuri construite (v. 1°).

Efectuarea construcțiilor indicate la exercițiul 489 nu prezintă acum dificultăți de principiu: este suficient să efectuăm în proiecție stereografică operațiile care se efectuează la rezolvarea acelorași probleme pe sferă (compară cu soluția ex. 489), folosind în acest scop construcțiile studiate la 1°—4°.

974. Să notăm acum cu *P* un punct al sferei date, care este diametral opus punctului *V* (fig. 240), și cu *p* proiecția sa stereografică, adică centrul cercului *c* (fig. 241). Fie de construit punctul *M* al sferei avînd ca proiecție stereografică un punct dat *m* din planul de proiecție.

Problema va fi rezolvată, dacă vom construi pe sferă un cerc mare avînd ca proiecție dreapta *pm* și un cerc mic avînd ca proiecție un cerc de centru *p*, care trece prin punctul *m*.

Fie *b* punctul de intersecție al razei *pm* cu cercul *c*. Folosind compasul sferic, purtăm pe cercul mare *C*, în sensul cuvenit, arcul *AB*, egal cu arcul

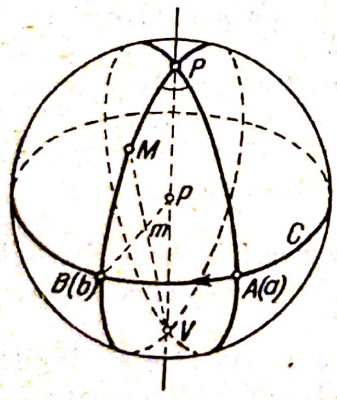


Fig. 240

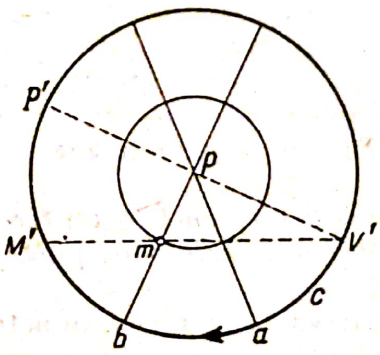


Fig. 241

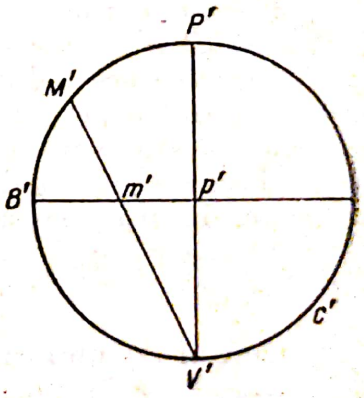


Fig. 242

ab al cercului *c*. Mai departe, construim cercul mare *PB*. Acesta va avea ca proiecție stereografică dreapta *pm*.

Construim acum în plan cercul *c'* (fig. 242), de centru arbitrar *p'* și de rază egală cu raza sferei date, adică cu raza cercului dat, precum și un diametru *V'P'* al acestui cerc *c'*. Pe raza *p'B'*, perpendiculară pe *V'P'*, purtăm segmentul *p'm'* = *pm*. Notăm acum cu *M'* al doilea punct de intersecție al dreptei *V'm'* cu cercul *c'*. Folosind compasul sferic, construim pe sferă cercul mic de pol *P*, a cărui rază sferică va fi egală cu arcul *P'M'* al cercului *c'*. Acest cerc mic va avea, evident, ca proiecție stereografică cercul

de centru p, care trece prin punctul m. Punctul căutat M va fi intersecția cercului mic construit cu semicercul PBV al cercului mare PB.

Construcția poate fi întrucîtva simplificată, dacă luăm ca cerc c' însuși cercul dat c, iar ca punct m' punctul dat m (construcțiile respective sînt indicate prin linii punctate în fig. 241).

Reciproc, pentru a construi punctul m după un punct M dat, este suficient să efectuăm construcțiile analoge, însă luate în ordine inversă.

975. Vom pune la baza construcției următoarea propoziție din geometria sferică: *cercul* Γ, *care intersectează sub un unghi drept două cercuri date* C *și* C', *este propriul său omolog în cele două inversiuni care transformă cercurile date unul în celălalt.* Această propoziție rezultă direct din propoziția analogă a Geometriei plane (**227** *bis*), prin proiecție stereografică (sau din propoziția I de la soluția ex. 971). De aici rezultă că punctele de intersecție A și B ale cercului Γ cu cercul dat C se transformă în punctele de intersecție A' și B' ale cercului Γ cu celălalt cerc dat C', prin ambele inversiuni menționate: una dintre cele două inversiuni transformă punctul A în A' și punctul B în B', cealaltă, dimpotrivă, punctul A în B' și punctul B în A'. De aici reiese următoarea metodă pentru *construcția* unui număr arbitrar de perechi de *puncte care se corespund în ambele inversiuni*.

Construim cercul mare radical al celor două cercuri date; deoarece cercurile mari radicale a trei cercuri arbitrare, luate două cîte două, au două puncte comune (**687**), metoda pentru construirea axei radicale a două cercuri în plan (nr. **158**, Constr. 12) este aplicabilă și în cazul de față. Construim, mai departe, un cerc Γ, avînd polul în unul dintre punctele M ale cercului mare radical, ortogonal la C, deci și la C'; pentru a construi un astfel de cerc Γ, este suficient să ducem prin punctul M un cerc mare tangent la C (ex. 489, Construcția n); punctul M trebuie astfel ales pe cercul mare radical, încît această din urmă problemă să aibă soluție. Punctele de intersecție ale cercului construit Γ cu cercurile C și C' determină două perechi de puncte, care sînt unul inversul celuilalt, așa cum s-a arătat mai sus.

Trecem la *construcția cercului de inversiune*, dacă acesta există. În acest scop, ducem prin cele două puncte inverse un cerc arbitrar Σ. Acest cerc este propriul său omolog în inversiunea dată și va fi, de aceea, ortogonal la cercul de inversiune. De aceea, cercul de inversiune poate fi construit ca un cerc ortogonal la cercul Σ și la alte două cercuri analoge cu el (și care nu aparțin aceluiași fascicul cu Σ); metoda pentru construirea unui astfel de cerc rezultă din cele expuse la nr. **686—687** și este pe deplin analogă cu metoda rezolvării problemei corespunzătoare în plan (compară cu nr. **158**, constr. 13).

Punctele U și V, după care se intersectează cele două cercuri Γ și Γ', care sînt fiecare ortogonale la cele două cercuri date, se transformă unul în celălalt, prin ambele inversiuni considerate. De aceea, dreapta UV trebuie să treacă prin polii celor două inversiuni. Altfel spus, U și V vor fi *punctele de intersecție cu sfera ale dreptei care unește* polii celor două inversiuni, adică *vîrfurile celor două conuri care pot fi duse prin cercurile date.*

Multe dintre construcțiile pe sferă, pe care le-am descris, se simplifică, dacă cele două cercuri date sînt secante; în acest caz, cercul mare radical trece prin punctele de intersecție ale celor două cercuri, cele două cercuri de inversiune trec și ele prin punctele lor de intersecție și împart în părți egale unghiurile formate de cercuri date.

Efectuarea în proiecție stereografică a construcțiilor considerate nu prezintă nici un fel de dificultăți, deoarece proiecția stereografică a două figuri inverse pe sferă este formată (cf. ex. 936) iarăși din două figuri inverse. Remarcăm numai că proiecțiile stereografice u și v ale punctelor U și V, despre care a fost vorba mai sus, sînt punctele limită (ex. 152) ale cercurilor c și c', care servesc ca proiecții stereografice cercurilor date C și C'. În adevăr, punctele u și v vor fi punctele de intersecție ale cercurilor ortogonale la c și la c'.

976. Cercul despre care este vorba la exercițiul 492 (v. soluția acestui exercițiu) este situată în planul care trece prin centrele celor trei cercuri date; pentru a construi efectiv acest cerc, este suficient să construim trei puncte de intersecție arbitrare ale acestui plan cu sfera.

Fie P și P' polii a două dintre cercurile date (fig. 243). Construim pe sferă cercul mare care trece prin punctele P și P' și notăm cu M, N și cu M', N' punctele lui de intersecție cu aceste două cercuri date. Construim, mai departe, în plan un cerc a cărui rază este egală cu raza sferei date (fig. 244), iar pe acesta, punctele p, p', m, n, m' și n', astfel ca arcele PP', $PM = PN$ și $P'M' = P'N'$ să fie respectiv egale cu arcele pp', $pm = pn$ și $p'm' = p'n'$ (alegem astfel notațiile punctelor m, n și m', n', încît pe cerc punctele m, p, n, m', p', n', să se dispună în aceeași ordine ca și omoloagele lor pe cercul mare PP'). Fie dreapta care unește mijloacele o și o' ale coardelor mn și $m'n'$ secantă la cerc în punctele l și l'. Construim, pe cercul mare PP' al sferei, cu ajutorul compasului sferic, punctele L și L', astfel ca arcele lm, ln, $l'm'$ și $l'n'$ să fie respectiv egale cu arcele LM, LN, $L'M'$ și $L'N'$. Punctele L și L' vor fi situate, evident pe dreapta care unește centrele celor două cercuri date, deci ele se vor situa pe cercul căutat.

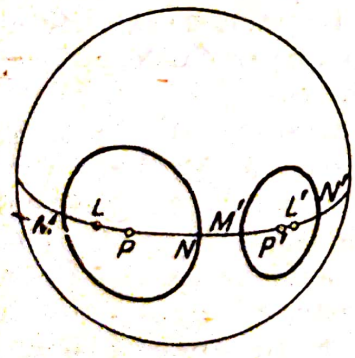


Fig. 243

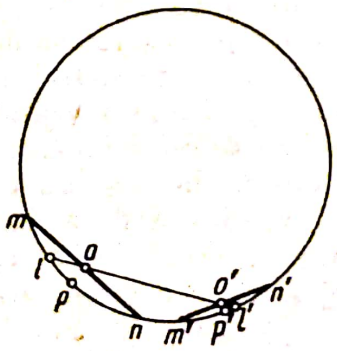


Fig. 244

Considerînd unul dintre cercurile date, folosite mai sus, împreună cu un al treilea, putem construi analog încă o pereche de puncte ale cercului căutat, deci și însuși cercul căutat.

977. Problema de rezolvat poate fi enunțată astfel:

Se dau proiecțiile stereografice c_1, c_2 și c_3 a trei cercuri C_1, C_2 și C_3 de pe o sferă și cercul c, după care sfera intersectează planul de proiecție; să se construiască proiecția stereografică γ a cercului Γ de pe sferă, care intersectează pe fiecare dintre cercurile C_1, C_2 și C_3 în două puncte diametral opuse.

Să vedem cum vor fi reprezentate, în proiecție stereografică, punctele diametral opuse ale cercului C_1. În acest scop, vom observa că fiecare pereche

de puncte diametral opuse ale cercului C_1 se corespund evident într-o anumită inversiune *în spațiu*, anume în inversiunea avînd ca pol centrul acestui cerc și ca putere puterea polului lui în raport cu sfera. Altfel, putem spune că orice pereche de puncte diametral opuse ale cercului C_1 se corespund într-o anumită inversiune *pe sferă*, care transformă în el însuși cercul C_1. Deoarece proiecțiile stereografice a două figuri inverse de pe sferă sînt iarăși două figuri inverse în plan (am folosit aceeași observație în soluția ex. 976), ajungem la următorul rezultat. Proiecțiile stereografice ale fiecărei perechi de puncte diametral opuse ale cercului C_1 sînt două puncte de pe cercul c_1, care se corespund în aceeași *inversiune* I_1 din plan, care transformă în sine cercul c_1. Pentru a găsi în plan polul O_1 al acestei din urmă inversiuni, este suficient să aflăm proiecția stereografică *a două* perechi de puncte diametral opuse și să unim două cîte două punctele astfel obținute. Ca proiecție a uneia dintre aceste perechi de puncte, putem lua, evident, punctele de intersecție cu cercul c_1 ale liniei centrelor cercurilor c și c_1; proiecțiile punctelor din a doua pereche se pot găsi , construind proiecția stereografică a unui cerc mare, ortogonal la cercul C_1. Așadar, polul O_1 al inversiunii I_1 poate fi construit. Puterea (cu necesitate negativă) inversiunii I_1 este egală cu puterea punctului O_1 în raport cu cercul c_1; vom nota cu $-\rho_1^2$, puterea inversiunii I_1, ρ_1 fiind un segment care poate fi construit. Deoarece cercul căutat γ trece prin două puncte care se corespund în inversiunea I_1, cercul γ va fi propriul său omolog în inversiunea I_1.

Considerînd în mod analog cercurile C_2 și C_3 și proiecțiile lor stereografice, vom vedea că cercul căutat γ este propriul său omolog în cele două inversiuni ai căror poli O_2 și O_3 pot fi construiți prin aceeași metodă prin care am obținut mai sus polul O_1 al primei inversiuni. Puterile celor două inversiuni sînt negative; le vom nota cu $-\rho_2^2$ și cu $-\rho_3^2$, unde ρ_2 și ρ_3 sînt segmente pe care știm să le construim, ca și segmentul ρ_1 de mai sus. Așadar, ajungem la următoarea problemă:

Se dau, în plan, trei inversiuni de poli O_1, O_2 și O_3 dați și de puterile negative

$$k_1 = -\rho_1^2;\ k_2 = -\rho_2^2;\ k_3 = -\rho_3^2,$$

date prin segmentele ρ_1, ρ_2, ρ_3. Să se construiască cercul care se transformă în sine însuși prin fiecare dintre aceste trei inversiuni.

Pentru ca fiecare dintre cele trei inversiuni să transforme în el însuși cercul căutat $O(r)$, puterea polului fiecărei inversiuni în raport cu cercul căutat trebuie să fie egală cu puterea inversiunii respective

$$O_1O^2 - r^2 = -\rho_1^2;\ O_2O^2 - r^2 = -\rho_2^2;\ O_3O^2 - r^2 = -\rho_3^2.$$

Aceste ecuații arată că cercul căutat $O(r)$ împarte în părți egale pe fiecare dintre cele trei cercuri cunoscute $O_1(\rho_1)$, $O_2(\rho_2)$ și $O_3(\rho_3)$. Așadar, sîntem conduși, în cele din urmă, la problema:

Să se construiască, în plan, un cerc $O(r)$ care împarte în părți egale pe fiecare dintre trei cercuri date.

Soluția acestei din urmă probleme nu prezintă dificultăți, dacă folosim cele arătate în soluția exercițiului 695, Obs. 2°.

978. Remarcăm că conținutul problemei 112 din Geometria plană poate fi conceput mai larg decît la p. 293 din acel volum, și anume astfel:

Două cercuri din plan, dintre care unul este tangent la o dreaptă dată a sau la un cerc dat într-un punct dat A, iar al doilea este tangent la o altă dreaptă dată b sau la un alt cerc dat într-un punct dat B variază, rămînînd mereu tangente între ele. Să se afle locul geometric al punctelor lor de contact.

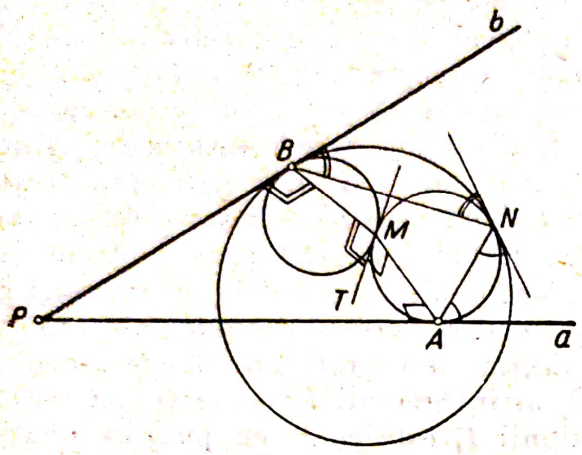


Fig. 245

Cazul în care se dau două cercuri nu se deosebește de acela în care se dau două drepte; de aceea, ne vom mărgini, pentru a fixa ideile, numai la acest din urmă caz.

Prima soluție. Să presupunem, în primul rînd, că dreptele date a și b se taie într-un punct P (fig. 245). Dacă cele două cercuri, dintre care primul este tangent la dreapta a în punctul A, iar al doilea la dreapta b în punctul B, sînt tangente *exterior* în punctul M, *interior* unghiului APB, atunci unghiul AMB va fi egal, cum ne convingem ușor din examinarea figurii, cu suma unghiurilor PAM și PBM, astfel că egalitatea $\widehat{APB} + \widehat{PAM} + \widehat{PBM} + \widehat{AMB} = 4\text{dr}$ devine $\widehat{APB} + 2\widehat{AMB} = 4\,\text{dr}$, de unde

$$\widehat{AMB} = 2\text{dr} - \frac{1}{2}\widehat{APB} = \text{const.} \qquad (1)$$

Dacă, în aceleași ipoteze, cercurile sînt *tangente interior* într-un punct N, de asemenea *interior* unghiului APB, atunci unghiul ANB va fi, evident, suplementul sumei unghiurilor exterioare cu vîrfurile în A și în B ale patrulaterului $PANB$ adică $\widehat{ANB} + (2\text{dr} - \widehat{PAN}) + (2\text{dr} - \widehat{PBN}) = 4\text{dr}$, de unde $\widehat{PAN} + \widehat{PBN} = \widehat{ANB} + 2\text{dr}$. Egalitatea $\widehat{APB} + \widehat{PAN} + \widehat{PBN} + \widehat{ANB} = 4\text{dr}$ devine $\widehat{APB} + 2\widehat{ANB} = 2\text{dr}$, de unde

$$\widehat{ANB} = 1\text{dr} - \frac{1}{2}\widehat{APB} = \text{const.} \qquad (2)$$

Dacă am considera, în mod analog, două cercuri tangente *interior* într-un punct M', situat *în afara* unghiului APB, sau dacă ar fi tangente *exterior* într-un punct N', de asemenea *exterior* unghiului APB, am obține respectiv

$$\widehat{AM'B} = \frac{1}{2}\widehat{APB} = \text{const}; \qquad (1')$$

$$\widehat{AN'B} = 1\text{dr} + \frac{1}{2}\widehat{APB} = \text{const.} \qquad (2')$$

Din egalitățile (1) și (1′), rezultă că locul geometric al punctelor M și M' este un cerc care trece prin punctele date A și B, iar din egalitățile (2) și (2′) reiese că locul geometric al punctelor N și N' este un alt cerc, care trece prin aceleași puncte. Din egalitățile (1′) și (2), rezultă relația $\widehat{AM'B} + \widehat{ANB} = 1\text{dr}$, din care deducem ușor că aceste două cercuri din urmă sînt secante sub un unghi drept în punctele A și B.

Dacă dreptele a și b sînt paralele, atunci obținem, într-un mod analog, următoarele rezultate: locul geometric al punctelor M și M' este dreapta AB, iar locul geometric al punctelor N și N' este un cerc avînd ca diametru segmentul AB.

Cele arătate mai sus impun o rezervă în cazul cînd dreptele sînt secante și are loc egalitatea $PA = PB$, sau cînd dreptele date sînt paralele, iar AB este perpendiculară pe ele. În acest caz, există un cerc tangent la prima dreaptă dată în punctul A și la a doua dreaptă dată în punctul B. Acest din urmă cerc va coincide cu cercul care servește, în cazul general, ca loc geometric al punctelor N și N' (el se obține ca loc geometric al „punctelor de contact" a două cercuri care coincid; în adevăr, orice punct comun a două cercuri care coincid se bucură de aceeași proprietate ca și punctul de contact a două cercuri distincte: ambele cercuri au în acest punct tangenta comună). De aceea, în cazurile particulare menționate aici, locul geometric căutat va fi un cerc sau o dreaptă.

Observație. Pentru a nu analiza separat cîteva cazuri particulare, cum am procedat mai sus, putem folosi unghiuri orientate și egalitățile (I—IV) deduse în soluția problemei 344 din Geometria plană.

Să începem iarăși prin a considera cazul în care dreptele a și b se taie într-un punct P. Să presupunem că două cercuri, dintre care primul este tangent în punctul A la dreapta a, iar al doilea, în punctul B la dreapta b, sînt tangente între ele în punctul M. Să notăm cu MT tangenta comună celor două cercuri în punctul M. În aceste condiții, vom avea, în toate cazurile, ca mărime și ca semn $\measuredangle PAM = \measuredangle AMT$; $\measuredangle TMB = \measuredangle MBP$. Mai departe, în virtutea egalității (II), avem $\measuredangle AMB = \measuredangle AMT + \measuredangle TMB = \measuredangle PAM + \measuredangle MBP$. În baza egalității (III), avem $\measuredangle PAM + \measuredangle AMP + \measuredangle MPA = 0$; $\measuredangle MBP + \measuredangle BPM + \measuredangle PMB = 0$, de unde $(\measuredangle BPM + \measuredangle MPA) + \measuredangle PAM + (\measuredangle AMP + \measuredangle PMB) + \measuredangle MBP = 0$ sau, în virtutea relației (II), $\measuredangle BPA + \measuredangle PAM + \measuredangle AMB + \measuredangle MBP = 0$. În sfîrșit, înlocuind aici suma $\measuredangle PAM + \measuredangle MBP$ prin unghiul $\measuredangle AMB$, egal cu ea, căpătăm $\measuredangle BPA + 2\measuredangle AMB = 0$.

Găsirea unghiului orientat $\measuredangle AMB$ din ultima ecuație cere o deosebită atenție. Amintim că, în soluția problemei 344, am convenit să considerăm egale între ele unghiurile orientate ale căror mărimi algebrice fie că sînt egale, fie că diferă printr-un număr întreg de semicercuri. De aceea, ultima egalitate poate fi înlocuită prin următoarea: $\measuredangle BPA + 2\measuredangle AMB = 2\text{dr}k$, unde k este un întreg oarecare. De aici deducem $\measuredangle AMB = 1\text{dr}k - \frac{1}{2}\measuredangle BPA$. Dacă vom considera iarăși drept identice unghiurile orientate care diferă printr-un număr întreg de semicercuri, vom obține două cazuri posibile esențial diferite:

$$\measuredangle AMB = -\frac{1}{2}\measuredangle BPA \text{ și } \measuredangle AMB = 1\text{dr} - \frac{1}{2}\measuredangle BPA.$$

Într-un caz, ca și în celălalt, locul geometric al punctelor M va fi, în virtutea egalității (IV), un cerc. Am obținut același rezultat ca și mai sus.

În cazul cînd dreptele a și b sînt paralele, vom avea, cum se vede ușor, aceleași formule în care însă $\measuredangle MPA = \measuredangle BPM = \measuredangle BPA = 0$.

A doua soluție. O inversiune de pol A și de putere arbitrară transformă cercurile tangente în punctul A la dreapta a în drepte paralele cu aceasta din urmă, iar cercurile tangente în punctul B la dreapta b în

Din egalitățile (1) și (1′), rezultă că locul geometric al punctelor M și M' este un cerc care trece prin punctele date A și B, iar din egalitățile (2) și (2′) reiese că locul geometric al punctelor N și N' este un alt cerc, care trece prin aceleași puncte. Din egalitățile (1′) și (2), rezultă relația $\overset{\frown}{AM'B} + \overset{\frown}{ANB} = 1\text{dr}$, din care deducem ușor că aceste două cercuri din urmă sînt secante sub un unghi drept în punctele A și B.

Dacă dreptele a și b sînt paralele, atunci obținem, într-un mod analog, următoarele rezultate: locul geometric al punctelor M și M' este dreapta AB, iar locul geometric al punctelor N și N' este un cerc avînd ca diametru segmentul AB.

Cele arătate mai sus impun o rezervă în cazul cînd dreptele sînt secante și are loc egalitatea $PA = PB$, sau cînd dreptele date sînt paralele, iar AB este perpendiculară pe ele. În acest caz, există un cerc tangent la prima dreaptă dată în punctul A și la a doua dreaptă dată în punctul B. Acest din urmă cerc va coincide cu cercul care servește, în cazul general, ca loc geometric al punctelor N și N' (el se obține ca loc geometric al „punctelor de contact" a două cercuri care coincid; în adevăr, orice punct comun a două cercuri care coincid se bucură de aceeași proprietate ca și punctul de contact a două cercuri distincte: ambele cercuri au în acest punct tangenta comună). De aceea, în cazurile particulare menționate aici, locul geometric căutat va fi un cerc sau o dreaptă.

Observație. Pentru a nu analiza separat cîteva cazuri particulare, cum am procedat mai sus, putem folosi unghiuri orientate și egalitățile (I—IV) deduse în soluția problemei 344 din Geometria plană.

Să începem iarăși prin a considera cazul în care dreptele a și b se taie într-un punct P. Să presupunem că două cercuri, dintre care primul este tangent în punctul A la dreapta a, iar al doilea, în punctul B la dreapta b, sînt tangente între ele în punctul M. Să notăm cu MT tangenta comună celor două cercuri în punctul M. În aceste condiții, vom avea, în toate cazurile, ca mărime și ca semn $\sphericalangle PAM = \sphericalangle AMT$; $\sphericalangle TMB = \sphericalangle MBP$. Mai departe, în virtutea egalității (II), avem $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMT + \sphericalangle TMB = \sphericalangle PAM + \sphericalangle MBP$. În baza egalității (III), avem $\sphericalangle PAM + \sphericalangle AMP + \sphericalangle MPA = 0$; $\sphericalangle MBP + \sphericalangle BPM + \sphericalangle PMB = 0$, de unde $(\sphericalangle BPM + \sphericalangle MPA) + \sphericalangle PAM + (\sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB) + \sphericalangle MBP = 0$ sau, în virtutea relației (II), $\sphericalangle BPA + \sphericalangle PAM + \sphericalangle AMB + \sphericalangle MBP = 0$. În sfîrșit, înlocuind aici suma $\sphericalangle PAM + \sphericalangle MBP$ prin unghiul $\sphericalangle AMB$, egal cu ea, căpătăm $\sphericalangle BPA + 2\sphericalangle AMB = 0$.

Găsirea unghiului orientat $\sphericalangle AMB$ din ultima ecuație cere o deosebită atenție. Amintim că, în soluția problemei 344, am convenit să considerăm egale între ele unghiurile orientate ale căror mărimi algebrice fie că sînt egale, fie că diferă printr-un număr întreg de semicercuri. De aceea, ultima egalitate poate fi înlocuită prin următoarea: $\sphericalangle BPA + 2\sphericalangle AMB = 2\text{dr}k$, unde k este un întreg oarecare. De aici deducem $\sphericalangle AMB = 1\text{dr}k - \frac{1}{2}\sphericalangle BPA$. Dacă vom considera iarăși drept identice unghiurile orientate care diferă printr-un număr întreg de semicercuri, vom obține două cazuri posibile esențial diferite:

$$\sphericalangle AMB = -\frac{1}{2}\sphericalangle BPA \text{ și } \sphericalangle AMB = 1\text{dr} - \frac{1}{2}\sphericalangle BPA.$$

Într-un caz, ca și în celălalt, locul geometric al punctelor M va fi, în virtutea egalității (IV), un cerc. Am obținut același rezultat ca și mai sus.

În cazul cînd dreptele a și b sînt paralele, vom avea, cum se vede ușor, aceleași formule în care însă $\sphericalangle MPA = \sphericalangle BPM = \sphericalangle BPA = 0$.

A doua soluție. O inversiune de pol A și de putere arbitrară transformă cercurile tangente în punctul A la dreapta a în drepte paralele cu aceasta din urmă, iar cercurile tangente în punctul B la dreapta b în

cercuri tangente în punctul B', inversul lui B, la un același cerc b', inversul dreptei b. Așadar, sîntem conduși la următoarea problemă:

Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor paralele cu o dreaptă dată a la cercurile tangente într-un punct dat B' la un cerc dat b'.

Deoarece cercurile tangente între ele într-un punct dat B' au acest punct B' ca centru de asemănare comun, acest loc geometric este format, cum se vede ușor, din două drepte perpendiculare (fig. 246) sau, într-un caz particular, dintr-o singură dreaptă (compară cu soluția ex. 689).

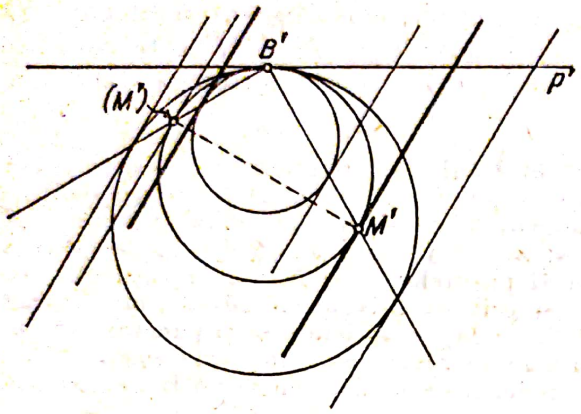


Fig. 246

Prin urmare, locul geometric căutat al punctelor de contact M ale celor două cercuri este format din două cercuri (sau, în particular, dintr-un cerc și dintr-o dreaptă) secante sub un unghi drept (sau reprezintă un cerc sau o dreaptă). Am ajuns la același rezultat ca și în prima soluție.

Trecem acum la *c a z u l s f e r e i.*

Două cercuri de pe sferă, dintre care primul este tangent la un cerc dat într-un punct dat al acestuia, iar al doilea, la un alt cerc dat, de asemenea într-un punct dat al acestuia, variază rămînînd tot timpul tangente între ele. Să se afle locul geometric al punctelor de contact.

Efectuînd o proiecție stereografică cu centrul într-un punct arbitrar al sferei, ajungem la problema analogă din plan, considerată mai sus. Prin urmare, locul geometric căutat al punctelor de contact de pe sferă este format din două cercuri ortogonale (sau, într-un caz particular, dintr-un singur cerc).

979. Fie de aflat locul geometric al punctelor de contact M a două sfere Σ și Σ', dintre care prima este tangentă la un plan dat α, într-un punct dat A, iar a doua la un alt plan β, într-un punct de asemenea dat B.

P r i m a s o l u ț i e. Să presupunem întîi că planele date α și β sînt secante. Planul tangent comun la cele două sfere în punctul lor comun M intersectează dreapta de intersecție a celor două plane date α și β într-un punct P, pentru care avem $PA = PM = PB$. Dacă dreapta AB nu este perpendiculară pe intersecția celor două plane date, atunci există pe această dreaptă un punct unic P, egal depărtat de punctele A și B. De aceea, acest punct P va fi punctul de intersecție comun al tuturor planelor tangente comune la sferele Σ și Σ', în punctele lor de contact M. De aici rezultă că, în acest caz, toate punctele de contact M se află pe o aceeași sferă S, de centru P și de rază egală cu $PA = PB$. Sfera S intersectează o pereche oarecare de sfere Σ și Σ', după două cercuri, dintre care primul este tangent la curba de intersecție a sferei S cu planul α în punctul A, iar al doilea este tangent în punctul B la curba de intersecție a sferei S cu planul β. Așadar, revenim la găsirea pe sfera S a locului geometric considerat în exercițiul 978.

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe intersecția planelor α și β, atunci punctul de contact M se află în planul care trece prin punctele A și B și este perpendicular pe dreapta de intersecție. Așadar, revenim la găsirea în acest plan a locului geometric considerat la exercițiul 978. Problema se rezolvă analog și în cazul cînd cele două plane date sînt paralele.

A doua soluție. O inversiune de pol A și de putere arbitrară transformă sferele tangente în punctul A la planul α în plane paralele cu planul α, iar sferele tangente în punctul B la planul β în sfere tangente într-un punct B', inversul punctului B, la o aceeași sferă care este inversa planului β. Sîntem conduși astfel la următoarea problemă:

Să se afle locul geometric al punctelor de contact M' ale planelor tangente, paralele cu un plan dat α, la sfere tangente într-un punct dat B' la o sferă dată.

Din soluția exercițiului 689, rezultă că acest loc geometric este format din două drepte perpendiculare, situate în același plan, sau, într-un caz particular, dintr-o singură dreaptă.

Prin urmare, locul geometric căutat este format din două cercuri situate pe aceeași sferă și ortogonale între ele, sau dintr-un singur cerc.

979 *bis.* Fie de aflat locul geometric al punctelor de contact M ale unei sfere date S cu sferele tangente într-un punct dat A la o dreaptă dată D.

Să notăm cu A' punctul în care dreapta ce unește punctul A cu unul dintre punctele de contact M intersectează a doua oară sfera dată S. Una dintre tangentele la sfera S în punctul A' este paralelă cu dreapta D, deoarece punctul de contact M este centru de asemănare al celor două sfere, iar A și A' sînt două puncte omoloage. Prin urmare, locul geometric al punctelor A' este un cerc mare al sferei S. Locul geometric al punctelor M de pe sfera S va fi de asemenea un cerc, deoarece punctele M și A' se corespund în inversiunea de pol A și de putere egală cu puterea punctului A în raport cu sfera S.

980. Fie de aflat locul geometric al punctelor de contact M a două cercuri C și C', dintre care primul este tangent într-un punct dat A la o dreaptă dată a, iar al doilea într-un punct dat B la o dreaptă dată b.

Prima soluție. Să presupunem întîi că *dreptele date a și b sînt strîmbe.* Cercurile C și C', care, evident, nu sînt situate în același plan și sînt tangente în punctul M, se află pe aceeași sferă (**450**, Obs. 1), iar această sferă este tangentă la dreapta a în punctul A și la dreapta b în punctul B. Evident, centrul acestei sfere se situează, pe dreapta de intersecție l a celor două plane perpendiculare respectiv pe dreapta a în punctul A și pe dreapta b în punctul B. Totodată, centrul aceleiași sfere se află într-un plan perpendicular pe segmentul AB și care trece prin mijlocul acestuia. În cazul dreptelor strîmbe a și b, acest din urmă plan intersectează dreapta l, deoarece dreapta l este perpendiculară atît pe dreapta a, cît și pe dreapta b, iar segmentul AB nu poate fi perpendicular pe perpendiculara comună celor două drepte. De aici rezultă că există o sferă S unică, tangentă la dreptele a și b, respectiv în punctele A și B, și că pe această sferă S se situează toate cercurile C și C' considerate. Așadar, sîntem conduși să căutăm pe sferă locul geometric al punctelor considerate la exercițiul 978 (faptul că, în locul a două cercuri pe sferă, sînt date două tangente a și b la sfera S nu schimbă esența problemei).

Am presupus mai sus că dreptele a și b sînt strîmbe. Dacă *dreptele a și b sînt situate în același plan*, atunci, după cum vom vedea imediat, soluția problemei se modifică esențial. În acest caz, punctul de contact M poate să fie situat sau nu în planul dreptelor a și b.

Dacă dreptele a și b se află în același plan și dacă punctul de contact M *se găsește* în același plan, revenim la căutarea în plan a locului geometric considerat în soluția exercițiului 978.

Mai departe, dacă dreptele a și b se taie într-un punct P (dacă sînt paralele), iar punctul de contact M al cercurilor C și C' nu sînt situate în planul dreptelor date, atunci tangenta comună la cele două cercuri în punctul M trece prin punctul P (respectiv, este paralelă cu dreptele date). De aici rezultă că $PA = PM = PB$ (respectiv că dreptele AM, MB și AB sînt perpendiculare pe dreptele date). De aceea, punctul M este situat pe sfera de centru P și de rază egală cu $PA = PB$ (respectiv, în planul care trece prin punctele A și B și este perpendicular pe dreptele date).

Luînd în considerare acum cele spuse la soluția exercițiului 978, ajungem la următoarele rezultate finale.

Dacă dreptele date a și b sînt strîmbe, atunci locul geometric căutat este format din două cercuri ortogonale, situate pe sfera S, tangentă în punctul A la dreapta a și în punctul B la dreapta b.

Dacă dreptele date a și b se taie într-un punct P, astfel ca $PA \neq PB$, atunci locul geometric căutat este format din două cercuri ortogonale, situate în planul dreptelor date; dacă însă $PA = PB$, atunci locul geometric căutat este o sferă, de centru P și de rază $PA = PB$.

Dacă dreptele date a și b sînt paralele, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe ele, locul geometric constă din două cercuri ortogonale, conținute în planul dreptelor date; dacă însă dreapta AB este perpendiculară pe dreptele date, locul geometric căutat este un plan perpendicular pe dreptele date și care trece prin punctele A și B.

A doua soluție. O inversiune de pol A și de putere arbitrară transformă cercurile tangente în punctul A la dreapta a în drepte paralele cu dreapta a, iar cercurile tangente în punctul B la dreapta b în cercuri tangente, în inversul punctului B, la un același cerc, care este inversul dreptei b. Sîntem conduși astfel la următoarea problemă:

Să se afle locul geometric al punctelor de contact ale dreptelor tangente, paralele cu o dreaptă dată a, la cercurile tangente într-un punct dat B' al unui cerc dat.

Rezolvarea acestei din urmă probleme nu prezintă dificultăți deosebite; rezolvînd-o, vom obține, după efectuarea unei noi inversiuni de pol A, aceleași rezultate ca și cele din prima soluție a problemei inițiale.

981. Fie a și b drepte date, a' și b' polarele lor reciproce în raport cu o sferă dată. Deoarece dreapta a intersectează, prin ipoteză, polara reciprocă b' a dreptei b sau este paralelă cu ea, dreptele a și b' sînt coplanare. Dacă planul care le conține nu trece prin centrul sferei, atunci dreptele a' și b trec ambele prin polul acestui plan, ca polare reciproce ale dreptelor a și b'. Dacă însă planul în care se situează dreptele a și b' trece prin centrul sferei, atunci dreptele a' și b vor fi ambele perpendiculare pe acest plan, și, de aceea, paralele între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, a doua dreaptă b intersectează în toate cazurile polara reciprocă a' a primei drepte, sau este paralelă cu ea.

În general, dreptele a și b nu sînt concurente, deoarece putem alege ca dreapta a *oricare* dintre dreptele care taie polara reciprocă b' a dreptei date b. Să considerăm acum cazul cînd dreapta a intersectează polara reciprocă b' a dreptei date b (sau este paralelă cu ea) și, totodată, intersectează într-un punct dat A însăși dreapta dată b. Să mai presupunem că cele două drepte a și b nu intersectează sfera dată.

Să alegem pe dreapta a un punct arbitrar B (distinct de A) și să considerăm cele două cercuri în lungul cărora conurile circumscrise cu vîrfurile în punctele A și B sînt tangente la sfera dată. Aceste două cercuri vor fi secante în două puncte M și M'; în adevăr, dreapta de intersecție a planelor celor două cercuri intersectează sfera în două puncte, ca polară reciprocă a dreptei a, care nu are puncte comune cu sfera. De aici mai urmează că punctele M și M' nu depind de alegerea punctului B pe dreapta a; ele pot fi determinate ca puncte de contact cu sfera ale planelor tangente care trec prin dreapta a.

Mai departe, să mai alegem pe dreapta b un punct arbitrar C și să considerăm cele două cercuri în lungul cărora conurile circumscrise cu vîrfurile în punctele A și C sînt tangente la sfera dată. Din aceeași cauză ca și mai sus, aceste două cercuri vor fi de asemenea secante în două puncte N și N', iar dreapta NN' va fi polara reciprocă a dreptei AC, adică a dreptei date b. Iarăși, punctele N și N' nu depind de alegerea punctului C.

Așadar, am obținut pe cercul Γ, în lungul căruia conul circumscris de vîrf A este tangent la sfera dată, patru puncte M, M', N și N'. În aceste condiții, tangentele la cercul Γ în punctele M și M' se taie pe dreapta a (sau sînt ambele paralele cu această dreaptă), deoarece M și M' sînt punctele de contact cu sfera ale planelor tangente care trec prin dreapta a. Dreapta NN' trece prin punctul de intersecție al acestor două tangente (sau este paralelă cu ele), deoarece dreapta NN', fiind polara reciprocă a dreptei b, intersectează, prin ipoteză, dreapta a (sau este paralelă cu ea). Deoarece secanta NN' trece prin punctul de intersecție al tangentelor în punctele M și M' la cercul Γ (sau este paralelă cu ele), rezultă că M, N, M' și N' sînt patru puncte conjugate armonic pe cercul Γ (nr. **213**).

982. Punctul a' de pe sfera A, considerat la nr. **684** *bis*, se obține dintr-un punct arbitrar a al aceleiași sfere, prin următoarea construcție. Fie date, în afară de sfera A, încă două sfere B și C. Să notăm cu b punctul de pe sfera B care este antiomologul punctului a de pe sfera A în raport cu unul dintre centrele de asemănare S_{12} ale sferelor A și B; mai departe, să notăm cu c punctul de pe sfera C, care este antiomologul punctului b de pe sfera B în raport cu unul dintre centrele de asemănare S_{23} ale sferelor B și C. În aceste condiții, punctul a' al sferei A va fi antiomologul punctului c de pe sfera C, în raport cu centrul de asemănare S_{13} al sferelor A și C, care se află pe axa de asemănare $S_{12}S_{23}$ a sferelor date.

Altfel, mai putem spune că punctul b se obține din punctul a prin inversiunea I_{12} de pol S_{12}, care duce sfera A în sfera B; mai departe, punctul c se obține din punctul b prin inversiunea I_{23} de pol S_{23}, care transformă sfera B în sfera C; în sfîrșit, punctul a' se obține din punctul c, prin inversiunea I_{13} de pol S_{13}, care duce sfera C în sfera A. Prin urmare, punctul a' se obține

din punctul a, prin trei inversiuni consecutive I_{12}, I_{23} și I_{13}, ai căror poli se situează pe aceeași dreaptă s.

Cele două inversiuni consecutive I_{23} și I_{13} pot fi înlocuite (compară cu soluția ex. 937), într-o infinitate de moduri, prin două inversiuni I' și I'', echivalente cu ele și ai căror poli se situează pe aceeași dreaptă s. În particular, putem lua ca pol al primei inversiuni I' polul S_{12} al inversiunii I_{12} de pe dreapta s. În acest caz, și puterea inversiunii I' va fi egală cu puterea inversiunii I_{12}, deoarece inversiunea I' trebuie să transforme în sine aceleași sfere ca și inversiunea I_{12}. Această alegere a inversiunii I' va determina complet și inversiunea I''. Prin urmare, punctul a' se va obține din punctul a prin trei inversiuni consecutive și, anume inversiunea I_{12}, iarăși I_{12} și, în sfîrșit, o inversiune determinată I'', adică prin inversiunea I'' singură.

De aici mai rezultă că, dacă punctul a descrie o figură dată pe sfera A, punctul a' va descrie, pe această sferă, figura inversă celei date (și anume, pe cea care corespunde figurii date în inversiunea I'').

Am presupus tacit mai sus că centrele de asemănare S_{12}, S_{23} și S_{13} sînt distincte. Aceleași raționamente subzistă cu modificări neînsemnate, și în cazul cînd cele trei centre de asemănare coincid.

983. Să presupunem că, prin cercul dat C, putem duce o sferă (sau un plan) S, care intersectează cercul dat C' sub un unghi drept. Să notăm cu A' și cu B' punctele de intersecție ale sferei S cu cercul C'.

Inversiunea I avînd polul într-un punct P al cercului C' (pentru a fixa ideile, distinct de punctele A' și B') și de putere arbitrară transformă cercul dat C și sfera (sau planul) S într-un cerc c și într-o sferă s, care trece prin el, iar cercul C' într-o dreaptă c', care taie sfera s sub un unghi drept, adică ea coincide cu unul dintre diametrii ei. Prin diametrul c' al sferei s, putem duce planul s', care intersectează cercul c de pe sfera s sub un unghi drept; în acest scop, este suficient să ducem prin c' un plan perpendicular pe planul cercului c. Aceeași inversiune I ca și mai sus va transforma planul s' în sfera (sau în planul) S', care trece prin cercul C' și este ortogonală la cercul C.

Așadar, dacă prin cercul C trece o sferă (sau un plan) S, care intersectează cercul C' sub un unghi drept, atunci și prin cercul C' va trece o sferă (sau un plan) S', care intersectează cercul C sub un unghi drept.

Să presupunem acum că, prin cercul C, trece o infinitate de sfere secante la cercul C' sub un unghi drept (de altfel, este suficient să presupunem că prin C trec cel puțin două sfere din acestea). În acest caz, și prin cercul c considerat mai sus, va trece o infinitate de sfere (sau cel puțin două sfere), secante la dreapta c' sub un unghi drept, adică avînd această dreaptă ca diametru comun. Prin urmare, cercul c are ca axă dreapta c', și prin această dreaptă trece o infinitate de plane care intersectează sub un unghi drept cercul c. Inversiunea I transformă aceste plane într-o infinitate de sfere care trec prin cercul C' și sînt ortogonale la cercul C.

Așadar, dacă prin cercul C trece o infinitate de sfere ortogonale la cercul C', atunci și prin cercul C' va trece o infinitate de sfere care intersectează sub un unghi drept cercul C.

Scanned with OKEN Scanner

Să alegem, în acest caz, două puncte arbitrare K și M pe cercul C și două puncte arbitrare L și N pe cercul C' și să demonstrăm că, în patrulaterul $KLMN$, are loc relația

$$KL \cdot MN = LM \cdot NK.$$

Să presupunem că inversiunea I de pol P și de putere h, considerată mai sus, transformă punctele K, L, M și N respectiv în punctele k, l, m și n (am presupus că punctul P este distinct de L și de N). Egalitățile

$$KL = \frac{h \cdot kl}{Pk \cdot Pl}\,;\; LM = \frac{h \cdot lm}{Pl \cdot Pm}\,;\; MN = \frac{h \cdot mn}{Pm \cdot Pn}\,;\; NK = \frac{h \cdot nk}{Pn \cdot Pk}$$

ne dau

$$KL \cdot MN = \frac{h^2 \cdot kl \cdot mn}{Pk \cdot Pl \cdot Pm \cdot Pn}\,;\; LM \cdot NK = \frac{h^2 \cdot lm \cdot nk}{Pk \cdot Pl \cdot Pm \cdot Pn}\,.$$

Deoarece punctele k și m sînt situate pe cercul c, iar punctele l și n, pe axa sa c', avem totodată $kl = lm$ și $mn = nk$. Din cele două egalități precedente, rezultă deci relația căutată $KL \cdot MN = LM \cdot NK$.

984. Singurele plane și sfere care se transformă în ele înseși prin transpoziție în raport cu o *dreaptă* c dată, vor fi evident:

a) planele care trec prin dreapta c și

b) sferele și planele care intersectează această dreaptă c sub un unghi drept.

Fie dată acum o sferă S care se transformă în sine însăși prin transpoziție *analagmatică* în raport cu un cerc dat C.

Inversiunea I avînd polul într-un punct arbitrar al cercului C îl transformă într-o dreaptă c, iar sfera (sau planul) S într-o sferă sau într-un plan s. Transpoziția analagmatică în raport cu cercul C se transformă într-o transpoziție (în accepțiunea obișnuită a cuvîntului) în raport cu dreapta c, iar sfera sau planul s se transformă în sine prin această transpoziție (compară cu soluția ex. 936 și 937). Prin urmare, în virtutea celor spuse la începutul soluției, sfera sau planul s se dispune în raport cu dreapta c așa cum s-a arătat mai sus, la aliniatele (a) sau (b). În aceste condiții, și sfera S, care corespunde în inversiunea I sferei sau planului s, se dispune în raport cu cercul C așa cum se arată în textul problemei la aliniatele (1) sau (2).

984. *bis*. Singurele cercuri și drepte care se transformă în ele înseși prin transpoziție în raport cu o dreaptă dată c vor fi, evident,

a) însăși dreapta c;

b) cercurile avînd ca axă dreapta c, altfel spus intersectînd sub un unghi drept toate planele care trec prin dreapta c;

c) cercurile care intersectează dreapta c în două puncte sub un unghi drept și dreptele care taie sub un unghi drept dreapta c.

De aici, exact în același mod ca în soluția exercițiului 984, căpătăm rezultatul din enunțul problemei.

985. O inversiune avînd polul într-un punct arbitrar al cercului dat C și puterea arbitrară transformă cercul C în dreapta c, iar punctele P și P' în punctele p și p'. Valabilitatea propoziției de demonstrat rezultă (compară cu soluția ex. 984) din următoarea propoziție evidentă:

Fiecărui punct p din spațiu îi corespunde un punct p' care se bucură de proprietatea că, prin punctele p și p', trece o infinitate de cercuri care inter-

sectează sub un unghi drept în două puncte dreapta c; punctul p' se obține din p prin transpoziție în raport cu dreapta c.

985 *bis*. Fie de găsit un cerc C, tangent la un cerc dat C' și secant sub unghiuri drepte la un alt cerc dat C''.

Inversiunea I avînd polul într-un punct oarecare al cercului C'' (pentru a fixa ideile, exterior cercului C') și puterea arbitrară transformă cercul dat C' într-un cerc c', celălalt cerc dat C'' într-o dreaptă c'' și cercul căutat C în cercul sau în dreapta c. Sîntem conduși astfel la următoarea problemă:

Să se afle un cerc c, tangent la un cerc dat c' și care să intersecteze în două puncte sub unghiuri drepte o dreaptă dată c'' (sau o dreaptă c, tangentă la un cerc dat c' și intersectînd sub un unghi drept o dreaptă dată c'').

Această din urmă problemă se rezolvă ușor, dacă luăm în considerare că tangenta în punctul de contact al cercului căutat c și al cercului dat c' (sau tangenta căutată c la cercul c') se află în același plan cu dreapta c''. De aceea, este suficient să ducem tangentele la cercul c' din punctul de intersecție al planului acestui cerc cu dreapta c'' (iar dacă acest plan și dreapta sînt paralele, atunci tangentele la cercul c', paralele cu dreapta c''), pentru a determina punctul de contact al cercului (sau dreptei) c cu cercul dat c', după care nu mai prezintă dificultăți nici construcția cercului (sau dreptei) c. După ce cercul (sau dreapta) c a fost construit, cercul C se obține prin inversiunea I, considerată mai sus.

Problema devine nedeterminată, dacă dreapta c'' este situată în planul cercului c', adică dacă cercurile C' și C'' se află pe aceeași sferă sau în același plan. În celelalte cazuri, numărul maxim de soluții este două.

986. Să notăm cu (P) și cu (Q) două conuri oarecare, circumscrise unei sfere date; cu P și cu Q vîrfurile lor; cu A și cu B respectivele cercuri de contact. Prin cercurile A și B trec (**683**) două conuri; să notăm acest conuri cu (H) și cu (K), iar vîrfurile lor cu H și cu K.

Fie M unul dintre punctele de intersecție ale conurilor (P) și (Q). Să notăm respectiv cu M' și cu M'' punctul de intersecție al generatoarei PM a conului (P) cu cercul A și punctul de intersecție al generatoarei QM a conului (Q) cu cercul B. Dreapta PM are ca polară reciprocă în raport cu sfera (**668**) tangenta la cercul A în punctul M', iar dreapta QM are ca polară reciprocă tangenta în punctul M'' la cercul B. De aici rezultă că *planul polar al oricăruia dintre punctele de intersecție M ale conurilor (P) și (Q) au următoarea proprietate: el conține una dintre tangentele la cercul A și una dintre tangentele la cercul B.*

Să găsim acum *toate* planele care se bucură de această proprietate, adică cele care conțin una dintre tangentele la cercul A și una dintre tangentele la cercul B. Prin tangenta m' la cercul A într-un punct M' trec, evident, două plane din acestea; pentru a le obține, este suficient să ducem tangentele la cercul B prin punctul de intersecție al planului acestui cerc cu dreapta m' (sau tangentele la cercul B, paralele cu dreapta m'). Pe de altă parte, aceste plane vor fi *două* plane tangente în punctul M' la cele două conuri (H) și (K). De aici urmează că *unicele plane care se bucură de proprietatea menționată mai sus, vor fi planele tangente la conurile (H) și (K).*

Așadar, planul polar al oricărui punct de intersecție M al conurilor (P) și (Q) este tangent fie la conul (H), fie la conul (K) și trece deci fie prin punctul H, fie prin punctul K. Prin urmare, *orice punct de intersecție al conurilor (P) și (Q) se situează fie în planul polar al punctului H, fie în planul polar al punctului K.*

986 *bis*. Să păstrăm notațiile adoptate la soluția exercițiului 986.

Dacă M este un punct arbitrar al conului (P), nesituat pe sfera dată, atunci cercul în lungul căruia conul circumscris, de vîrf M, este tangent la sferă va fi evident tangent la cercul A în punctul lui de intersecție M' cu dreapta PM. Același lucru are loc pentru punctele M ale conului (Q) și ale cercului B. De aici rezultă că, dacă M este un punct comun al conurilor (P) și (Q), atunci conul circumscris, de vîrf M, este tangent la sferă în lungul unui cerc C, tangent la cercurile A și B. Deoarece planul oricăruia dintre aceste cercuri trece (**691**) prin punctul H sau prin punctul K și acest plan este planul polar al punctului M, reiese că *orice punct de intersecție M al conurilor (P) și (Q) este situat fie în planul polar al punctului H, fie în planul polar al punctului K.*

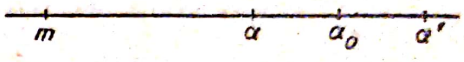


Fig. 247

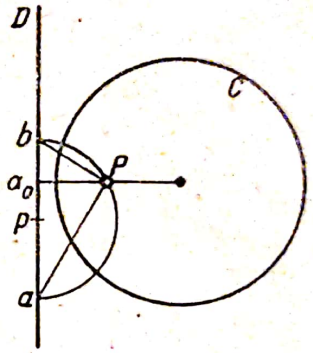


Fig. 248

986 *ter*.[1] 1°. Fie α_0 mijlocul segmentului avînd ca extremități punctele α și α'.

Dacă punctele α și α' sînt reale (fig. 247), avem, ca mărime și ca semn, $m\alpha_0 = 1/2 \cdot (m\alpha + m\alpha')$ și $m\alpha \cdot m\alpha' - m\alpha_0^2 = m\alpha \cdot m\alpha' - 1/4 \cdot (m\alpha + m\alpha')^2 = -1/4 \cdot (m\alpha - m\alpha')^2 = -1/4 \cdot \alpha\alpha'^2 < 0$, oricare ar fi poziția punctului m pe dreaptă.

Fie acum α și α' punctele de intersecție imaginare ale dreptei D cu cercul C, P unul dintre punctele lor limită (fig. 248). În acest caz, punctul α_0 va fi (prin definiție) piciorul perpendicularei coborîte din punctul P pe dreapta D. Produsul $m\alpha . m\alpha'$ va fi egal (tot prin definiție) cu puterea punctului m în raport cu cercul C, adică cu mP^2. Vom avea, în acest caz, $m\alpha . m\alpha' - m\alpha_0^2 = mP^2 - m\alpha_0^2 = \alpha_0 P^2 > 0$, oricare ar fi poziția punctului m pe dreapta D.

2° Fie α și α' iarăși punctele de intersecție imaginare ale dreptei D cu cercul C (fig. 248); P unul dintre punctele limită ale dreptei D și cercului

[1]) Problema este următoarea (v. exercițiul 921 din Geometria în spațiu): Să se verifice că:

1° Diferența dintre produsul distanțelor unui punct m, de pe o dreaptă, la două puncte α și α' ale acestei drepte și pătratul distanței aceluiași punct la mijlocul segmentului $\alpha\alpha'$ nu depinde de poziția punctului m (indiferent dacă punctele α și α' vor fi reale sau imaginare conjugate; numai semnele acestei diferențe vor fi altele într-un caz și în celălalt).

2° Produsul dintre distanțele mijlocului segmentului avînd ca extremități două puncte imaginare conjugate la două puncte reale a și b, care formează cu primele o diviziune armonică, este o mărime constantă.

3° Produsul dintre distanțele mijlocului segmentului ab unde a și b sînt punctele de la 2°, la cele două puncte imaginare, este egal cu $(ab/2)^2$ (Nota Red. E.T.).

C; α_0 mijlocul segmentului $\alpha\alpha'$, adică (prin definiție) piciorul perpendicularei coborîte din punctul P pe dreapta D; a și b două puncte reale ale dreptei D, care formează o diviziune armonică cu punctele α și α', adică (iarăși prin definiție) care sînt conjugate în raport cu cercul C.

Deoarece punctele a și b sînt conjugate în raport cu cercul C, cercul construit pe segmentul ab ca diametru este ortogonal la C (v. ex. 237), și trece, de aceea, prin punctul P. Din triunghiul dreptunghic abP, avem $\alpha_0 a \cdot \alpha_0 b = \alpha_0 P^2$, indiferent de alegerea perechii de puncte a și b, care formează diviziunea armonică cu α și α'.

3° Întrucît cercul de diametru ab este ortogonal la C, puterea mijlocului p al segmentului ab în raport cu cercul C va fi egală cu $(ab/2)^2$. Însă această putere este (prin definiție) produsul $p\alpha \cdot p\alpha'$. Așadar, $p\alpha \cdot p\alpha' = (ab/2)^2$.

987. 1° Fie cercul imaginar determinat de planul P și de punctul s. Să notăm cu O centrul cercului imaginar, adică (prin definiție) piciorul perpendicularei duse din punctul s pe planul P, iar cu m un punct arbitrar al acestui plan. Diferența dintre puterea ms^2 a punctului m în raport cu cercul imaginar și pătratul distanței mO a aceluiași punct la centrul cercului va fi, evident, $ms^2 - mo^2 = Os^2$, adică este independentă de alegerea punctului m.

2° Fie punctul b din planul P, conjugat cu punctul a din același plan în raport cu cercul imaginar, adică situat pe polara punctului a în raport cu cercul. În aceste condiții, mijlocul p al segmentului ab va fi situat (cf. definiției polarei unui punct în raport cu cercul imaginar) pe axa radicală a punctului a și a cercului imaginar. Deoarece puterile punctului p — mijlocul segmentului ab — în raport cu fiecare dintre punctele a și b sînt egale, punctul p se află și el pe axa radicală a punctului b și a cercului imaginar. De aceea, punctul a este situat (iarăși conform definiției polarei unui punct în raport cu cercul imaginar) pe polara punctului b în raport cu cercul imaginar. Așadar, *dacă punctul b este conjugat cu a în raport cu cercul imaginar, atunci și punctul a este conjugat cu b în raport cu același cerc.*

Deoarece puterea punctului p în raport cu cercul imaginar este, în virtutea celor arătate, $pa^2 = pb^2$, rezultă că și puterea punctului p în raport cu fiecare dintre sferele S este egală cu aceeași mărime. Prin urmare, sfera Σ, avînd ca diametru segmentul ab, este ortogonală la toate sferele S. Să presupunem că un plan arbitrar, care trece prin dreapta ab, intersectează sferele date după cercuri C, iar sfera $\sum$ după cercul Γ; cercul Γ, avînd ca diametru segmentul ab, va fi ortogonal, după cum se vede ușor, la toate cercurile C. Aceasta arată că *punctele a și b sînt conjugate armonic* (în sensul ex. 921) în raport cu punctele de intersecție imaginare ale dreptei ab cu cercurile C, adică *în raport cu punctele de intersecție ale dreptei ab cu cercul imaginar.*

3° Fiecare punct al planului P este centrul unei sfere $\sum$, ortogonală la toate sferele S (**457**); toate aceste sfere ortogonale Σ intersectează linia centrelor sferelor S în punctele lor limită s și s'. De aici rezultă că centrul o al cercului imaginar are, în raport cu toate sferele ortogonale $\sum$, o aceeași putere $h = -os^2$.

Dacă acum punctele a și b sînt unul inversul celuilalt în raport cu cercul imaginar, atunci toate cercurile Γ din planul P care trec prin a și b intersectează cercul imaginar sub un unghi drept, adică sînt cercuri mari ale sferelor Σ, ortogonale la toate sferele S. Prin urmare, centrul O al cercului

Scanned with OKEN Scanner

imaginar are, în raport cu toate aceste cercuri Γ, aceeași putere, egală cu h. Așadar, punctul O este situat pe axa radicală ab a cercurilor Γ și satisface condiția $Oa \cdot Ob = h$. *Inversiunea de pol O și de putere h transformă unul în celălalt punctele a și b.*

4° Rezultă din faptul că punctul comun a două din trei axe radicale are aceeași putere în raport cu toate trei cercurile și se află, de aceea, pe a treia axă radicală (v. nr. **139**). În aceste condiții, nu facem nici un fel de ipoteze în legătură cu natura reală sau imaginară a fiecăruia dintre cercurile date.

Din acest raționament, mai rezultă că, dacă două dintre cele trei axe radicale coincid, atunci și a treia coincide cu primele două.

5° Centrul cercului dat, real sau imaginar, are aceeași putere în raport cu toate cercurile reale, ortogonale la cercul dat.

Dacă cercul dat este real, propoziția este evidentă. Dacă însă cercul dat este imaginar, propoziția reiese din cele arătate la 3°: puterea centrului O al unui cerc imaginar dat în raport cu orice cerc real ortogonal la el a fost notată acolo cu h.

Tot astfel, centrul unui cerc real dat are aceeași putere în raport cu toate cercurile reale sau imaginare, ortogonale la el.

În adevăr, centrul unui cerc real dat are, în raport cu fiecare alt cerc real ortogonal la el, aceeași putere, egală cu pătratul razei cercului dat. Folosind definiția ortogonalității unui cerc real cu unul imaginar, se poate arăta ușor că această proprietate subsistă și în cazul cînd al doilea cerc este imaginar.

Fie date acum două cercuri O_1 și O_2, fiecare dintre ele putînd fi real sau imaginar. Punctul O_1 are aceeași putere în raport cu fiecare dintre cercurile ortogonale la cele două cercuri date, iar punctul O_2 va avea aceeași proprietate. Prin urmare, dreapta O_1O_2 este axa radicală comună a tuturor cercurilor reale, ortogonale la O_1 și la O_2. Aceste din urmă cercuri pot intersecta dreapta O_1O_2 în aceleași puncte reale, în particular, ele pot să fie tangente la ea într-un punct real (nr. **137**), sau să o intersecteze în două puncte imaginare conjugate (ex. 921).

6° În cazul cînd cele două cercuri date sînt reale, propoziția a fost demonstrată (**673**).

Fie acum unul dintre cele două cercuri date situate pe sfera dată S, imaginar și definit ca linie de intersecție a acestei sfere cu o a doua sferă dată S', și fie celălalt cerc C real. Deoarece cele două cercuri sînt ortogonale, ultimul cerc C va fi linia de intersecție a sferei S cu o sferă Σ, ortogonală la sferele S și S'.

O inversiune arbitrară transformă sferele S, S' și Σ în sferele s, s' și σ (unele dintre ele pot fi și plane), iar cercul C în linia de intersecție c a sferelor s și σ. Deoarece sfera σ este ortogonală la sferele s și s', cercul c va fi ortogonal (prin definiție) la cercul imaginar după care se intersectează sferele s și s'.

7°. În cazul cînd cele două cercuri date sînt reale, propoziția a fost demonstrată (**452** *bis*).

Să presupunem acum că unul dintre cele două cercuri date pe sfera dată S este imaginar și definit ca intersecție a acesteia cu un plan dat P, iar celălalt cerc C este real. Dat fiind că cele două cercuri sînt ortogonale, cercul C

va fi intersecția sferei S cu o sferă Σ, ortogonală la sfera S și intersectînd planul P sub un unghi drept. Centrul Ω al sferei Σ este situat, evident, în planul P; totodată, punctul Ω, ca centru al sferei Σ, care este ortogonală la sfera S și trece prin cercul C, este vîrful conului circumscris sferei S și tangent la ea în lungul cercului C, adică polul planului cercului C. Deoarece polul Ω al planului cercului C în raport cu sfera dată se situează în planul P al cercului imaginar, *planele celor două cercuri sînt conjugate în raport cu sfera.*

Se demonstrează ușor, reluînd aceleași raționamente în ordinea inversă, următoarea reciprocă:

Dacă planele a două cercuri de pe aceeași sferă sînt conjugate în raport cu sfera atunci cercurile sînt ortogonale.

8° Dacă un cerc Γ, situat pe o sferă dată, intersectează sub un unghi drept două cercuri date C_1 și C_2, atunci planul cercului Γ este conjugat în raport cu sfera dată (cf. celor de la 7°) cu planul cercului C_1 și cu planul cercului C_2. Prin urmare, planul cercului Γ va fi conjugat în raport cu sfera dată și cu orice plan P care trece prin intersecția planelor cercurilor C_1 și C_2 (sau este paralel cu acestea). De aceea, cercul Γ va fi ortogonal la curba de intersecție a fiecărui plan P cu sfera dată (în virtutea propoziției reciproce de mai sus). În aceste condiții, nu facem nici un fel de ipoteze în legătură cu natura reală sau imaginară a fiecăruia dintre cercurile considerate.

988. Fie punctul b din planul P conjugat cu punctul a al aceluiași plan în raport cu un cerc imaginar dat, adică situat pe polara punctului a în raport cu acest cerc. Atunci mijlocul p al segmentului ab se află (cf. definiției polarei unui punct în raport cu un cerc imaginar; compară cu ex. 987) pe axa radicală a punctului a și a cercului imaginar, de unde, avem $pa^2 = ps^2$. Deoarece avem totodată $pa = pb$, rezultă că $pb^2 = ps^2$. Această din urmă egalitate ne arată că punctul p este situat de asemenea pe axa radicală a punctului b și a cercului imaginar, de unde rezultă că punctul a se află pe polara punctului b în raport cu cercul imaginar, astfel că și *punctul a este conjugat cu punctul b.* Dat fiind că, în aceste condiții, avem $pa = pb = ps$, unghiul asb va fi drept. Așadar, *dacă punctele a și b sînt conjugate în raport cu un cerc imaginar, atunci unghiul asb este drept.* Reciproca se demonstrează în același mod.

Deoarece fiecărui punct b conjugat cu a, îi corespunde un unghi asb drept, polara punctului a în raport cu cercul imaginar este situată în planul care trece prin punctul s și este perpendicular pe dreapta sa, adică este intersecția acestui plan cu planul P.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL IV

989. Noțiunea de triunghi sferic polar (377) și proprietățile lui se extind, după cum urmează, la poligoanele sferice convexe.

Fie dat un poligon sferic convex, să zicem pentagonul convex $ABCDE$ (toate celelalte raționamente nu depind de numărul de vîrfuri). Fie A' acela dintre polii cercului mare AB care se află în raport cu el în aceeași emisferă ca și poligonul dat; B' polul cercului mare BC care se găsește în raport cu el în aceeași emisferă ca și poligonul dat; ... ; în sfîrșit, E' polul cercului mare

EA care se află în raport cu el în aceaași emisferă ca și poligonul dat. Poligonul sferic $A'B'C'D'E'$ se numește *polarul* poligonului $ABCDE$.

Poligoanele sferice polare se bucură de următoarele proprietăți (compară cu nr. **377**).

I. *Poligonul polar unui poligon sferic convex este de asemenea convex.*

Pentru a demonstra această propoziție, vom observa în prealabil următoarele. Deoarece polul A' al cercului mare AB este situat în raport cu acesta în aceeași emisferă ca și punctele C, D și E, rezultă că fiecare dintre arcele $A'C'$, $A'D$ și $A'E$ este mai mic decît un sfert de cerc mare (**377**, lema I). Dintr-un motiv analog, va fi mai mic decît un sfert de cerc mare și fiecare dintre arcele $B'D$, $B'E$, $B'A$, $C'E$, $C'A$, $C'B$, $D'A$, $D'B$, $D'C$, $E'B$, $E'C$ și $E'D$.

Să arătăm acum că punctele C', D' și E' sînt situate în aceeași emisferă în raport cu cercul mare $A'B'$. Deoarece punctul A' este pol al cercului mare AB, iar punctul B' pol al cercului mare BC, fiecare dintre arcele $A'B$ și $B'B$ va fi egal cu un sfert de cerc mare, astfel că punctul B este polul cercului mare $A'B'$. Deoarece fiecare dintre distanțele sferice $C'B$, $D'B$ și $E'B$ ale punctelor C', D' și E' la polul B al cercului mare $A'B'$ este mai mică decît un sfert de cerc mare (cf. celor demonstrate), aceste trei puncte se situează în aceeași emisferă față de cercul mare $A'B'$. În același mod arătăm că punctele D', E' și A' se situează în aceeași emisferă în raport cu cercul mare $B'C'$ etc. Aceasta arată că poligonul $A'B'C'D'E'$ este convex.

II. *Dacă dintre două poligoane sferice convexe date, unul este polarul celui de-al doilea, atunci, și reciproc, acesta din urmă va fi polarul celui dintîi.*

În adevăr, fie $A'B'C'D'E'$ poligonul polar lui $ABCDE$, ca mai sus. Am demonstrat (v. demonstrația propoziției I) că punctul B este polul cercului mare $A'B'$ și că fiecare dintre arcele $C'B$, $D'B$ și $E'B$ este mai mic decît un sfert de cerc mare. Acest din urmă fapt ne arată că polul B al cercului mare $A'B'$ este situat în aceeași emisferă față de acesta ca și vîrfurile C', D' și E' ale poligonului $A'B'C'D'E'$. În același mod, demonstrăm, mai departe, că C este polul cercului mare $B'C'$, situat în raport cu el în aceeași emisferă ca și poligonul $A'B'C'D'E'$ etc. Aceasta demonstrează că poligonul $ABCDE$ este polarul lui $A'B'C'D'E'$.

III. *Dacă două poligoane sferice convexe sînt unul polarul celuilalt, atunci fiecare dintre laturile unuia este suplementul unghiului care îi corespunde în celălalt.*

În adevăr, punctele A' și B', care sînt vîrfuri ale celui de-al doilea poligon $A'B'C'D'E'$, sînt totodată poli ai laturilor AB și BC ale primului poligon $ABCDE$, dispuși în raport cu laturile unghiului ABC așa cum se arată în ipoteza lemei II de la nr. **377**. De aceea, arcul $A'B'$ este suplementul unghiului ABC, iar aceasta are loc și pentru celelalte laturi și unghiuri.

Să găsim acum *dependența dintre aria poligonului sferic convex $ABCDE$ și perimetrul polarului său $A'B'C'D'E'$*.

Conform sistemului de unități adoptat, aria poligonului $ABCDE$ se exprimă prin numărul (**534**, Cor.):

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} - 3\pi.$$

Evident, acest număr se mai poate scrie

$$2\pi - (\pi - \hat{A}) - (\pi - \hat{B}) - \ldots - (\pi - \hat{E}).$$

Însă numerele $\pi - \hat{A}$, $\pi - \hat{B}$, ... sînt, în sistemul de unități adoptat, lungimile laturilor $E'A'$, $A'B'$, ... ale poligonului polar (compară cu propoziția III). De aici rezultă că aria poligonului $ABCDE$ este egală cu diferența dintre 2π și perimetrul poligonului $A'B'C'D'E'$.

990. Unghiurile triunghiului sferic dat se exprimă în radiani prin numerele $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{\pi}{4}$. Prin urmare, aria triunghiului considerat se exprimă, în sistemul de unități adoptat în text, prin numărul (**695**) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{12}$, iar în metri pătrați, printr-un număr de o sută de ori mai mare (deoarece raza sferei este de 10 m). Așadar, aria triunghiului nostru sferic este egală cu $\frac{25}{3}\pi$ m² sau cu 26,18 m².

991. Pentru a deduce teorema lui Lexell (**697**) din rezultatele exercițiului 493, vom păstra notațiile adoptate acolo (compară cu fig. 64) și vom considera triunghiurile $P'Q'R'$, polare în raport cu triunghiurile PQR, considerate acolo. Vîrful comun Q' al tuturor acestor triunghiuri va fi polul cercului mare PN, care se află în raport cu acesta în aceeași emisferă ca și cercul mic C. Analog, se definește și vîrful comun R' al tuturor triunghiurilor $P'Q'R'$. Dar fiind că toate triunghiurile PQR au același perimetru, toate triunghiurile $P'Q'R'$ vor avea (cf. ultimei teoreme de la nr. **377**) aceeași sumă a unghiurilor, deci (**695**) și aceeași arie. În sfîrșit, punctele P' sînt situate în aceeași emisferă în raport cu cercul mare $Q'R'$, anume în aceeași în care se află și punctul P, deoarece triunghiul PQR este polarul lui $P'Q'R'$.

Așadar, *triunghiurile $P'Q'R'$ considerate au două vîrfuri comune Q' și R' și aceeași arie, iar al treilea vîrf P' se află în raport cu cercul mare $Q'R'$ în aceeași emisferă*. Am obținut enunțul teoremei lui Lexell.

Deoarece semicercurile PMP_1 și PNP_1 pot fi alese arbitrar, iar perimetrul constant al triunghiului PQR rămîne de asemenea arbitrar (în baza libertății de a alege cercul mic C tangent la laturile biunghiului PMP_1N), rezultă că și punctele Q',R' și aria constantă a triunghiului $P'Q'R'$ pot fi considerate arbitrare.

Deoarece laturile QR ale triunghiului PQR sînt tangente la un arc determinat MXN al cercului mic C, *polii P' ai cercurilor mari QR se situează pe un arc determinat al unui cerc mic C'* (compară cu ex. 488; de altfel, în cazul de față, cercul C' va fi diametral opus pe sferă cercului mic care, la ex. 488, fusese numit polarul lui C, dat fiind că punctul P' nu mai se află acum în aceeași emisferă cu C în raport cu cercul mare QR, ci ele se situează în emisfere diferite).

Dacă cercul mare QR va fi tangent la cercul mic în una dintre extremitățile M ale arcului dat MXN, adică dacă cercul mare QR va coincide cu PM, atunci omologul lui P' va fi diametral opus punctului R' (deoarece, în acest caz, punctul P' va fi polul cercului mare PM care se află în raport cu

acesta în *cealaltă* emisferă decît C, iar punctul R' va fi polul aceluiași cerc mare PM, situat în raport cu acesta în *aceeași* emisferă ca și C). Așadar, *arcul care este locul geometric al punctelor P' are ca una dintre extremități punctul diametral opus lui R'*. În virtutea unor considerații analoge, cealaltă extremitate a acestui arc va fi diametral opusă punctului Q'. Teorema lui Lexell este complet demonstrată.

992. Dacă triunghiurile MAB și MAC (fig. 249) au aceeași orientare, atunci punctele B și C se află pe aceeași emisferă în raport cu cercul mare

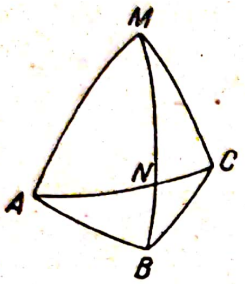


Fig. 249

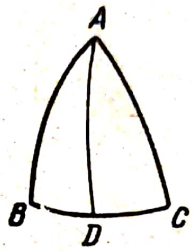


Fig. 250

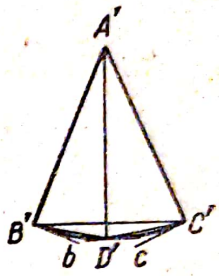


Fig. 251

AM. Deoarece triunghiurile MAB și MAC sînt echivalente, trebuie să se intersecteze laturile MB și MC sau laturile MC și AB (altfel, unul dintre triunghiuri s-ar situa în interiorul celuilalt). Să presupunem, pentru a fixa ideile, că laturile MB și AC se intersectează într-un punct N.

În virtutea echivalenței triunghiurilor MAB și MAC, vor fi evident echivalente și triunghiurile ABN și MNC, deci și triunghiurile ABC și MBC. Locul geometric al punctelor M se definește după teorema lui Lexell și este unul dintre cele două arce despre care este vorba în această teoremă, deoarece arcul BM intersectează pe AC. Am obține același arc, presupunînd că nu are loc intersecția arcelor MB și AC, ci a arcelor MC și AB.

993. Să începem prin a rezolva următoarea problemă:

I. *Să se împartă un triunghi sferic dat ABC, printr-un arc de cerc mare dus din vîrful A, în două părți echivalente.*

Să admitem că punctul D de pe latura BC a triunghiului sferic dat ABC (fig. 250) are proprietatea că triunghiurile sferice ABD și ACD sînt echivalente. Proiecția stereografică avînd centrul în punctul P diametral opus punctului A, transformă arcele AB, AC și AD în segmentele rectilinii $A'B'$, $A'C'$ și $A'D'$ (fig. 251), iar arcul BDC în arcul de cerc $B'D'C'$. Unghiurile triunghiurilor plane *curbilinii* $A'B'D'$ și $A'C'D'$ vor fi respectiv egale cu unghiurile triunghiurilor sferice ABD și ACD. Deoarece însă aceste din urmă triunghiuri sînt echivalente, vor fi egale și excesurile lor sferice. Prin urmare, excesul sumei unghiurilor față de 2 dr, în triunghiul plan curbiliniu $A'B'D'$, adică dublul unghiului $D'B'b$, unde $B'b$ este tangenta în punctul B' la arcul $B'D'C'$, este egal cu dublul unghiului analog $D'C'c$. Din egalitatea unghiurilor $D'B'b$ și $D'C'c$, rezultă egalitatea arcelor $D'B'$ și $D'C'$.

De aici rezultă și metoda de rezolvare a problemei noastre, care se reduce la următoarele: punctul D de pe sferă coincide, în proiecția stereografică considerată, cu mijlocul D' al arcului $B'C'$ în plan.

Repetînd de p ori consecutiv această construcție, adică împărțind arcul $B'C'$ în plan în 2^p părți egale, ajungem la rezolvarea următoarei probleme:

II. *Să se împartă un triunghi sferic dat, prin arce de cerc mare duse din unul dintre vîrfurile sale, în 2^p părți echivalente.*

Să studiem acum următoarea generalizare a problemei I:

III. *Să se împartă un triunghi sferic dat ABC, printr-un arc de cerc mare dus din vîrful A, în două părți avînd diferența ariilor egală cu o mărime cunoscută.*

Deoarece aria unui triunghi sferic este complet determinată de excesul său sferic, această din urmă problemă mai poate fi enunțată și astfel:

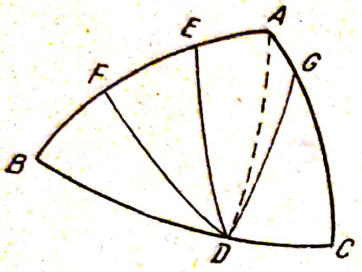


Fig. 252

IIIa. *Să se afle, pe latura BC a unui triunghi sferic dat ABC, un punct D astfel ca diferența exceselor sferice ale triunghiurilor ABD și ACD să fie egală cu un unghi dat ε.*

Reluînd raționamentele de mai sus (cele de la soluția problemei I), sîntem conduși să construim pe arcul $B'C'$ în plan punctul D', care satisface condiția $2\widehat{D'B'b} - 2\widehat{D'C'c} = \varepsilon$. Altfel spus, pe arcul $B'C'$, trebuie să construim un punct D' astfel ca diferența arcelor $B'D'$ și $C'D'$ (exprimate în radiani) să fie egală cu ε. Metoda pentru construcția unui astfel de punct D' este evidentă.

Să trecem, mai departe, la rezolvarea următoarei probleme:

IV. *Să se împartă un triunghi sferic dat ABC, printr-un arc de cerc mare dus dintr-un punct D al laturii BC, în două părți echivalente.*

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că aria triunghiului sferic ABD este mai mare decît aria triunghiului sferic ACD (fig. 252), adică extremitatea E a arcului căutat DE este situată pe latura AB (și nu pe latura AC) a triunghiului dat. În acest caz, arcul căutat DE, dus din vîrful D al triunghiului ABD, îl împarte pe acesta în două părți avînd diferența ariilor evident egală cu aria triunghiului ACD. Ajungem astfel din nou la problema III, de care ne-am ocupat înainte.

Să trecem, în sfîrșit, la problema noastră:

V. *Să se împartă un triunghi sferic dat ABC, prin arce de cerc mare duse dintr-un punct dat D al laturii BC, în 2^p părți echivalente.*

Să construim (problema IV) arcul DE, care împarte aria triunghiului ABC în două porțiuni echivalente, și să presupunem, iarăși pentru a fixa ideile, că punctul E este situat pe latura AB. Pentru a împărți acum aria triunghiului ABC în patru părți echivalente, trebuie să tăiem triunghiul BDE, prin arcul DF, în două părți echivalente (problema I), precum și patrulaterul $AEDC$, prin arcul DG, în două părți echivalente.

Trecem la această din urmă construcție. Dacă vom presupune că aria triunghiului ADC este mai mare decît aria triunghiului ADE, atunci problema se va reduce la împărțirea ariei triunghiului ADC, prin arcul DG, în două porțiuni avînd diferența ariilor egală cu aria triunghiului ADE (problema III).

Continuînd în același mod, vom rezolva problema pentru orice valoare a lui p.

Menționăm că, pentru rezolvarea acestei din urmă probleme, este suficientă *o singură* proiecție stereografică, având centrul în punctul diametral opus punctului dat D.

Observație. Soluțiile de mai sus necesită efectuarea unor construcții pe sferă și în plan (compară cu ex. 974). Putem obține însă din ele alte soluții, care cer doar construcții pe sferă. Este suficient să indicăm astfel de soluții pentru problemele I și III sau IIIa, deoarece toate celelalte probleme considerate se reduc la acestea.

În cazul problemei I, tangenta în punctul D' la arcul $B'D'C'$ din plan este paralelă cu dreapta $B'C'$ (fig. 251). Prin urmare, pe sferă, cercul Γ, tangent în centrul proiec-

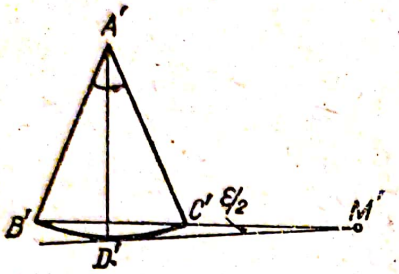


Fig. 253

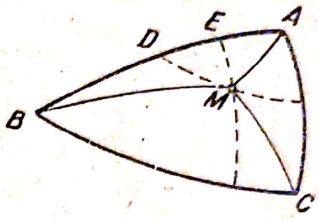


Fig. 254

ției stereografice, adică în punctul P diametral opus punctului A, la cercul PBC și, totodată, tangent la cercul mare BC, va fi tangent la acesta din urmă în punctul căutat D. Așadar, soluția problemei pe sferă se reduce la descrierea unui cerc prin punctele B, C și prin punctul P, diametral opus punctului A, și la construirea cercului Γ, care satisface condițiile enumerate mai sus (ex. 489, construcția r).

Analog, în cazul problemei III, tangenta în punctul D' la arcul $B'D'C'$ în plan intersectează dreapta $B'C'$ sub unghiul $B'M'D'$, egal cu $\frac{1}{2}\varepsilon$ (nr. **76**, Obs.) și având cu unghiul $B'A'C'$ același sens (fig. 253). Prin urmare, vom avea pe sferă un cerc Γ, care nu mai este tangent în punctul P la cercul PBC, ci îl intersectează în acest punct, sub un unghi egal cu $\frac{1}{2}\varepsilon$, și care rămîne, totodată, tangent la cercul mare BC, în punctul căutat D; în acest caz, unghiul dintre cercul PBC și cercul Γ va trebui să aibă, în punctul M, avînd ca proiecție punctul M', același sens ca și unghiul BAC, deci unghiul dintre aceleași cercuri în punctul P va avea sensul opus sensului unghiului BAC (construcția unui astfel de cerc se reduce iarăși la ex. 489, construcția r).

994. Fie de aflat, în interiorul unui triunghi sferic dat ABC, un punct M (fig. 254), astfel ca

$$\text{aria } MBC = 2 \text{ aria } MCA = 2 \text{ aria } MAB.$$

În aceste condiții, vom avea

$$\text{aria } MBC = \frac{1}{2} \text{ aria } ABC \tag{1}$$

și

$$\text{aria } MCA = \frac{1}{4} \text{ aria } ABC. \tag{2}$$

În virtutea teoremei lui Lexell (**697**), locul geometric al punctelor M, care satisfac condiția (1) și care sînt interioare triunghiului ABC, este un arc de cerc mic. Evident, acesta poate fi construit în modul următor. Construim pe latura AB a triunghiului ABC un punct D, astfel ca arcul CD să-l împartă

în două porțiuni echivalente (compară cu soluția ex. 993), și ducem un cerc mic prin punctul D și prin punctele diametral opuse punctelor B și C.

Tot astfel, locul geometric al punctelor M, care satisfac condiția (2) și sînt interioare triunghiului ABC, este un arc de cerc mic. Acesta din urmă poate fi construit în mod analog cu cele arătate mai sus, găsind pe latura AB un punct E, astfel ca aria $ACE = \frac{1}{4}$ aria ABC, și ducînd un cerc mic prin punctul E și prin punctele diametral opuse punctelor C și A.

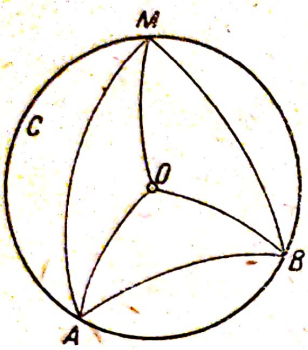


Fig. 255

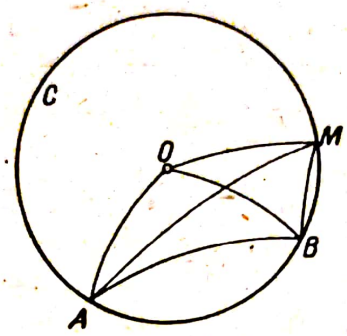


Fig. 256

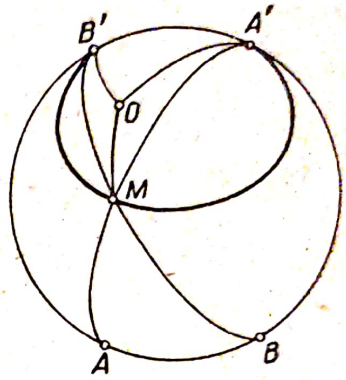


Fig. 257

Punctul M căutat este intersecția celor două locuri geometrice construite.

995. Fie C cercul dat (fig. 255 și 256), O polul său, A și B două puncte date pe acest cerc și M punctul căutat pe același cerc. Să notăm unghiurile OAB și AMB, date pe sferă, respectiv cu α și cu φ. În aceste condiții, suma unghiurilor triunghiului sferic AMB va fi egală cu $2\alpha + 2\varphi$, după cum rezultă din egalitatea unghiurilor de la bază în fiecare dintre triunghiurile isoscele OAB, OAM și OBM. Această expresie pentru suma unghiurilor va fi valabilă, atît în cazul cînd punctul O este interior triunghiului MAB (fig. 255), cît și în cazul cînd îi este exterior (fig. 256). Deoarece suma unghiurilor triunghiului ABM trebuie să aibă o anumită valoare $2\alpha + 2\varphi$, înseamnă că și aria sa trebuie să aibă o mărime perfect determinată. Prin urmare, punctul M trebuie să se situeze (cf. teoremei lui Lexell) pe unul dintre cele două arce perfect determinate avînd ca extremități punctele diametral opuse lui A și B. Punctele de intersecție ale acestor două arce cu cercul C vor fi cele căutate.

Pentru a construi acum aceste puncte căutate, este suficient, conform celor arătate mai sus, să rezolvăm următoarea problemă:

Să se construiacă locul geometric al punctelor M care formează cu punctele date A și B un triunghi sferic MAB avînd suma unghiurilor dată (sau, ceea ce este același lucru, aria dată).

După cum am mai menționat, locul geometric căutat al punctelor M este format din două arce de cerc mic, avînd ca extremități comune punctele A' și B', diametral opuse punctelor A și B. Dacă O este polul unuia dintre aceste cercuri mici (fig. 257), vom avea (**696**)

$$\widehat{B'A'O} = \frac{1}{2}(\widehat{B'A'M} + \widehat{MB'A'} - \widehat{A'MB'}) = \frac{1}{2}(2\text{dr} - \widehat{BAM} + 2\text{dr} - \widehat{MBA} - \widehat{AMB}) = 2\text{ dr} - \frac{1}{2}(\widehat{BAM} + \widehat{MBA} + \widehat{AMB}).$$

Așadar, cunoaștem unghiurile egale $B'A'O$ și $A'B'O$, și punctul O poate fi construit.

Dacă unghiul $B'A'O$, determinat ca mai sus, va fi negativ, aceasta înseamnă că centrul O al fiecăruia dintre arcele care formează locul geometric căutat se află, față de cercul mare AB, de cealaltă parte decît arcul respectiv.

996. Pentru a construi un triunghi sferic cunoscînd o latură sau un unghi, o înălțime și arie, trebuie să considerăm patru cazuri diferite, și anume:

1° Se dau o latură, înălțimea care îi corespunde și aria.

2° Se dau o latură, înălțimea corespunzătoare unei alte laturi și aria.

3° Se dau un unghi, înălțimea dusă din vîrful acestui unghi și aria.

4° Se dau un unghi, înălțimeaa dusă din vîrful altui unghi și aria.

Aici va trebui să înțelegem prin înălțimea (în sens de lungimea înălțimii; compară și ex. 483,1°) unui triunghi sferic distanța sferică (384) de la vîrf pînă la cercul mare care trece prin celelalte două vîrfuri; înălțimea astfel definită a triunghiului nu va fi mai mare decît un sfert de cerc mare.

Să studiem pe rînd aceste patru cazuri.

1° Fie date latura $BC = a$ a triunghiului căutat ABC, înălțimea h_a, coborîtă pe ea, și aria, exprimată, pentru a fixa ideile, prin excesul sferic ε.

Construim arcul BC, egal cu latura a dată a triunghiului căutat (fig, 258, efectuată în proiecție stereografică pe planul cercului mare BC), și punctele B' și C', diametral opuse punctelor B și C. Mai departe, construim locul geometric al celui de-al treilea vîrf A al triunghiurilor avînd baza dată BC și aria dată, adică excesul sferic ε dat (compară cu soluția ex. 995). În sfîrșit, mai construim locul geometric al vîrfurilor A ale triunghiurilor avînd ca bază arcul BC și înălțimea coborîtă pe latura BC egală cu h_a. Acest din urmă loc geometric este format, evident, din două cercuri mici avînd polii comuni cu cercul mare BC și raza sferică egală cu $d - h_a$. Vîrful A al triunghiului căutat va fi unul dintre punctele de intersecție ale celor două locuri geometrice.

La construirea acestor locuri geometrice, este suficient să construim *unul* dintre cele două arce care formează primul loc geometric și *unul* dintre cele două cercuri mici care formează cel de-al doilea loc geometric, alegînd astfel acest arc și acest cerc mic, încît ele să se afle în aceeași emisferă față de cercul mare BC; al doilea arc și al doilea cerc mic nu duc la soluții noi.

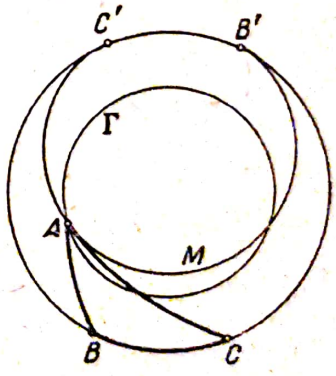


Fig. 258

Numărul maxim de soluții: una (dacă vom considera cele două triunghiuri simetrice ca pe o singură soluție, așa cum am procedat la soluția ex. 489, construcția g și următoarele; v. fig. 258).

2° Fie date latura $BC = a$ a triunghiului căutat ABC, înălțimea $BH = h_b$, coborîtă pe latura AC, și aria sau excesul sferic ε.

Să construim, ca și în primul caz, arcul BC, egal cu latura dată a a triunghiului căutat (fig. 259, efectuată în proiecție stereografică pe planul cercului mare BC), punctele B' și C', diametral opuse punctelor B și C, și locul geometric al celui de-al treilea vîrf A al triunghiurilor avînd aceeași bază și aceeași arie. Mai departe, construim triunghiul dreptunghic BCH, cunoscînd

ipotenuza BC și cateta BH, egală cu înălțimea dată h_b a triunghiului căutat (ex. 489, construcția k). Dintre cele două triunghiuri dreptunghice care satisfac aceste condiții, este suficient să construim un triunghi BCH, deoarece al doilea triunghi, simetricul lui BCH în raport cu cercul mare BC, nu duce la soluții noi (dacă, așa cum procedăm, considerăm că două triunghiuri simetrice sînt o singură soluție). Vîrful A al triunghiului căutat va fi punctul de intersecție al cercului mare CH cu locul geometric construit mai sus.

Numărul maxim de soluții este două (una dintre ele, triunghiul ABC, este reprezentată în fig. 259; a doua, în general distinctă de prima, se obține prin intersectarea cercului mare CH cu arcul simetric lui $B'AC'$ în raport cu cercul mare BC și care face parte din locul geometric considerat).

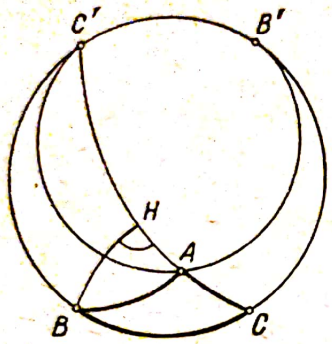


Fig. 259

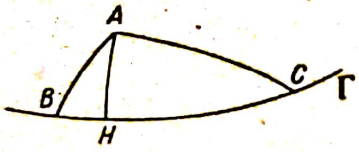


Fig. 260

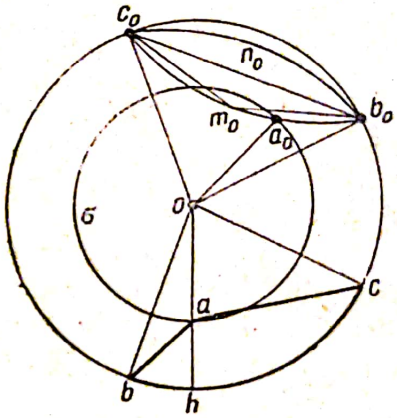


Fig. 261

3° Fie date unghiul α cu vîrful în vîrful A al triunghiului căutat ABC (fig. 260), înălțimea sa $AH = h_a$ și aria, determinată, pentru a fixa ideile, prin excesul sferic ε. Putem considera ca fiind date punctele A și H și cercul mare Γ, pe care trebuie să se afle vîrfurile căutate B și C ale triunghiului.

Efectuăm o proiecție stereografică asupra triunghiului ABC, luînd ca centru de proiecție punctul A', diametral opus lui A. Proiecțiile stereografice ale punctelor și ale cercurilor sferei vor fi notate cu aceleași litere ca și punctele și cercurile respective, însă cu minuscule.

Ajungem astfel la următoarea problemă în planul de proiecție (fig. 261).

Se dau cercul γ și un punct a, situat în interiorul acestui cerc; să se afle pe acest cerc două puncte b și c, astfel ca unghiul bac să fie egal cu un unghi dat α, iar suma unghiurilor triunghiului curbiliniu abc, format de segmentele ab și ac și de arcul bc al cercului γ, să fie egal cu $2\text{dr} + \varepsilon$, *unde ε este un unghi dat.*

Rezolvînd problema în plan, rezolvăm totodată și problema noastră pentru sferă: punctele B și C vor fi punctele sferei, ale căror proiecții stereografice sînt punctele b și c.

Trecem la rezolvarea problemei enunțate mai sus. Deoarece suma unghiurilor triunghiului curbiliniu abc este egală cu $2\text{dr} + \varepsilon$, coarda bc formează

cu arcul bc al cercului dat γ unghiului $\frac{1}{2}\varepsilon$, și acest unghi caracterizează complet lungimea coardei bc. De aici rezultă următoarea construcție:

a) Printr-un punct arbitrar b_0 al cercului dat γ, ducem o dreaptă care intersectează acest cerc sub un unghi $\frac{1}{2}\varepsilon$ și notăm cu c_0 al doilea punct de intersecție al dreptei astfel construite cu cercul γ.

b) Construim arcul $b_0m_0c_0$, din ale cărui puncte segmentul b_0c_0 se vede sub un unghi egal cu α. În acest scop, este suficient, de exemplu, să ducem prin punctele b_0 și c_0 drepte care formează cu coarda b_0c_0 unghiuri egale cu $\mathrm{dr} - \frac{1}{2}\alpha$ și să ducem arcul $b_0m_0c_0$ prin punctul de intersecție m_0 al acestor drepte. În mod analog, construim arcul $b_0n_0c_0$, simetricul lui $b_0m_0c_0$ în raport cu coarda b_0c_0.

c) Construim cercul σ, concentric cu γ și trecînd prin punctul a, și nătăm cu a_0 unul dintre punctele sale de intersecție cu arcul $b_0m_0c_0$ sau cu arcul $b_0n_0c_0$.

d) „Întoarcem" arcele $b_0m_0c_0$ și $b_0n_0c_0$ în jurul centrului o al cercului γ, astfel ca punctul a_0 să coincidă cu a; noua poziție a punctelor b_0 și c_0 va determina poziția punctelor b și c. Pentru a realiza această rotație, construim dreptele oa_0, ob_0, oc_0 și oa și ducem prin punctul o semidreapta ob, care formează cu dreapta oa, în punctul o, unghiul aob, egal cu unghiul a_0ob_0 și avînd același sens cu el. Punctul de intersecție al semidreptei astfel construite cu cercul γ va fi punctul b căutat. Analog se construiesc semidreapta oc și punctul c.

Dacă cercul σ taie arcul $b_0m_0c_0$ în două puncte, atunci vom obține două triunghiuri curbilinii abc, evident simetrice în raport cu dreapta oa; pe sferă, le vor corespunde două triunghiuri sferice ABC, simetrice în raport cu cercul mare AH, pe care le considerăm drept o singură soluție. De aceea, numărul maxim de soluții este două (cîte o soluție corespunzînd arcelor $b_0m_0c_0$ și $b_0n_0c_0$.)

Dacă punctul a coincide cu o, problema va avea o infinitate de soluții pentru $\varepsilon = \alpha$ și nu va avea soluții pentru $\varepsilon \neq \alpha$. Triunghiul sferic corespunzător ABC va avea înălțimea AH, deci și laturile AB și AC egale cu un sfert de cerc mare și va exista numai în condiția ca $\varepsilon = \alpha$.

Observație. Soluția de mai sus necesită efectuarea unor construcții pe sferă și în plan (v. ex. 974). Putem obține însă o soluție și cu ajutorul unor construcții numai pe sfera dată, dacă înlocuim construcțiile efectuate mai sus în planul de proiecție prin construcțiile corespunzătoare pe sferă. Soluția problemei se va prezenta astfel:

a) Prin punctul arbitrar B_0 al cercului mare Γ și prin centrul de proiecție, adică prin punctul A', diametral opus lui A, ducem un cerc care taie pe Γ sub un unghi egal cu $\frac{1}{2}\varepsilon$, și notăm cu C_0 cel de-al doilea punct de intersecție al cercului astfel construit cu cercul Γ.

a) Ducem prin punctul A' și respectiv prin punctele B_0 și C_0 cîte două cercuri care formează cu cercul $A'B_0C_0$ unghiuri egale cu $\mathrm{dr} - \frac{1}{2}\varepsilon$, și notăm cu M_0 și cu N_0 punctele lor de intersecție; construim arcele $B_0M_0C_0$ și $B_0N_0C_0$.

b) Găsim al doilea punct comun O al tuturor cercurilor (pentru construcție, este suficient a numai două cercuri) care trec prin A' și sînt ortogonale la Γ; ducem prin

punctul A cercul Σ, ortogonal la toate cercurile (pentru construcție, este suficient numai la două) care trec prin punctele O și A'; notăm cu A_0 unul dintre punctele de intersecție ale cercului Σ cu arcul $B_0M_0C_0$ sau cu arcul $B_0N_0C_0$.

d) Construim cercurile OA_0A', OB_0A', OC_0A' și OAA' și ducem prin punctele A' și O arcul de cerc OBA', care formează cu semicercul $A'OA$, în punctul O, unghiul AOB, egal cu unghiul A_0OB_0 și avînd același sens. Punctul de intersecție al arcului astfel construit cu cercul mare Γ va fi tocmai punctul căutat B. În mod analog, construim arcul OCA' și punctul C.

4° În sfîrșit, fie date unghiul cu vîrful în C al triunghiului căutat ABC, înălțimea sa h_b, dusă din vîrful B, și aria.

Construim triunghiul dreptunghic BCH (fig. 259) cunoscînd cateta $BH = h_b$ și unghiul opus cu vîrful în C (compară soluția ex. 489, construcția *f*) și punctele B' și C' diametral opuse vîrfurilor B și C. Construcția se încheie ca la 2°.

997. La rezolvarea acestei probleme va trebui să deosebim două cazuri, după cum sînt date

1° o latură sau

2° un unghi

din triunghiul sferic.

1° Fie date latura $BC = a$ și înălțimea h_a din triunghiul ABC. Păstrăm toate notațiile adoptate în soluția exercițiului 996, 1° (fig. 258). Aria triunghiului ABC va fi, evident, cu atît mai mică cu cît arcul $B'MC'$ se apropie „mai mult" de arcul BC. De aici rezultă imediat că valorile maximă și minimă pentru aria triunghiului corespund cazurilor cînd arcul $B'MC'$ este tangent la cercul mic Γ, despre care a fost vorba în soluția exercițiului 996 1°. Într-un caz și în celălalt, triunghiul ABC va fi evident isoscel.

Punctul de contact al cercului mic Γ cu arcul $B'MC'$, dacă acesta este tangent la cercul Γ, se află pe cercul mare care trece prin mijlocul arcului BC și este perpendicular pe el. Metoda pentru construcția triunghiului ABC, de arie maximă sau minimă, este evidentă.

2° În acest caz, va trebui să recurgem la următoarele două proprietăți ale triunghiurilor sferice polare.

I. *Înălțimea triunghiului polar unui triunghi dat este egală cu înălțimea omoloagă din triunghiul dat.*

Această proprietate rezultă ușor din examinarea fig. 71. În adevăr, fie M unul dintre vîrfurile triunghiului dat, MN înălțimea corespunzătoare, astfel că latura triunghiului opusă vîrfului M va fi un arc de cerc mare ANA'. În acest caz, vîrful triunghiului polar omolog cu vîrful M va fi punctul Q (deoarece punctul Q este polul ales în modul cuvenit al cercului mare ANA'). În același timp, latura triunghiului polar, opusă vîrfului Q, va fi un arc de cerc mare APA' (deoarece punctul M este polul acestui cerc mare). Deoarece arcul $QMNP$ este evident suplementul lui MN (avem $QMNP + MN = MP + QN = 2\text{dr}$), înălțimea triunghiului polar, dusă din vîrful Q, va fi egală cu MN; în adevăr, arcul $QMNP$ este cea mai mare dintre perpendicularele coborîte din vîrful Q pe baza APA', pe cînd înălțimea este egală cu cea mai mică dintre aceste perpendiculare.

II. *Cu cît este mai mare aria unui triunghi sferic dat, cu atît este mai mic perimetrul polarului său.*

Rezultă din exercițiul 989.

Fie acum de construit triunghiul $A'B'C'$, avînd unghiul din vîrful A' dat, înălțimea dusă din vîrful A' dată, astfel ca aria sa să fie maximă sau minimă. Dacă, în locul triunghiului căutat $A'B'C'$, vom construi întîi polarul său ABC și vom ține seama de proprietățile I și II ale triunghiurilor polare, vom fi conduși la următoarea problemă:

III. *Dintre toate triunghiurile sferice avînd baza dată și înălțimea dată, să se construiască cel cu suma celorlalte două laturi minimă sau maximă* (deoarece mărimea bazei este dată, putem considera suma acestor două laturi, în loc să luăm perimetrul minim sau maxim).

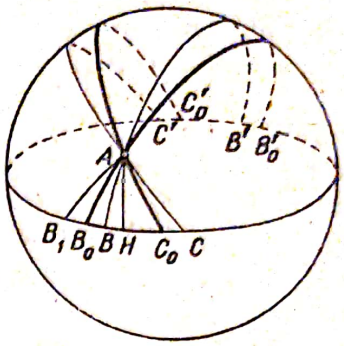


Fig. 262

Se pot construi fără dificultate două triunghiuri isoscele avînd baza și înălțimea date. Fie B_0C_0 baza dată (fig. 262), B_0' și C_0' diametral opuse punctelor B_0 și C_0. Dacă vom lua, pe cercul mare perpendicular pe arcul B_0C_0 și care trece prin mijlocul său H, arcul HA, egal cu înălțimea dată, vom obține cele două triunghiuri isoscele AB_0C_0 și $AB_0'C_0'$ despre care este vorba.

Cazul cînd înălțimea dată este egală cu un sfert de cerc mare nu prezintă interes (deoarece, în aceste condiții, avem $AB_0 = AC_0 = AH$); de aceea, vom presupune că arcul AH este mai mic decît un sfert de cerc mare. Deoarece fiecare dintre arcele egale HB_0 și HC_0 este de asemenea mai mic decît un sfert de cerc mare, arcele $AB_0 = AC_0$ vor fi și ele mai mici decît un sfert de cerc mare (**384**, Cor. II).

Să demonstrăm acum că *triunghiul sferic isoscel AB_0C_0 are suma laturilor egale mai mică decît orice alt triunghi ABC avînd aceeași înălțime AH și baza BC egală cu B_0C_0.*

Din egalitatea $B_0C_0 = BC$, avem $B_0B = C_0C$. Vom presupune inițial că B_0B este mai mic decît un sfert de cerc mare. Dacă vom lua acum pe prelungirea arcului HB_0 arcul B_0B_1, egal cu $B_0B = C_0C$, vom avea $AB_1 = AC$, în virtutea egalității triunghiurilor dreptunghice AHB_1 și AHC. Mediana AB_0 a triunghiului ABB_1 este mai mică decît un sfert de cerc mare; de aceea (ex. 486), avem $AB_0 < \frac{1}{2}(AB + AB_1)$, de unde $AB_0 + AC_0 = 2AB_0 < AB + AB_1 = AB + AC$.

Am presupus că arcul B_0B este mai mic decît un sfert de cerc mare. Dacă, însă, acest arc este egal cu un sfert de cerc mare sau mai mare, atunci figura mărginită de arcele AB, AB_1 și BB_0B_1 nu va mai fi un triunghi sferic, deoarece ultimul arc este egal cu un semicerc sau mai mare, și nu mai putem să ne bazăm pe proprietățile deduse mai sus ale triunghiurilor. În acest caz însă, am putea demonstra direct (luînd ca model soluția ex. 486) că inegalitatea $AB_0 < \frac{1}{2}(AB + AB_1)$ subsistă. După aceasta, demonstrația se încheie ca mai sus.

Să demonstrăm, mai departe, că *triunghiul sferic isoscel* $AB'_0C'_0$ *are suma laturilor egale mai mare decît orice alt triunghi* $AB'C'$ *avînd aceeași înălțime* AH *și baza* $B'C'$ *egală cu* $B'_0C'_0$.

În adevăr, dacă B și C sînt diametral opuse punctelor B' și C', avem evident $(AB' + AC') + (AB + AC) = (AB'_0 + AC'_0) + (AB_0 + AC_0)$, deoarece fiecare dintre cei doi membri este egal cu un cerc mare. Dat fiind că, potrivit celor demonstrate, avem $AB_0 + AC_0 < AB + AC$, rezultă de aici că $AB'_0 + AC'_0 > AB' + AC'$.

Așadar, am demonstrat pînă la urmă, că, dintre toate triunghiurile ABC, de bază și de înălțime date, triunghiurile isoscele au perimetrul minim și maxim. Revenind la triunghiurile $A'B'C'$, polarele triunghiurilor ABC, obținem următorul rezultat:

Dintre toate triunghiurile $A'B'C'$ *avînd un unghi dat în vîrful* A' *și înălțimea din acest vîrf dată, aria maximă și aria minimă revin triunghiurilor isoscele.*

Construirea acestor triunghiuri isoscele nu prezintă dificultăți.

998. La rezolvarea acestei probleme, va trebui să deosebim iarăși două cazuri, după cum se dă

1° baza sau

2° una dintre laturile egale

din triunghiul sferic isoscel.

1° Fie date baza $BC = a$ a triunghiului sferic isoscel ABC și aria sa.

Construim arcul $BC = a$, punctele B' și C', diametral opuse punctelor B și C, și locul geometric al celui de-al treilea vîrf A al triunghiurilor ABC, avînd baza comună BC și aria dată (compară cu soluția ex. 995); în aceste condiții, este suficient să construim unul dintre cele două arce avînd extremitățile în punctele B' și C' și făcînd parte din locul geometric căutat. Al treilea vîrf A al triunghiului căutat va fi, evident, punctul de intersecție al acestui arc cu cercul mare perpendicular prin mijlocul arcului BC. Problema are întotdeauna o soluție unică.

Problema triunghiului de arie maximă nu se pune în acest caz (aria triunghiului căutat poate lua, în aceste condiții, atît valori oricît de apropiate de zero, cît și valori oricît de apropiate de aria emisferei).

2° Fie date latura $AB = BC = a$ a triunghiului isoscel căutat ABC și aria sa.

Construim iarăși arcul $BC = a$, punctele B' și C', diametral opuse punctelor B și C, și unul dintre arcele avînd extremitățile în punctele B' și C' și făcînd parte din locul geometric al celui de-al treilea vîrf A al triunghiurilor ABC, care au latura BC comună și aria dată. Al treilea vîrf A al triunghiului căutat va fi punctul de intersecție al acestui arc cu cercul CX, avînd ca pol punctul B și raza sferică egală cu BC (fig. 263, 264 și 265), efectuate în proiecție stereografică; cercul CX, despre care este vorba, este reprezentat printr-un cerc sau printr-o dreaptă care trece prin punctul C și formează unghiuri drepte cu cercul $BCB'C'$ și cu dreapta BB').

Dacă latura dată BC a triunghiului căutat este mai mică decît un sfert de cerc mare, problema poate avea două soluții, una sau nici una (fig. 263). Aria triunghiului va fi maximă, dacă arcul care trece prin punctele B' și C' va fi tangent la cercul CX (triunghiul A_0BC). Construcția triunghiului de

arie maximă constă în a duce prin punctele B' și C' cercuri tangente la cercul construit (ex. 994).

Dacă latura BC a triunghiului căutat este egală cu un sfert de cerc mare, problema poate avea o soluție unică sau nici una (fig. 264). Este geometric evident că aria triunghiului isoscel avînd laturile egale de cîte un sfert de cerc mare poate lua valori oricît de apropiate de un sfert din aria sferei. Problema unui triunghi de arie maximă, nu se pune în acest caz.

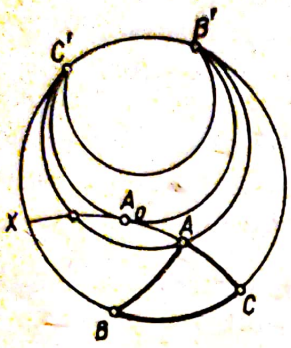


Fig. 263

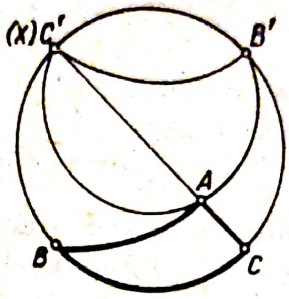


Fig. 264

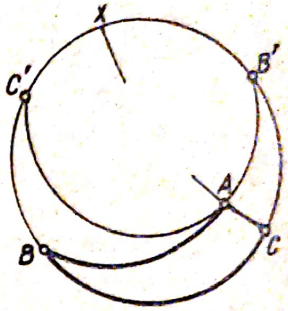


Fig. 265

În sfîrșit, dacă latura dată BC este mai mare decît un sfert de cerc mare, problema are întotdeauna o soluție unică (fig. 265). Aria triunghiului isoscel căutat poate lua valori oricît de apropiate de aria emisferei, astfel că nici de astă dată nu se pune problema triunghiului de arie maximă.

999. Construirea punctului P, considerat în soluția exercițiului 970 *bis*, ia următoarea formă, în cazul a trei cercuri mari date:

Ducem prin punctul de intersecție B' al cercurilor mari AB și BC, distinct de B, adică prin punctul B' care este diametral opus lui B, și prin punctul C', diametral opus lui C, un cerc Γ care intersectează laturile AC și AB ale triunghiului sferic ABC (sau prelungirile lor) respectiv în punctele Q_1 și R_1. Mai departe, ducem cercul $A'Q_1R_1$ prin punctele Q_1, R_1 și prin punctul A', diametral opus lui A. În sfîrșit, construim cercul tangent în punctul A' la cercul $A'Q_1R_1$ și, totodată, tangent la latura BC a triunghiului ABC. Punctul de contact va fi punctul căutat P.

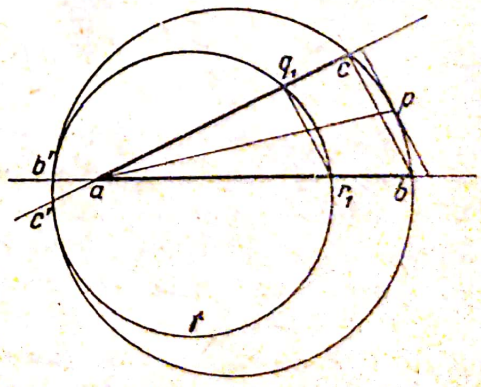


Fig. 266

Punctele Q și R se construiesc în mod analog.

Să considerăm acum această construcție în proiecție stereografică, luînd ca centru de proiecție punctul A'. Vom nota proiecțiile punctelor considerate $A, B, C, \ldots$ cu aceleași litere ca și punctele respective, însă minuscule. Vom obține în proiecție două drepte ab și ac și cercul $bcb'c'$, care intersectează dreapta ab în punctele b și b' și dreapta ac în punctele c și c' (fig. 266). Cercul Γ va avea ca proiecție un cerc γ, care trece prin punctele b' și c' și intersectează a doua oară dreptele ac și ab în punctele q_1 și r_1. Dreapta q_1r_1

va fi, cum ne dăm seama ușor, paralelă cu dreapta bc (ex. 65). Cercul $A'Q_1R_1$ va avea ca proiecție dreapta q_1r_1. În sfîrșit, cercul tangent în punctul A' la cercul $A'Q_1R_1$ și tangent la latura BC a triunghiului va avea ca proiecție o dreaptă paralelă cu q_1r_1 și tangentă în punctul p la arcul bc. Deoarece însă dreapta q_1r_1 este paralelă cu bc, tangenta în punctul p la arcul bc va fi paralelă și ea cu coarda bc. Prin urmare, *punctul p este mijlocul arcului bc.*

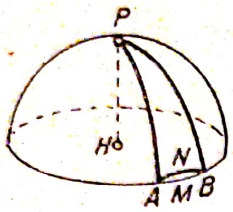


Fig. 267

De aici rezultă (compară cu soluția ex. 993) că, pe sferă, arcul AP împarte în părți egale aria triunghiului sferic ABC. Același lucru are loc și pentru arcele BQ și CR.

1000. Să începem prin a calcula aria porțiunii comune $PAMB$ (fig. 267) a biunghiului sferic și a calotei sferice avînd ca poli vîrfurile biunghiului.

Fie R raza sferei date, $h = PH$ înălțimea segmentului, $\lambda = \widehat{APB}$ unghiul *biunghiului*, exprimat în radiani. Avem egalitatea evidentă aria $PAMB : 2\pi Rh = \lambda : 2\pi$, de unde

$$\text{aria } PAMB = \lambda Rh.$$

Să calculăm acum aria „secerei" $AMBN$, mărginită de arcul de cerc mic AMB și de arcul de cerc mare ANB, care unesc extremitățile sale.

Păstrăm notațiile R, h, λ, introduse mai sus, și mai notăm cu $\alpha = \widehat{MAN} = \widehat{MBN}$ unghiul „secerei", exprimat în radiani. Aria secerei va fi egală cu diferența dintre aria figurii $PAMB$, egală, după cum am demonstrat, cu λRh, și aria triunghiului sferic PAB (adică aria figurii $PANB$), egală cu $R^2\left[\lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \pi\right] = R^2(\lambda - 2\alpha)$. Așadar, găsim

$$\text{aria } AMBN = \lambda Rh - R^2(\lambda - 2\alpha). \qquad (1)$$

Calculul ariei oricărei figuri sferice mărginite de arce de cerc mare și de cerc mic poate fi redus acum la calculul ariei unui poligon sferic, la care se adaugă sau din care se scad apoi arii ale unor „seceri". Pentru aceasta, este suficient, evident, să unim fiecare două vîrfuri consecutive ale figurii date printr-un arc de cerc mare (compară cu nr. **263**).

Observație. Am caracterizat mai sus „secera" prin patru mărimi R, h, λ și α. În realitate însă, trei dintre aceste mărimi, anume R, h și λ determină unghiul α. În adevăr, aceste trei mărimi caracterizează complet figura $PAMB$ (fig. 267), iar punctele A și B determină arcul de cerc mare ANB, care trece prin ele, deci și unghiul α. Așadar, formula (1) prezintă dezavantajul că mărimile din membrul al doilea nu sînt independente.

Însă deducerea unei formule care să lege între ele mărimile R, h, λ și α depășește cadrul lucrării de față, deoarece face apel la formule din trigonometria sferică.

EXERCIȚIILE LA CAPITOLUL V

1001. Vom denumi corespondența dintre punctele a două poligoane, situate atît pe poligoane cît și în interiorul lor, *continuă* dacă ea se bucură de proprietățile considerate la nr. **700.**

Vom descompune în mai multe puncte demonstrația faptului că toate poligoanele plane convexe au aceeași conexiune.

a) *Două poligoane P și Q au aceeași conexiune, dacă fiecare dintre ele are aceeași conexiune cu al treilea poligon R.*

În adevăr, dacă poligoanele P și R au aceeași conexiune, atunci putem stabili o corespondență continuă între punctele poligoanelor și punctele din regiunile lor interioare.

Același lucru este valabil și pentru poligoanele Q și R, dacă au aceeași conexiune.

Vom considera acum că două puncte din poligoanele P și Q (situate chiar pe poligoane sau în interiorul lor), cărora le corespunde un același punct al poligonului R, se corespund. Această corespondență dintre puncte va fi iarăși continuă, astfel că poligoanele P și Q au aceeași conexiune.

b) *Două triunghiuri asemenea au aceeași conexiune.*

În adevăr, dacă vom considera punctele care se corespund situate pe triunghiurile asemenea sau în interiorul lor, vom obține o corespondență continuă.

c) *Dacă o latură a unui triunghi este egală cu o latură a altuia, atunci triunghiurile au aceeași conexiune.*

În adevăr, să dispunem astfel triunghiurile date, încît latura AB a primului triunghi ABC să coincidă cu latura AB, egala ei în al doilea triunghi ABC', iar triunghiurile să se situeze în plane diferite. Dacă vom considera că, în cele două triunghiuri, se corespund punctele situate pe aceeași dreaptă paralelă cu CC', vom avea iarăși o corespondență continuă.

d) *Două triunghiuri arbitrare au aceeași conexiune.*

Să considerăm un al treilea triunghi, asemenea cu primul dintre triunghiurile date, avînd una dintre laturi egală cu una dintre laturile celui de-al doilea. Primul și al treilea triunghi vor avea aceeași conexiune, în virtutea punctului (b), iar al doilea și al treilea în virtutea punctului (c). Prin urmare [în virtutea punctului (a)], cele două triunghiuri date vor avea și ele aceeași conexiune.

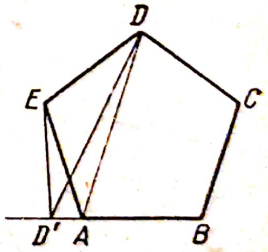


Fig. 268

e) *Orice poligon convex are aceeași conexiune cu un triunghi arbitrar.*

Fie dat un poligon convex, să zicem pentagonul $ABCDE$ (fig. 268). Să ducem diagonala AD, care unește două vîrfuri vecine cu un același vîrf E, și să alegem pe prelungirea laturii AB dincolo de punctul A un punct arbitrar D'.

Triunghiul ADD' are aceeași conexiune cu triunghiul AED. Totodată, corespondența continuă dintre punctele celor două triunghiuri poate fi astfel stabilită, încît fiecare punct al laturii comune AD să fie propriul său omolog. Dacă vom considera, mai departe, că fiecare punct al patrulaterului $ABCD$

este propriul său omolog, vom obține o corespondență continuă între punctele pentagonului $ABCDE$ și punctele patrulaterului $BCDD'$.

Așadar, orice poligon convex are aceeași conexiune cu un poligon convex avînd cu o latură mai puțin decît cel dat. Continuăm acest raționament pînă cînd ajungem la un triunghi.

f) *Două poligoane convexe oarecare au aceeași conexiune.*

Fiind date două poligoane convexe P și P', putem găsi două triunghiuri Δ și Δ', avînd aceeași conexiune respectiv cu P și cu P'. Aceste două triunghiuri au aceeași conexiune (cf. d). Așadar, poligonul P are aceeași conexiune cu triunghiul Δ, triunghiul Δ cu triunghiul Δ', iar triunghiul Δ' cu poligonul P'. În virtutea punctului (a), poligoanele P și P' au aceeași conexiune.

Pentru a extinde rezultatul obținut și la poligoanele neconvexe, este suficient să demonstrăm următoarea afirmație:

Orice poligon neconvex are aceeași conexiune cu un poligon convex avînd același număr de laturi.

Să conturăm în linii mari demonstrația acestei propoziții. Un poligon concav dat poate fi descompus prin diagonalele sale în triunghiuri (vom considera că această proprietate este evidentă). Astfel, poligonul $ABCDEFGHK$ (fig. 269) poate fi descompus în triunghiuri prin diagonalele AC, AD, AF, AH, DF și FH. Poligonul convex $A'B'C'D'E'F'G'H'K'$ (fig. 270), avînd același număr de laturi, poate fi și el descompus în triunghiuri, prin diagonalele „omoloage" $A'C'$, $A'D'$, $A'F'$, $A'H'$, $D'F'$ și $F'H'$. Între fiecare pereche de triunghiuri corespunzătoare ABC și $A'B'C'$, ACD și $A'C'D'$, ADF și $A'D'F'$..., vom stabili o corespondență continuă, cum s-a arătat mai sus la (b) — (d). În aceste condiții, va fi esențial următorul fapt. Fiecărui punct M de pe diagonala AC îi va corespunde un același punct M' de pe diagonala $A'C'$, indiferent dacă vom considera segmentul AC ca latură a triunghiului ABC sau ca latură a triunghiului ACD. În adevăr [în virtutea punctelor (b) și (c)], acest punct M' satisface condiția $MA : MC = M'A' : M'C'$. În felul acesta, va fi stabilită corespondența continuă dintre cele două poligoane.

1002. Dacă extremitățile A și D ale tăieturii $ABCD$ aparțin unuia dintre contururile suprafeței (fig. 271), atunci numărul de contururi va crește cu o unitate, deoarece, în locul unui singur contur $AEFDGHKA$, vom avea

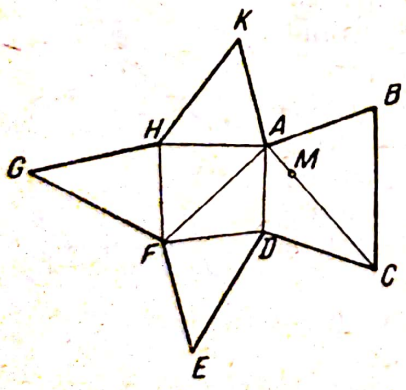


Fig. 269

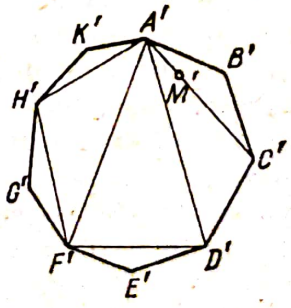


Fig. 270

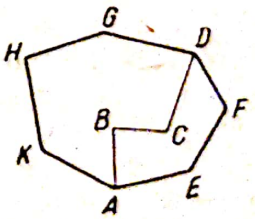


Fig. 271

două, anume $ABCDFEA$ și $ABCDGHKA$. Dacă însă extremitățile A și D ale tăieturii $ABCD$ aparțin unor contururi diferite (fig. 272), atunci numărul contururilor se reduce cu o unitate, deoarece, în locul celor două contururi $AEFGA$ și $DHKLMD$, vom avea un singur contur $AEFGABCDMLKHDCBA$. Așadar, dacă efectuăm o singură tăietură, atunci numărul par de contururi

ale suprafeței inițiale este înlocuit prin numărul impar de contururi al suprafeței transformate și invers. De aici rezultă că după efectuarea unui număr par (impar) consecutiv de tăieturi, numărul de contururi al suprafeței inițiale și numărul de contururi al suprafeței transformate vor fi ambele pare sau ambele impare (respectiv, unul par, iar celălalt impar).

Fie acum ordinul de conexiune al unei suprafețe poliedrale (**706**) egal cu un număr par. În acest caz, un număr *impar* de tăieturi o va transforma într-o suprafață simplu conexă, adică într-o suprafață a cărei frontieră este formată dintr-un număr impar de contururi, anume dintr-unul singur. Prin urmare, numărul inițial al contururilor a fost par.

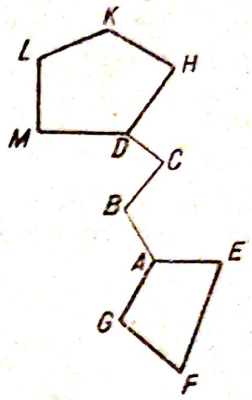


Fig. 272

Situația este analogă în cazul cînd ordinul de conexiune este un număr impar.

În particular, dacă vom înlătura o față a unui poliedru care satisface condițiile de la nr. **698**, vom obține o suprafață poliedrală mărginită de *un singur* contur și avînd, de aceea, ordinul de conexiune *impar*.

1003. Numărul total de laturi al fețelor triunghiulare este $3F_3$, numărul total de laturi al fețelor patrulatere este $4F_4$ etc. Numărul total de laturi al tuturor fețelor poliedrului va fi, de aceea, $3F_3 + 4F_4 + \ldots$. Însă fiecare muchie a poliedrului este latură a două dintre fețele sale, astfel că numărul total de laturi este egal cu dublul numărului de muchii. De aici avem

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots \quad . \tag{1}$$

Tot astfel, numărul total de muchii al tuturor unghiurilor solide ale unui poliedru este $3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots$, egal totodată cu dublul numărului de muchii, deoarece fiecare muchie a poliedrului este muchie a două dintre unghiurile sale solide. De aici avem

$$2A = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots \quad . \tag{2}$$

1004. Deoarece, în notațiile adoptate la exercițiul 1003, are loc egalitatea evidentă $F = F_3 + F_4 + F_5 + \ldots$, găsim, din egalitatea (1), dată în soluția aceluiași exercițiu, că $2A \geqslant 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \ldots$, adică $2A \geqslant 3F$.

Tot astfel, din egalitatea evidentă $S = S_3 + S_4 + S_5 + \ldots$ și din egalitatea (2), dată în soluția aceluiași exercițiu, găsim $2A \geqslant 3S_3 + 3S_4 + 3S_5 + \ldots$, adică $2A \geqslant 3S$.

Mai departe, înlocuind în inegalitatea $2A \geqslant 3F$ mărimea F prin mărimea $A - S + 2$ (în virtutea teoremei lui Euler), căpătăm $2A \geqslant 3(A - S + 2)$, de unde deducem $3S \geqslant A + 6$ și $6S - 12 \geqslant 2A$.

În sfîrșit, substituind, în inegalitatea $2A \geqslant 3S$, expresia $A - F + 2$ pentru mărimea S (în virtutea teoremei lui Euler), căpătăm $2A \geqslant 3(A - F + 2)$, de unde deducem $3F \geqslant A + 6$ și $6F - 12 \geqslant 2A$.

Astfel, toate inegalitățile din enunțul problemei au fost demonstrate.

Scanned with OKEN Scanner

1005. Avem (v. soluțiile ex. 1003 și 1004)

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots ; \quad (1)$$

$$2A = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \dots ; \quad (2)$$

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots ; \quad (3)$$

$$S = S_3 + S_4 + S_5 + \dots . \quad (4)$$

Substituind acum, în egalitatea $F + S = A + 2$, valorile din (3), (4) și (1) pentru F, S și A, căpătăm $2(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + 2(S_3 + S_4 + S_5 + \dots) = (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots) + 2$ sau, după efectuarea reducerilor,

$$2(S_3 + S_4 + S_5 + \dots) = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \dots . \quad (5)$$

Tot astfel, introducînd în egalitatea $F + S = A + 2$ valorile din (3), (4) și (2) pentru F, S și A, obținem, după reduceri,

$$2(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) = 4 + S_3 + 2S_4 + 3S_5 + \dots . \quad (6)$$

În sfîrșit, adunînd membru cu membru egalitățile (5) și (6), obținem

$$F_3 + S_3 = 8 + (F_5 + S_5) + 2(F_6 + S_6) + \dots . \quad (7)$$

Această din urmă egalitate ne arată că

$$F_3 + S_3 \geqslant 8,$$

de unde rezultă propoziția de demonstrat.

Prima dintre cele două propoziții de demonstrat poate fi demonstrată mai simplu. Anume, din egalitățile (1) și (2), pentru $F_3 = S_3 = 0$, am avea $2A \geqslant 4F$ și $2A \geqslant 4S$, de unde $F + S \leqslant A$, ceea ce contrazice teorema lui Euler. Așadar, egalitățile $F_3 = 0$ și $S_3 = 0$ nu pot fi satisfăcute simultan.

1006. Dacă fiecare față a unui poliedru de gen zero ar avea mai mult decît cinci laturi, atunci, în notațiile adoptate la exercițiul 1003, am avea $F_3 = F_4 = F_5 = 0$. În virtutea egalității (1) din soluția aceluiași exercițiu, am avea, în aceste condiții, $2A \geqslant 6F$. Totodată, în virtutea exercițiului 1004, trebuie să avem $6F - 12 \geqslant 2A$. Contradicția la care ajungem ne arată că fiecare față a poliedrului de gen zero nu poate avea mai mult de cinci laturi.

Analog, pentru $S_3 = S_4 = S_5 = 0$, am obține două relații contradictorii, anume $2A \geqslant 6S$ și $6S - 12 \geqslant 2A$.

Aceleași propoziții rezultă ca o consecință din cele arătate la exercițiul 1009.

1007. Am avut mai sus (ex. 1004): $2A \geqslant 3F \geqslant A + 6$. Pentru $A = 7$, am obține de aici inegalitățile imposibile $14 \geqslant 3F \geqslant 13$.

1008. Am avut mai sus (ex. 1004) $6F - 12 \geqslant 2A \geqslant 3F \geqslant A + 6$. Dacă $F = 5$, căpătăm $18 \geqslant 2A \geqslant 15 \geqslant A + 6$, de unde $A = 8$ sau $A = 9$. Conform teoremei lui Euler, $S = A - F + 2$. De aceea, pentru $F = 5$, $A = 8$, găsim $S = 5$ (exemplu: piramida patrulateră), iar pentru $F = 5$, $A = 9$, găsim $S = 6$ (exemplu: prisma triunghiulară).

Scanned with OKEN Scanner

1009. Adunînd membru cu membru, o dată egalitățile (5) și (7), iar apoi egalitățile (6) și (7) din soluția exercițiului 1005, obținem

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 = 12 + 2F_4 + 4F_5 + \ldots + S_7 + 2S_8 + \ldots, \quad (8)$$

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + 2S_4 + 4S_5 + \ldots + F_7 + 2F_8 + \ldots. \quad (9)$$

Adunînd acum membru cu membru, o dată egalitățile (7) și (8), apoi egalitățile (7) și (9), căpătăm, mai departe,

$$F_3 + 4S_3 + 2S_4 = 20 + 2F_4 + 5F_5 + \ldots + 2S_6 + 4S_7 + \ldots, \quad (10)$$

$$S_3 + 4F_3 + 2F_4 = 20 + 2S_4 + 5S_5 + \ldots + 2F_6 + 4F_7 + \ldots. \quad (11)$$

Punînd acum, în egalitățile (9) și (11), $F_3 = F_4 = 0$, căpătăm $F_5 \geqslant 12$ și $S_3 \geqslant 20$. Astfel, prima propoziție din enunțul problemei este demonstrată.

Analog, punînd, în egalitățile (8) și (10), $S_3 = S_4 = 0$, căpătăm $S_5 \geqslant 12$ și $F_3 \geqslant 20$. Astfel am demonstrat următoarea propoziție:

Un poliedru de gen zero care nu are nici unghiuri triedre, nici unghiuri tetraedre are cel puțin 12 *unghiuri cu cinci fețe și* 20 *de fețe triunghiulare.*

Punînd, mai departe, în egalitatea (9), $F_4 = F_5 = 0$, căpătăm $F_3 \geqslant 4$. Astfel, am demonstrat și ultima propoziție din enunțul problemei.

Analog, punînd, în egalitatea (8), $S_4 = S_5 = 0$, obținem $S_3 \geqslant 4$. Astfel, am demonstrat următoarea propoziție:

Un poliedru de gen zero care nu are nici unghiuri tetraedre, nici unghiuri pentaedre are cel puțin patru unghiuri triedre.

1010. Suma Σ a unghiurilor plane ale tuturor fețelor unui poliedru este $\Sigma = 2\text{dr} \cdot (3-2)F_3 + 2\text{dr} \cdot (4-2)F_4 + 2\text{dr} \cdot (5-2)F_5 + \ldots = 2\text{dr}\ (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots) - 4\text{dr}\ (F_3 + F_4 + F_5 + \ldots)$. Folosind egalitățile (1) și (3) din soluția exercițiului 1005, găsim $\Sigma = 2\text{dr} \cdot 2A - 4\text{dr} \cdot F =$

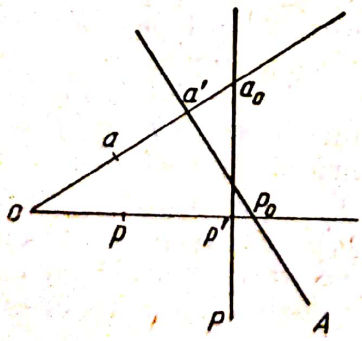


Fig. 273

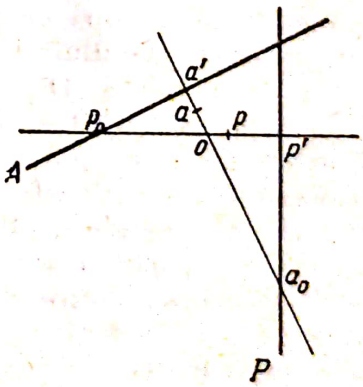


Fig. 274

$= 4\text{dr} \cdot (A - F)$ sau, în virtutea teoremei lui Euler, $\Sigma = 4\text{dr} \cdot (S-2)$. Deoarece suma unghiurilor unui poligon plan cu S laturi este $2\text{dr} \cdot (S-2)$, teorema este demonstrată.

1011. Fie o centrul sferei directoare S, A planul polar al punctului a, p polul planului P (fig. 273 și 274). Să notăm cu a' și cu a_0 punctele de inter-

secție ale dreptei oa cu planele A și P, cu p' și cu p_0 punctele de intersecție ale dreptei op cu planele P și A.

Să presupunem inițial că unghiul aop este ascuțit (fig. 273). Dacă punctul a este situat de aceeași parte a planului P ca și punctul o, avem $oa < oa_0$, și reciproc; analog, dacă polul p al planului P și punctul o sînt situate de aceași parte a planului A, atunci $op < op_0$, și reciproc. Așadar, trebuie să demonstrăm că *din inegalitatea* $oa < oa_0$ *rezultă* $op < op_0$.

Însă în virtutea proprietății fundamentale a polilor și a planelor polare, avem $oa \cdot oa' = op \cdot op'$; în virtutea asemănării triunghiurilor dreptunghice $oa'p_0$ și $op'a_0$, avem $oa_0 \cdot oa' = op_0 \cdot op'$. Din ultimele două egalități, găsim $oa : oa_0 = op : op_0$. Această proporție ne arată că $oa < oa_0$ implică $op < op_0$.

Am presupus că unghiul aop este ascuțit. Fie acum acest unghi obtuz (fig. 274). În acest caz, punctul a și punctul o se situează *întotdeauna* de aceeași parte a planului P, deoarece unghiul aop', egal cu unghiul aop, este de asemenea obtuz. Analog, punctul p și punctul o sînt întotdeauna situate de aceeași parte a planului A. Considerații analoge se aplică și în cazul cînd unghiul aop este drept.

Prima propoziție din enunțul problemei este demonstrată. Să trecem la considerarea poliedrelor.

Fie $a, b, c, \ldots$ vîrfurile unui poliedru dat; $P, Q, R \ldots$ fețele sale; $A, B, C, \ldots$ planele polare ale punctelor $a, b, c, \ldots$ în raport cu sfera S; $p, q, r, \ldots$ polii planelor $P, Q, R, \ldots$ în raport cu aceeași sferă. Trebuie să demonstrăm că poliedrul care este polarul reciproc al celui dat, adică are ca vîrfuri punctele $p, q, r, \ldots$ și ca fețe planele $A, B, C, \ldots$, este de asemenea convex.

Fie p un vîrf oarecare al poliedrului transformat, A planul uneia dintre fețele sale care nu trece prin p. Deoarece centrul o al sferei directoare este situat, conform ipotezei, în interiorul poliedrului inițial, vîrful a și punctul o vor fi situate de aceeași parte a fetei P, care nu trece prin a. Prin urmare, conform celor demonstrate, și polul p al planului P va fi situat de aceeași parte cu punctul o în raport cu planul A. Așadar, orice vîrf al poliedrului transformat, exterior planului A, se situează de aceeași parte ca și punctul o în raport cu această față. Deoarece aceasta este valabil pentru toate fețele $A, B, C, \ldots$ ale poliedrului transformat, acesta este convex.

Dacă acum x este un punct interior poliedrului inițial, atunci punctele x și o se situează de aceeași parte a oricăruia dintre planele $P, Q, R, \ldots$. Prin urmare, conform celor demonstrate punctul o și oricare dintre punctele $p, q, r, \ldots$ se află de aceeași parte a planului polar X al punctului x. Altfel spus, toate vîrfurile poliedrului transformat sînt situate de aceeași parte a planului X, iar acesta este în întregime exterior poliedrului transformat. Așadar, punctul x, interior poliedrului dat, are ca plan polar planul X, în întregime exterior poliedrului transformat.

În același mod demonstrăm proprietatea analogă a planelor exterioare poliedrului dat și a punctelor interioare poliedrului transformat.

1012. Să luăm un punct O, interior poliedrului convex dat, ca centru al unei sfere de rază arbitrară. „Să proiectăm" poliedrul dat, din centrul O, pe suprafața sferei, adoptînd ca „proiecție" a fiecăruia dintre punctele poliedrului, punctul de pe sferă care se situează cu el pe aceeași semidreaptă dusă din punctul O. Fețelor poliedrului le vor corespunde poligoane sferice, muchii-

lor și vîrfurilor sale laturile și vîrfurile acestor poligoane. Poligoanele sferice obținute vor acoperi sfera complet și fără suprapuneri. În sistemul de unități adoptat la nr. **692**, suma ariilor tuturor poligoanelor sferice obținute va fi egală cu 4π. Exprimînd aceeași sumă a ariilor prin numărul de vîrfuri S, numărul de fețe F și numărul de muchii A ale poliedrului, vom căpăta o nouă demonstrație a teoremei lui Euler.

Pentru aceasta, să notăm cu n_1, n_2,... numărul de laturi al fiecăreia dintre fețele poliedrului, adică numărul de laturi al fiecărui poligon sferic, cu σ_1, σ_2,... suma unghiurilor acelorași poligoane (în radiani). Ariile poligoanelor sferice vor fi (în unitățile adoptate) $\sigma_1 - (n_1 - 2)\,\pi = \sigma_1 - n_1\pi + 2\pi$, $\sigma_2 - n_2\pi + 2\pi$,... . Obținem astfel ecuația

$$(\sigma_1 - n_1\pi + 2\pi) + (\sigma_2 - n_2\pi + 2\pi) + \ldots = 4\pi.$$

Deoarece numărul de termeni din primul membru este egal cu numărul de fețe F, această ecuație se mai poate scrie

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots) - (n_1 + n_2 + \ldots)\pi + 2F\pi = 4\pi.$$

Mai departe, $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots = 2S\pi$, deoarece suma unghiurilor de pe sferă din jurul fiecăruia din cele S vîrfuri ale poligoanelor sferice este egală cu 2π, iar $n_1 + n_2 + \ldots = 2A$ (ex. 1003). Egalitatea precedentă ia forma

$$2S\pi - 2A\pi + 2F\pi = 4\pi,$$

de unde obținem teorema lui Euler.

Să presupunem acum că poliedrul dat este regulat și are fețe cu m unghiuri și unghiuri cu n fețe, iar punctul O coincide cu centrul poliedrului. În acest caz, unghiurile din vîrfurile A, B și C ale triunghiului sferic ABC (**713**, fig. 362 din Geometria în spațiu) vor fi respectiv egale cu π/n, π/m și $\pi/2$, iar aria sa va fi $\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{2} - \pi = \pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right)$. În același timp, suprafața sferei se împarte în $2mF$ triunghiuri ca ABC, deoarece fiecăreia dintre F fețe ale poliedrului îi corespund $2m$ de astfel de triunghiuri pe sferă. Deoarece are loc egalitatea $mF = 2A$ (**715 bis**), aria fiecăruia dintre triunghiurile egale de felul lui ABC este $\frac{4\pi}{4A} = \frac{\pi}{A}$. Egalînd cele două expresii pentru aria triunghiului ABC, obținem ecuația

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A},$$

adică egalitatea (6′), pe care am dedus-o din alte considerații la nr. **715 bis**.

1013. Dacă h_1, h_2,... sînt distanțele la planele fețelor ale unui punct interior unui poliedru regulat, S este aria unei fețe, iar V volumul poliedrului, atunci are loc egalitatea

$$\frac{1}{3}\,Sh_1 + \frac{1}{3}\,Sh_2 + \ldots = V,$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece suma volumelor piramidelor avînd ca baze toate fețele poliedrului și ca vîrf comun punctul dat, este egală cu volumul poliedrului. Din această egalitate, rezultă că

$$h_1 + h_2 + \ldots = \frac{3V}{S} = \text{const.}$$

1014. Să considerăm una dintre fețele unui octaedru regulat, să zicem fața ABC din fig. 363, din Geometria în spațiu, precum și alte trei fețe, avînd fiecare cîte un vîrf comun cu prima, dar neavînd muchii comune cu ea; în aceeași figură, acestea vor fi fețele $AB'C'$, $A'BC'$ și $A'B'C$. Prelungind aceste fețe pînă la intersecțiile lor, căpătăm un tetraedru regulat, înscris în același cub (v. fig. 361 din Geometria în spațiu); în adevăr, planele fețelor ABC și $AB'C'$ se intersectează după o dreaptă care trece prin centrul A al uneia dintre fețele cubului și este paralelă cu dreptele BC și $B'C'$, adică după una dintre diagonalele acestei fețe, și aceeași este situația pentru celelalte fețe alese ale octaedrului.

Al doilea tetraedru regulat, înscris în același octaedru, se va obține prelungind pînă la intersecțiile lor planele celorlalte patru fețe ale aceluiași octaedru $A'B'C'$, $A'BC$, $AB'C$ și ABC'.

1015. Să considerăm o muchie arbitrară MN a unui dodecaedru (fig. 275). Diagonalele AB și CD, paralele cu muchia MN, ale fețelor dodecaedrului care formează această muchie, vor fi paralele și egale între ele. Fiecare dintre segmentele BC și DA va fi egal cu aceste două segmente AB și CD, ca diagonală a uneia dintre celelalte fețe ale dodecaedrului. Așadar, patrulaterul $ABCD$ este un romb. Deoarece planul bisector al diedrului de muchie MN al dodecaedrului este un plan de simetrie al acestuia (**710**), segmentele AB și DC vor fi simetrice în raport cu acest plan. De aici rezultă că segmentele BC și DA sînt perpendiculare pe AB, astfel că rombul $ABCD$ este un pătrat.

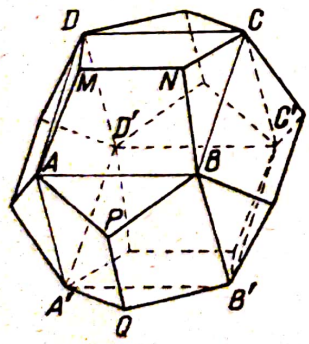


Fig. 275

Analog, ne putem convinge că diagonalele AA' și BB' ale fețelor dodecaedrului sînt perpendiculare pe AB (în locul muchiei MN a dodecaedrului, trebuie să plecăm de la muchia PQ). Continuînd aceste raționamente, vom stabili existența cubului înscris $ABCDA'B'C'D'$, avînd ca vîrfuri opt dintre vîrfurile dodecaedrului și ca muchii 12 dintre diagonalele fețelor acestuia.

Se vede ușor că cubul înscris este complet determinat de alegerea uneia dintre cele $5 \cdot 12 = 60$ diagonale ale fețelor dodecaedrului; în adevăr, de exemplu diagonala AB a uneia dintre fețe determină complet muchia MN a dodecaedrului etc. Deoarece fiecare cub înscris are ca muchii 12 diagonale ale fețelor dodecaedrului, aceste 12 diagonale determină un același cub și, de aceea, numărul total de cuburi înscrise va fi egal cu $60 : 12 = 5$.

Fiecare vîrf al dodecaedrului aparține la două cuburi înscrise, deoarece, dintr-un vîrf al dodecaedrului, în trei fețe care pornesc din acest vîrf, sînt duse în total $2 \cdot 3 = 6$ diagonale, iar trei dintre aceste șase diagonale aparțin cîte unui cub.

Scanned with OKEN Scanner

1015 *bis*. Să luăm ca prim tetraedru înscris în cubul dat $ABCDA'B'C'D'$ tetraedrul $AB'CD'$; sensurile corespunzătoare acestei alegeri pe muchiile cubului sînt indicate în fig. 276. Ducînd plane prin muchiile cubului, așa cum se arată în textul problemei, putem presupune că unghiul α este mai mic decît 45°. În adevăr, dacă planul $AMNB$, dus prin muchia AB, formează cu fața $ABCD$, dispusă „în stînga" muchiei AB, unghiul α, atunci acest plan va forma cu fața $ABB'A'$, dispusă „în dreapta" aceleiași muchii, unghiul $90° - \alpha$. Dacă unghiul α ar fi mai mare decît 45°, ar fi suficient să schimbăm sensul de pe fiecare muchie în cel opus, pentru ca noua valoare a unghiului α să fie mai mică decît 45°. (Cazul $\alpha = 45°$ necesită o considerare aparte.)

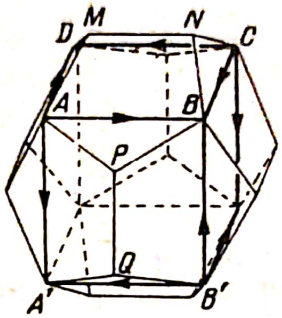


Fig. 276

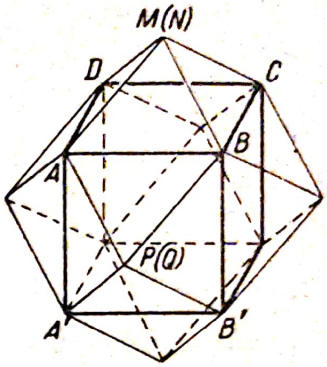


Fig. 277

Așadar, vom presupune că unghiul α este mai mic decît 45°. În acest caz, vom obține poliedrul reprezentat în fig. 276 și mărginit de 12 pentagoane egale, analoge cu $AMNBP$. Acest poliedru se numește *dodecaedru pentagonal*. În virtutea egalității unghiurilor α la toate muchiile cubului, vom avea egalitatea celor 24 de muchii ale poliedrului, care sînt duse din vîrfurile cubului ($AM = BN = CN = DM = AP = BP = B'Q = A'Q = \ldots$) și egalitatea celorlalte șase muchii ($MN = PQ = \ldots$).

Dacă unghiul α este egal cu 45°, atunci patru plane duse prin muchiile AB, BC, CD și DA ale feței $ABCD$ a cubului trec prin același punct și același lucru este valabil și pentru celelalte fețe ale cubului. În fig. 742 vor coincide punctele M și N, P și Q etc. Vom căpăta poliedrul reprezentat în fig. 277 și mărginit de 12 romburi egale, analoge cu $AMBP$. Acest poliedru se numește *rombododecaedru*.

Să revenim la dodecaedrul pentagonal. În virtutea egalităților menționate mai sus dintre muchiile sale, fiecare față a acestui poliedru are patru laturi egale. Astfel, fața $AMNBP$ (fig. 276) are patru laturi egale $AM = AP = PB = BN$. A cincea latură a fiecărei fețe nu va fi, în general, egală cu celelalte; astfel, în cazul general, vom avea $AM \neq MN$. Pentru ca dodecaedrul pentagonal construit să fie un dodecaedru *regulat*, este necesar ca și a cincea latură a fiecărei fețe să fie egală cu celelalte patru. Pentru aceasta este suficient (în virtutea egalității tuturor fețelor) să aibă loc egalitatea

$$AM = MN. \tag{1}$$

Mai departe, fiecare față a dodecaedrului pentagonal are, evident, două perechi de diagonale egale. Astfel, fața $AMNBP$ are diagonalele egale AN și BM, precum și PM și PN. Pentru ca dodecaedrul pentagonal să fie un dodecaedru regulat, este necesar ca diagonalele fiecărei fețe să fie egale între ele, în particular ca să avem

$$AB = BM. \tag{2}$$

Reciproc, dacă relațiile (1) și (2) vor fi satisfăcute, fața $AMNBP$ va avea cinci laturi egale și trei diagonale egale $AB = BM = AN$. De aici ajungem ușor la concluzia că toate cele cinci unghiuri plane ale acestei fețe vor fi de asemenea egale, astfel că vom avea un pentagon regulat. În virtutea egalității fețelor dodecaedrului pentagonal, toate celelalte fețe vor fi și ele pentagoane regulate. Toate diedrele acestui poliedru vor fi egale între ele, deoarece toate triedrele sale vor fi egale ca având cele trei unghiuri plane respectiv egale și poliedrul va fi un dodecaedru regulat. Așadar, trebuie să demonstrăm că egalitățile (1) și (2) vor fi satisfăcute, în cazul unei alegeri corespunzătoare a unghiului α.

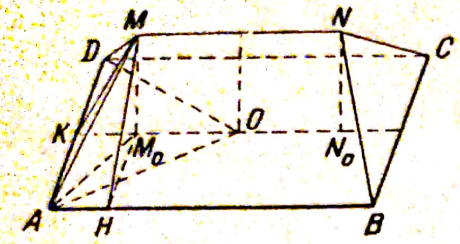


Fig. 278

Pentru aceasta, coborîm din punctul M perpendicularele MH, MK și MM_0 pe muchiile AB, AD și pe fața $ABCD$ ale cubului (fig. 278). Din triunghiurile dreptunghice AMH și HMM_0, vom avea $AM^2 = MH^2 + AH^2 = MH^2 + \frac{1}{4}(AB - MN)^2$ și $MH^2 = M_0H^2 + M_0M^2 = \frac{1}{4}AB^2 + M_0M^2$, de unde

$$AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + M_0M^2 - \frac{1}{2}AB \cdot MN + \frac{1}{4}MN^2. \tag{3}$$

Mai departe, triunghiurile dreptunghice HMM_0 și MKM_0 sînt asemenea, deoarece, prin construcție, $\widehat{MHM_0} = \alpha$ și $\widehat{MKM_0} = 90° - \alpha$. Din asemănarea acestor triunghiuri, avem

$$M_0M^2 = M_0H \cdot M_0K = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}(AB - MN) = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AB \cdot MN. \tag{4}$$

Substituind această valoare în egalitatea (3), obținem

$$AM^2 = \frac{3}{4}AB^2 - \frac{3}{4}AB \cdot MN + \frac{1}{4}MN^2. \tag{5}$$

Egalitățile (3), (4) și (5) au loc oricum am alege unghiul α.

Condiția (1) de egalitate a muchiilor poliedrului este echivalentă, în virtutea formulei (5), cu relația

$$MN^2 = AB^2 - AB \cdot MN, \tag{6}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{AB}{MN} = \frac{MN}{AB - MN}. \tag{7}$$

Această din urmă egalitate ne arată că *muchia MN este egală cu partea mai mare a segmentului AB, împărțit în medie și extremă rație* (v. nr. **156**), de unde

$$\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

În aceste condiții, vom avea, în virtutea relațiilor (4) și (6),

$$M_0M = \frac{1}{2}\,MN$$

și deci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_0M}{NM_0} = \frac{\frac{1}{2}MN}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (8)$$

În cazul acestei alegeri a unghiului α, condiția (1) este satisfăcută. Să arătăm că, în acest caz, va fi îndeplinită și condiția (2) de egalitate a diagonalelor.

În adevăr, avem

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 = M_0M^2 + M_0H^2 + HB^2 = \frac{1}{4}MN^2 +$$

$$+\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}(AB + MN)^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + MN^2 + AB \cdot MN).$$

Dacă este satisfăcută condiția (6), această egalitate devine $MB = AB$. Așadar, condiția (2) este satisfăcută.

Prin urmare, *dodecaedrul pentagonal, construit cum se arată în enunțul problemei, se transformă într-un dodecaedru regulat, dacă unghiul α satisface condiția* (8), altfel spus, *dacă muchia MN este egală cu partea mai mare din muchia AB a cubului, împărțită în medie și extremă rație, iar distanța muchiei MN la fața $ABCD$ a cubului, paralelă cu ea, este egală cu jumătatea muchiei MN.*

Această din urmă formă a condiției pentru care dodecaedrul pentagonal se transformă într-un dodecaedru regulat ne permite *să construim un dodecaedru regulat după un cub dat, înscris în el.* Pentru aceasta, împărțim muchia cubului în medie și extremă rație, luăm jumătate din segmentul mai mare pe prelungirea fiecăreia dintre perpendicularele coborîte din centrul cubului pe muchiile sale etc.

Sfera circumscrisă cubului dat va fi circumscrisă totodată dodecaedrului regulat construit, deoarece trece prin opt vîrfuri ale acestuia, astfel că avem posibilitatea *de a construi un dodecaedru regulat înscris într-o sferă dată.*

În sfîrșit, deoarece muchia AB a cubului înscris în sfera de rază R este egală cu $AB = 2R/\sqrt{3}$, iar muchia dodecaedrului regulat se exprimă prin muchia cubului cu ajutorul formulei (7), obținem *expresia pentru muchia MN a dodecaedrului regulat prin raza R a sferei circumscrise*, sub forma

$$MN = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}\,R.$$

(compară nr. **718**).

Dacă vom uni acum vîrful M al dodecaedrului regulat cu centrul O al feței $ABCD$ a cubului, cea mai apropiată de el (fig. 278), și cu unul dintre vîrfurile acestuia, A, vom avea $OM_0 = \frac{1}{2}MN = M_0M$, de unde $\widehat{MOM_0} = 45°$ și $M_0M = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AM$, de unde $\widehat{MAM_0} = 30°$.

Să construim acum proiecția dodecaedrului regulat pe un plan paralel cu fața $ABB'A'$ a cubului (fig. 276 și 278). Pentru a nu introduce notații noi, vom lua ca plan de proiecție planul KMN. Punctele K, M, M_0, N, O vor coincide cu proiecțiile lor.

Din cele de mai sus, rezultă următoarea metodă de construcție. După ce am ales arbitrar muchia MN a dodecaedrului (fig. 279), construim punctele M_0 și O, folosind faptul că $MM_0 = \frac{1}{2} MN$. Mai departe, construim

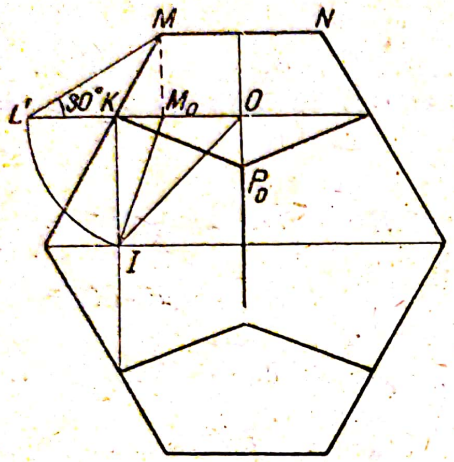


Fig. 279

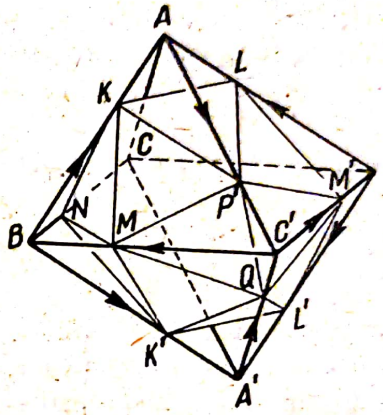


Fig. 280

triunghiul dreptunghic LMM_0, egal cu AMM_0, folosind faptul că, conform celor demonstrate, avem $\widehat{MLM_0} = \widehat{MAM_0} = 30°$. Mai departe, construim triunghiul IM_0O, egal cu AM_0O, folosind faptul că $\widehat{M_0OI} = \widehat{M_0OA} = 45°$ și că $M_0I = M_0A = M_0L$ (punctul I este centrul feței cubului care trece prin vîrfurile A, A' și D). Perpendiculara coborîtă din punctul I pe OM_0 determină punctul K. Proiecția KP_0 a muchiei AP pe planul figurii este egală cu proiecția AM_0 a muchiei AM pe planul $ABCD$ și este deci egală cu M_0L; aceasta ne dă posibilitatea de a construi triunghiul dreptunghic KP_0O și deci punctul P_0. Mersul ulterior al construcției este evident.

1016. Centrele fețelor icosaedrului regulat dat formează (**713** și **717**) un dodecaedru regulat. Dreptele care unesc centrul comun al celor două poliedre cu vîrfurile dodecaedrului sînt perpendiculare pe muchiile icosaedrului. Să alegem opt vîrfuri ale dodecaedrului, care să fie vîrfurile unuia dintre cuburile înscrise în el (ex. 1015). Planele celor opt fețe ale icosaedrului care trec prin aceste opt vîrfuri ale cubului formează un octaedru regulat, deoarece fiecare dintre aceste plane este perpendicular pe dreapta care unește centrul cubului cu vîrful său. Celor cinci cuburi înscrise în dodecaedru le corespund cinci octaedre regulate, formate prin prelungirile fețelor icosaedrului dat.

Reciproc, fie A, A', B, B', C și C' vîrfurile unui octaedru dat (fig. 363 din Geometria în spațiu). Să alegem tetraedrul format de prelungirile fețelor ABC, $AB'C'$, $A'BC'$ și $A'B'C$ ale octaedrului, și pe fiecare dintre muchiile octaedrului să alegem un sens pozitiv, cum se indică în enunțul problemei (fig. 280). Să împărțim acum muchiile octaedrului într-un același raport,

călăuzindu-ne iarăși după textul problemei. Vom avea $BK : KA = B'L : LA = BK' : K'A' = B'L' : L'A' = C'M : MB = \ldots$. În total, vom obține 12 puncte de diviziune. Fiecare triplet de puncte de diviziune situate pe muchiile aceleiași fețe a octaedrului dă vîrfurile unui triunghi echilateral. Astfel, în fața ABC' obținem triunghiul echilateral KMP' (segmentele KM, MP' și $P'K$ vor fi egale, în virtutea egalității triunghiurilor BKM, $AP'K$ și $C'MP'$). Aceste opt triunghiuri echilaterale vor fi fețele unui poliedru nou format. Mai departe, fiecărui vîrf al octaedrului îi va corespunde o muchie a poliedrului obținut, exterioară planelor fețelor și două fețe ale acestuia din urmă, avînd această muchie ca latură comună și avînd forma unor triunghiuri isoscele (însă în general, nu echilaterale). Astfel, vîrfului C' al octaedrului îi corespund muchia $P'Q$ și fețele $MP'Q$ și $M'P'Q$. De aici tragem concluzia că poliedrul astfel construit are 20 de fețe, dintre care 8 sînt triunghiuri echilaterale egale, iar celelalte 12 sînt triunghiuri isoscele egale.

Unghiurile diedre ale poliedrului construit, avînd fiecare ca una dintre fețe un triunghi echilateral, iar ca cealaltă un triunghi isoscel, sînt toate egale între ele. Tot astfel sînt egale între ele celelalte diedre ale poliedrului, avînd fiecare ca fețe triunghiuri isoscele.

Pentru ca punctele de diviziune alese pe muchiile octaedrului să fie vîrfurile unui icosaedru regulat, este necesar ca și cele 12 triunghiuri isoscele, care sînt fețe ale noului poliedru, să se transforme în triunghiuri echilaterale. Pentru aceasta, este suficient (în virtutea egalității celor 12 fețe) să aibă loc egalitatea

$$KL = KM. \tag{1}$$

Reciproc, dacă relația (1) va fi satisfăcută, atunci toate muchiile poliedrului construit vor fi egale între ele. Mai departe, vor fi egale și toate diedrele sale. În adevăr, toate vîrfurile poliedrului sînt, evident, egal depărtate de centrul O al octaedrului. Unind punctul O cu vîrfurile fiecărei fețe, căpătăm 20 de piramide triunghiulare regulate, egale între ele și avînd deci diedre egale la bază. Însă fiecare dintre diedrele poliedrului construit este egal, evident, cu dublul diedrului de la baza acestor piramide, de unde rezultă egalitatea tuturor diedrelor poliedrului. Din egalitatea tuturor muchiilor poliedrului și din egalitatea tuturor diedrelor sale, reiese că, în acest caz, poliedrul construit va fi un icosaedru regulat. Așadar, va trebui să demonstrăm că egalitatea (1) va fi îndeplinită, dacă vom alege în modul cuvenit raportul în care vîrfurile poliedrului împart muchiile octaedrului. Avem

$$KL = \sqrt{2}\,(AB - BK), \tag{2}$$

Mai departe, din triunghiul KBM, găsim $KM^2 = BK^2 + BM^2 - 2BK \times BH = BK^2 + BM^2 - BK \cdot BM$, unde H este proiecția punctului M pe latura AB. Înlocuind, în ultima egalitate, pe BM prin $AK = AB - BK$, o vom scrie sub forma

$$KM^2 = AB^2 + 3BK^2 - 3AB \cdot BK. \tag{3}$$

Egalitățile (2) și (3) au loc, oricare ar fi punctele de diviziune.

Condiția (1) de egalitate a muchiilor poliedrului este echivalentă, în virtutea formulelor (2) și (3), cu relația

$$BK^2 = AB^2 - AB \cdot BK,$$

care se mai poate scrie

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BK}{AB - BK}.$$

Această egalitate ne arată că *muchiile octaedrului sînt împărțite în medie și extremă rație* (cf. nr. **156**), de unde

$$\frac{BK}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Așadar, *poliedrul construit cum se arată în enunțul problemei va fi un icosaedru regulat, dacă muchiile octaedrului sînt împărțite în medie și extremă rație.*

1016 *bis*. Ne-am fi putut convinge pe cale intuitivă, din examinarea figurii, *că dodecaedrul pentagonal admite orice rotație pe care o admite tetraedrul regulat, înscris în cubul dat.* În aceste condiții ar trebui să considerăm rotațiile cu 120° într-un sens și în celălalt în jurul diagonalelor cubului și rotațiile de 180° în jurul axelor care unesc centrele fețelor sale opuse. Vom da însă aici o demonstrație mai generală a acestei afirmații.

Să presupunem că o rotație a cubului, care duce tetraedrul înscris în sine însuși, face să coincidă extremitățile A și B ale unei muchii a cubului, respectiv cu extremitățile A' și B' ale unei alte muchii. Dacă, în aceste condiții, vîrful A aparține tetraedrului înscris pe care l-am considerat drept primul, (ex. 1015 *bis*), atunci și vîrful A' îi va aparține, pe cînd vîrfurile B și B' nu-i vor aparține. Sensurilor fixate de noi (ex. 1015 *bis*) pe muchiile AB și $A'B'$ le vor corespunde sensurile de la A spre B și de la A' spre B'. Rotația considerată transformă fața cubului care trece prin muchia AB și se află *în stînga* ei, dacă privim de la A spre B, în fața cubului care trece prin muchia $A'B'$ și se dispune de asemenea *în stînga* ei, dacă privim de la A' spre B'. De aci rezultă că planul fiecărei fețe a dodecaedrului pentagonal trece la rotația considerată în planul uneia dintre celelalte fețe ale aceluiași poliedru, în virtutea definiției însăși a planelor fețelor dodecaedrului pentagonal (ex. 1015 *bis*). Afirmația noastră este demonstrată.

Din raționamentul de mai sus, rezultă că rotațiile cubului, care transformă unul dintre tetraedrele înscrise în celălalt, nu pot să transforme în sine însuși dodecaedrul pentagonal.

Ne putem convinge că *dodecaedrul pentagonal neregulat nu admite alte rotații* în afară de cele menționate mai sus, în modul următor. Orice rotație pe care o admite dodecaedrul pentagonal trebuie să transforme în sine însuși și cubul dat, deoarece vîrfurile dodecaedrului pentagonal care coincid cu vîrfurile cubului se deosebesc de celelalte vîrfuri ale sale cel puțin prin lungimea muchiilor care pornesc din ele. Însă din rotațiile pe care le admite cubul, numai acelea vor transforma în sine însuși dodecaedrul pentagonal (în virtutea celor arătate mai sus) care transformă în sine însuși tetraedrul înscris în cub.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul simetriilor, situația se prezintă altfel decît în cazul rotațiilor. Deosebirea constă în faptul că simetria (în raport cu centrul sau în raport cu un plan, este indiferent) care duce vîrfurile A și B ale cubului respectiv în vîrfurile sale A' și B' transformă fața cubului, situată *în stînga* lui AB, dacă privim de la A spre B, în fața cubului dispusă *în dreapta* lui $A'B'$, dacă privim de la A' spre B' (adică în fața dispusă în stînga lui $B'A'$, dacă vom privi de la B' spre A'). De aici rezultă, așa cum am procedat mai sus, a doua afirmație din enunțul problemei.

1017. Raza sferei tangente la toate muchiile unui poliedru regulat este evident egală cu distanța de la centrul ei pînă la una dintre muchii. Raza R' a acestei sfere se determină ușor din triunghiul isoscel OAB, unde O este centrul poliedrului, iar AB una dintre muchii. Astfel, căpătăm formula

$$R'^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

unde R este raza sferei circumscrise, iar a muchia poliedrului. Folosind expresia pentru muchie de la nr. **718**, căpătăm pentru diversele tipuri de poliedre regulate următoarea expresie a razei R': pentru tetraedru $\frac{1}{\sqrt{3}} R$, pentru cub $\sqrt{\frac{2}{3}} R$, pentru octaedru $\frac{1}{\sqrt{2}} R$, pentru dodecaedru $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} R$ și, în sfîrșit, pentru icosaedru $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} R$.

1017 *bis*. Unind centrul poliedrului regulat dat cu vîrfurile sale, îl descompunem în F piramide regulate egale, unde F este numărul de fețe al poliedrului. Prin urmare, volumul poliedrului va fi de F ori mai mare decît volumul unei astfel de piramide. În notațiile adoptate la nr. **718**, aria bazei unei piramide considerate va fi egală cu $m \cdot \frac{1}{2} \rho a_m \cdot \rho c_m$, iar înălțimea ei va fi r. De aici obținem fără dificultate următoarea expresie generală pentru volumul poliedrului regulat:

$$V' = \frac{1}{6} mFa_m c_m \rho^2 r.$$

Introducînd aici valorile numerice corespunzătoare fiecărui tip de poliedru regulat, după tabela de la nr. **718**, căpătăm următoarea expresie pentru volumul V: pentru tetraedru $\frac{8}{9\sqrt{3}} R^3$, pentru cub $\frac{8}{3\sqrt{3}} R^3$, pentru octaedru $\frac{4}{3} R^3$, pentru dodecaedru $\frac{2(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} R^3$, pentru icosaedru $\frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\, R^3$.

Pentru diversele tipuri de poliedre regulate, putem indica, bineînțeles, și metode mai simple pentru calculul volumelor. Ne vom mărgini aici la metoda generală, dată mai sus.

1018. Tetraedrul regulat admite trei rotații de ordinul al doilea. Axele acestor trei rotații unesc două cîte două mijloacele muchiilor opuse ale tetraedrului, adică centrele fețelor opuse ale cubului circumscris. Prin urmare, axele acestor rotații vor fi perpendiculare două cîte două. Dacă vom efectua acum consecutiv rotațiile de ordinul al doilea, adică transpozițiile în raport cu două dintre aceste axe, vom obține ca rezultat o rotație de 180° în jurul celei de-a treia axe (în virtutea nr. **416**). De aici rezultă că cele trei rotații de ordinul al doilea ale tetraedrului formează un grup (împreună cu deplasarea identică).

Acest grup va fi un subgrup *invariant* al grupului tetraedrului, dat fiind că orice rotație pe care o admite tetraedrul transformă fiecare dintre cele trei axe de ordinul al doilea într-o axă tot de ordinul al doilea.

În virtutea aceleași considerații, grupul considerat va fi un subgrup invariant și pentru grupul cubului.

1018 *bis*. Raportul anarmonic a patru puncte A, B, C și D se exprimă astfel (v. nr. **199**):

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB};$$

segmentele care intervin aici se consideră ca mărime și ca semn.

După cum se vede ușor, acest raport anarmonic nu-și schimbă valoarea la următoarele trei permutări ale literelor pe care le conține: 1) dacă permutăm între ele punctele A și B, permutînd totodată și celelalte două puncte; 2) dacă facem același lucru cu punctele A și C și, simultan, cu celelalte două puncte; 3) dacă procedăm la fel cu punctele A și D și, simultan, cu celelalte două puncte. De asemenea, nu este greu să ne convingem, că la celelalte permutări ale punctelor care intervin aici, raportul anarmonic își schimbă valoarea (cu condiția ca punctele A, B, C, și D să nu fi fost alese în mod special).

Aceleași trei permutări le sînt supuse însă, evident, și vîrfurile tetraedrului regulat $ABCD$ în cazul rotațiilor sale în jurul axelor de ordinul al doilea.

1019. Cubul admite două tipuri de rotații de ordinul al doilea (transpoziții), anume rotații de ordinul al doilea în jurul axelor de ordinul al patrulea, care unesc centrele fețelor opuse, și rotații de ordinul al doilea în jurul axelor de ordinul al doilea, care unesc mijloacele muchiilor opuse. Totodată, cubul admite rotații de ordinul al treilea, în jurul diagonalelor sale, și rotații de ordinul al patrulea în jurul axelor care unesc centrele fețelor opuse. Aceste rotații epuizează toate deplasările neidentice pe care le admite cubul (**710** *bis*).

În legătură cu combinarea acestor rotații între ele, vom face următoarele observații:

1) Efectuînd consecutiv două transpoziții în raport cu axele de ordinul al doilea $\alpha\alpha'$ și $\beta\beta'$ (fig. 359 din Geometria în spațiu) care formează un unghi de 60°, obținem (**712**) o rotație de ordinul al treilea în jurul axei aa', perpendiculară pe dreptele $\alpha\alpha'$ și $\beta\beta'$. Așadar, combinînd rotații de ordinul al doilea, putem obține *toate* rotațiile de ordinul al treilea pe care le admite cubul.

2) Efectuînd consecutiv o transpoziție în raport cu axa de ordinul al doilea $\beta\beta'$ și o transpoziție în raport cu axa de ordinul al patrulea AA', care formează un unghi de 45° cu $\alpha\alpha'$ (fig. 281), căpătăm (**416**) o rotație de ordinul al patrulea în jurul axei BB', perpendiculară pe axele $\alpha\alpha'$ și AA'. Sensul acestei rotații este determinat de sensul unghiului βSA. Așadar,

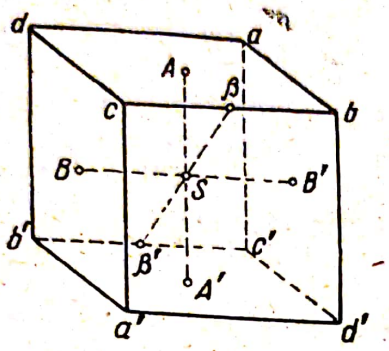


Fig. 281

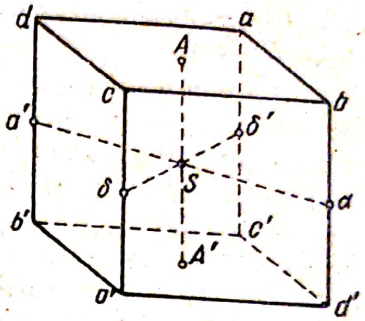


Fig. 282

combinînd rotații de ordinul al doilea, putem obține *toate* rotațiile de ordinul al patrulea ale cubului.

Din observațiile 1° și 2°, rezultă imediat că, *combinînd rotații de ordinul al doilea, putem obține toate deplasările pe care le admite cubul.*

3) Efectuînd consecutiv transpoziții în raport cu axele de ordinul al doilea $\alpha\alpha'$ și $\delta\delta'$, perpendiculare între ele (fig. 282), căpătăm (**416**) o transpoziție în raport cu axa de ordinul al patrulea AA', perpendiculară pe axele $\alpha\alpha'$ și $\delta\delta'$. Așadar, combinînd transpoziții în raport cu axele de ordinul al doilea, putem obține *toate* transpozițiile în raport cu axele de ordinul al patrulea.

Din această observație și din cele arătate mai sus, rezultă că *toate deplasările pe care le admite cubul se mai pot obține, combinînd între ele rotații de ordinul al doilea în jurul axelor de ordinul al doilea.*

Trecem la rotațiile de ordinul al patrulea. Rotația de ordinul al patrulea, efectuată de două ori consecutiv, dă o transpoziție în raport cu o axă de ordinul al patrulea. Mai departe, are loc următorul fapt.

4) Efectuînd întîi o rotație de ordinul al patrulea în raport cu axa BB', în sensul unghiului βSA, iar apoi o transpoziție în raport cu axa de ordinul al patrulea AA', obținem (cf. punctului 2) același rezultat ca atunci cînd efectuăm succesiv trei transpoziții, — în raport cu axele $\beta\beta'$, AA' și iarăși AA', — adică obținem o transpoziție în raport cu axa $\beta\beta'$. Așadar, combinînd rotații de ordinul al patrulea cu transpoziții în raport cu axele de ordinul al patrulea, putem obține *toate* transpozițiile în raport cu axele de ordinul al doilea.

De aici și din cele expuse înainte, rezultă că, *combinînd rotații de ordinul al patrulea, putem obține toate deplasările pe care le admite cubul.*

Trecem la rotațiile de ordinul al treilea.

5) Efectuînd consecutiv rotații de ordinul al treilea (în sensul cuvenit) în jurul axelor aa' și bb' (fig. 359 din Geometria în spațiu), obținem o transpoziție în raport cu axa AA'. În adevăr, în cazul rotației de ordinul al treilea

în jurul axei aa', în sensul corespunzător, vîrfurile $a, b, c, d, a', b', c', d'$ trec respectiv în vîrfurile $a, c', d', b, a', c, d, b'$, iar în cazul rotației de ordinul al treilea în jurul axei bb', în sensul cuvenit, aceste din urmă vîrfuri trec respectiv în vîrfurile $c, d, a, b, c', d', a', b'$. Efectuînd ambele rotații consecutiv, ducem vîrfurile $a, b, c, d, a', b', c', d'$, respectiv în $c, d, a, b, c', d', a', b'$, adică obținem o transpoziție în raport cu AA'. Așadar, *combinînd rotațiile de ordinul al treilea, putem obține toate transpozițiile în raport cu axele de ordinul al patrulea.*

Totodată, *combinînd rotații de ordinul al treilea, nu putem obține toate rotațiile pe care le admite cubul.* În adevăr, rotația de ordinul al treilea transformă pe fiecare dintre cele două tetraedre înscrise (**711** *bis*) în el însuși. Combinînd rotații de ordinul al treilea, obținem numai acele rotații ale cubului care se bucură de aceeași proprietate. Cubul admite însă și rotații care nu au această proprietate.

Să notăm cu G grupul tuturor rotațiilor cubului, iar cu g un subgrup invariant al acestuia (**712** *bis*). Dacă acest subgrup invariant g conține transpoziția în raport cu una dintre axele de ordinul al doilea, atunci el conține transpozițiile în raport cu *toate* axele de ordinul al doilea, deoarece, prin rotațiile grupului G, putem face ca axa dată de ordinul al doilea să coincidă cu *orice* axă de ordinul al doilea. Analog, dacă subgrupul g conține o rotație de ordinul al doilea sau de ordinul al patrulea în jurul uneia dintre axele de ordinul al patrulea, atunci el conține rotațiile de același ordin în jurul *tuturor* axelor de ordinul al patrulea, și situația va fi aceeași și pentru rotațiile de ordinul al treilea.

Să presupunem că grupul g conține o transpoziție în raport cu o axă de ordinul al doilea, deci și toate transpozițiile. Combinînd aceste transpoziții, putem obține, cum s-a arătat mai sus, toate deplasările pe care le admite cubul. Prin urmare, grupul g coincide cu G. Așadar, grupul g nu poate conține transpoziții în raport cu axele de ordinul al doilea. Analog, grupul g nu poate conține rotații de ordinul al patrulea, deoarece, combinînd rotațiile de ordinul al patrulea, putem obține toate deplasările pe care le admite cubul.

Am demonstrat astfel că grupul g poate conține numai rotațiile de ordinul al treilea și transpozițiile în raport cu axele de ordinul al patrulea ale cubului. Dacă el conține o rotație de ordinul al treilea, deci și pe toate, atunci el conține (cf. punctului 5) și toate transpozițiile în raport cu axele de ordinul al patrulea și coincide cu grupul tetraedrului. Dacă el conține însă numai transpoziții în raport cu axele de ordinul al patrulea, atunci el coincide cu grupul considerat la exercițiul 1018 *bis*.

În sfîrșit, să notăm cu H grupul tuturor rotațiilor tetraedrului, iar cu h un subgrup invariant al său. Grupul H este format (abstracție făcînd de identitate) din rotațiile de ordinul al treilea în jurul axelor care unesc vîrfurile tetraedrului cu centrele fețelor opuse și din transpozițiile în raport cu axele care unesc mijloacele muchiilor opuse. Dacă subgrupul h conține o rotație de ordinul al treilea, el conține toate rotațiile de ordinul al treilea, deci și (cf. punctului 5) toate rotațiile de ordinul al doilea, adică va coincide cu H. Rezultă că h cuprinde numai rotații de ordinul al doilea, adică este grupul considerat la exercițiul 1018 *bis*.

Scanned with OKEN Scanner

1019 *bis.* Fie α și β mijloacele a două laturi vecine ale unui dodecaedru regulat, iar S centrul său (fig. 283). Raționînd ca la nr. **712**, ne convingem că rotația rezultantă a două transpoziții în raport cu axele $S\alpha$ și $S\beta$ va fi o rotație de ordinul al cincilea a dodecaedrului. Dacă λ și μ sînt mijloacele a două muchii nevecine ale aceleiași fețe a dodecaedrului (fig. 284),

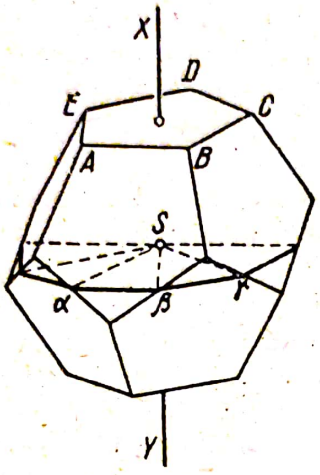


Fig. 283

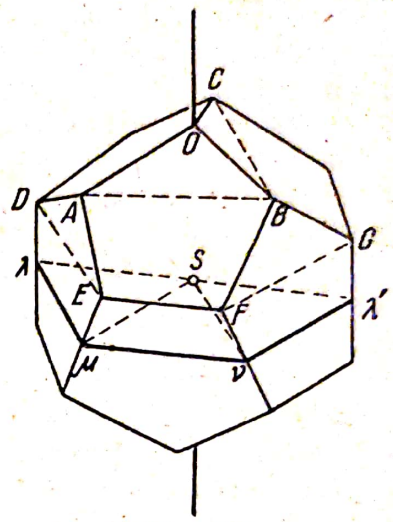


Fig. 284

atunci rotația rezultantă a două transpoziții în raport cu axele $S\lambda$ și $S\mu$ va fi o rotație de ordinul al treilea a dodecaedrului. Așadar, *combinînd rotații de ordinul al doilea ale dodecaedrului, putem obține toate rotațiile de ordinul al treilea și de ordinul al cincilea, adică tot grupul dodecaedrului.*

Vom porni acum de la rotațiile de ordinul al treilea sau de la cele de ordinul al cincilea. Să notăm cu A, A', A'', ... vîrfurile unei fețe F a dodecaedrului, cu B și cu B' polii fetei F și fetei F', vecină cu F după muchia AB, cu C mijlocul arcului AA', (v. nr. **713** și fig. 362 din Geometria în spațiu). Menționăm că, în triunghiul sferic ABC, unghiurile de vîrfuri A, B, C sînt egale respectiv cu 60°, 30° și 90°, și același lucru este valabil pentru fiecare dintre triunghiurile sferice $A'BC$, $AB'C'$, $A'B'C$,..., egale cu triunghiul ABC.

Rotația rezultantă a celor două rotații de ordinul al treilea în raport cu axele SA și SA' poate fi definită cel mai simplu, așa cum se arată în observația la soluția exercițiului 600. Dacă alegem în mod corespunzător sensurile celor două rotații (în sensul unghiului BAC pentru rotația de axă SA și al unghiului $CA'B$ pentru rotația de axă SA'), căpătăm ușor ca rotație rezultantă rotația în jurul axei SB în sensul unghiului ABA' cu un unghi de rotație de 144° (dublul unghiului ABA' de pe sferă). Efectuînd această din urmă rotație de trei ori consecutiv, obținem o rotație de ordinul al cincilea în jurul axei SB, cu un unghi de 72° ($= 144° \cdot 3 - 360°$). Analog, efectuînd în sens corespunzător rotații de ordinul al cincilea în raport cu axele SB și SB', putem obține o rotație de ordinul al treilea în jurul axei SA. Așadar, pornind de la rotațiile de ordinul al treilea ale grupului dodecaedrului, putem obține toate rotațiile de ordinul al cincilea din acest grup, și reciproc.

În sfîrșit, efectuînd consecutiv rotația de ordinul al treilea în sensul unghiului CAB în raport cu axa SA și rotația de ordinul al cincilea în sensul unghiului ABC în jurul axei SB, avem ca rotație rezultantă o rotație de ordinul al doilea în jurul axei SC. De aici rezultă că *pornind numai de la rotațiile de ordinul al treilea sau numai de la cele de ordinul al cincilea, putem obține toate rotațiile de ordinul al doilea, deci și tot grupul dodecaedrului.*

Dacă acum grupul dodecaedrului ar avea un subgrup invariant, acesta ar conține o rotație de ordinul al doilea, al treilea sau al cincilea și ar conține, deci, toate rotațiile de același ordin. Prin urmare, acest subgrup ar conține în genere toate rotațiile grupului dodecaedrului, ceea ce este imposibil. Deci *grupul dodecaedrului nu are subgrupuri invariante.*

1020. Să presupunem că un paralelipiped oarecare are o axă de simetrie D, de ordinul al treilea. Să notăm cu A punctul de intersecție al acestei axe cu planul M al uneia dintre fețe. Deoarece o față a unui paralelipiped nu poate avea simetrie de ordinul al treilea, planul M nu este perpendicular pe axa D. De aceea, rotațiile cu 120° într-un sens și în celălalt în jurul axei D transformă planul M în planele celorlalte două fețe, care trec de asemenea prin punctul A. Așadar, axa de simetrie de ordinul al treilea D trece în mod necesar prin vîrful A al paralelipipedului. În virtutea existenței acestei axe de simetrie, cele trei muchii ale paralelipipedului care se întîlnesc în vîrful A sînt egale între ele și formează unghiuri egale. De aici rezultă că paralelipipedul dat trebuie să fie un romboedru.

Nu este greu de demonstrat că, și reciproc, orice romboedru are efectiv o axă de simetrie de ordinul al treilea. Să considerăm unul dintre vîrfurile romboedrului, să zicem A' (fig. 78 din Geometria în spațiu). Dacă toate trei unghiurile plane din acest vîrf sînt diferite, atunci două dintre ele sînt neapărat egale; în adevăr, în virtutea egalității tuturor fețelor, toate unghiurile romboedrului se împart în *două* clase de unghiuri egale între ele, unghiurile celor două clase fiind suplementare. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că unghiurile cu vîrful în A', satisfac condițiile $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'D'} \neq \widehat{B'A'D'}$. În acest caz, vom avea, evident, în vîrful A trei unghiuri plane egale. Așadar, în orice romboedru, există un triedru cu trei unghiuri plane egale. Vîrful A al acestui triedru și extremitățile A', B și D ale muchiilor care ies din el formează o piramidă triunghiulară regulată. Axa de simetrie D, de ordinul al treilea, va fi, cum ne dăm ușor seama, axă de simetrie de ordinul al treilea a romboedrului.

Deoarece, la rotațiile de 120° în jurul axei D, într-un sens și în celălalt, fețele romboedrului care nu trec prin A se transformă una în alta, axa D trece prin vîrful C' al romboedrului, opus lui A, adică coincide cu o diagonală.

Pentru a intersecta romboedrul cu un plan după un hexagon regulat, vom duce, cum am procedat în cazul cubului (**712**, compară cu fig. 359 din Geometria în spațiu), un plan secant prin centrul O al romboedrului, perpendicular pe axa D. Exagonul obținut în secțiune are ca centru de simetrie punctul O, deoarece acesta este centrul de simetrie al romboedrului (ex. 520). În același timp, acest exagon admite rotații de ordinul al treilea în jurul

axei D. De aici urmează (dat fiind că $180°-120° = 60°$) că același exagon admite și rotații de ordinul al șaselea, și este deci un exagon *regulat*.

1021. Să notăm, ca la nr. **718**, cu r raza sferei înscrise, cu R raza sferei circumscrise, cu ρ raza cercului circumscris unei fețe, cu m numărul de laturi al fiecărei fețe, cu n numărul de muchii al fiecărui unghi solid al poliedrului regulat dat. În aceste condiții, poliedrul reciproc celui dat va avea ca fețe poligoane cu n laturi și unghiuri solide cu m fețe.

Fie acum α și β mijloacele a două muchii vecine AC și BC (fig. 285), S centrul poliedrului, H proiecția comună a punctelor α și β pe dreapta SB, O centrul fetei ABC ... Vom nota cu c_m și cu a_m latura și apotema poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază egală cu 1.

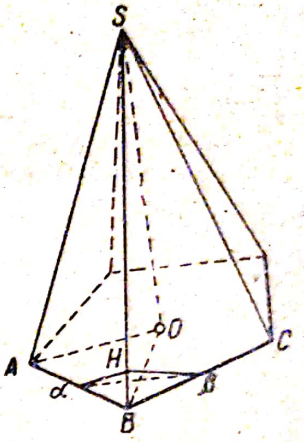


Fig. 285

Deoarece poliedrul are n fețe care se întîlnesc în vîrful B, segmentul $\alpha\beta$ este latura unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază $H\alpha = H\beta$. De aici avem

$$\alpha\beta = H\alpha \cdot c_n. \qquad (1)$$

Mai departe, în virtutea celor arătate la nr. **712**, segmentul $\alpha\beta$ este latura unui poligon regulat cu λ laturi, avînd ca centru punctul S, de unde deducem

$$\alpha\beta = S\alpha \cdot c_\lambda. \qquad (2)$$

În sfîrșit, în poligonul regulat cu m laturi ABC ..., avem două triunghiuri asemenea $O\alpha\beta$ și OAB, din care găsim

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{O\alpha}{OA} = a_m.$$

Din această relație, obținem

$$\alpha\beta = 2A\alpha \cdot a_m. \qquad (3)$$

În triunghiul dreptunghic $SB\alpha$, avem (v. ex. 136)

$$\left(\frac{1}{H\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{S\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{A\alpha}\right)^2.$$

Introducînd aici valorile pentru $H\alpha$, $S\alpha$ și $A\alpha$ din egalitățile (1), (2) și (3), obținem, după transformări evidente,

$$\left(\frac{c_\lambda}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_n}{2}\right)^2 - a_m^2.$$

În virtutea egalităților evidente $(c_m/2)^2 + a_m^2 = (c_n/2)^2 + a_n^2 = 1$, avem $(c_n/2)^2 - a_m^2 = (c_m/2)^2 - a_n^2$, astfel că în definitiv căpătăm

$$\left(\frac{c_m}{2}\right)^2 - a_n^2 = \left(\frac{c_n}{2}\right)^2 - a_m^2 = \left(\frac{c_\lambda}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

Din aceste egalități se vede că, *pentru două poliedre reciproce, mărimea* c_λ, *deci și numărul* λ, *au aceeași valoare.*

În cazul dodecaedrului și al icosaedrului, trebuie să punem $m = 3$, $n = 5$ (sau $m = 5$, $n = 3$) și $\lambda = 10$ (compară cu soluția ex. 1019 *bis* și fig. 527). Relațiile de mai sus ne dau

$$\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 - a_5^2 = \left(\frac{c_5}{2}\right)^2 - a_3^2 = \left(\frac{c_{10}}{2}\right)^2.$$

Însă apotema a_5 a pentagonului regulat este egală cu (v. nr. **170**) jumătatea laturii c'_{10} a decagonului regulat stelat, înscris în același cerc. Mai departe, apotema a_3 a triunghiului echilateral este evident egală cu jumătatea laturii c_6 a exagonului regulat înscris în același cerc. Punînd în aceste din urmă egalități $a_5 = \frac{1}{2} c'_{10}$ și $a_3 = \frac{1}{2} c_6$, căpătăm

$$c_{10}^2 + c_{10}'^2 = c_3^2;$$
$$c_{10}^2 + c_6^2 = c_5^2.$$

În sfîrșit, cum se vede ușor, avem $c_{10}^2 = 1 - a_5'^2$; $c_5^2 = 1 - a_{10}'^2$, iar din ultima egalitate, obținem

$$c_{10}'^2 + c_6^2 = c_5'^2.$$

Așadar, avem relațiile indicate la exercițiile 181 și 182. Faptul că am presupus raza cercului egală cu 1 nu are, în cazul de față, nici un fel de importanță.

Aplicînd relațiile (4) cubului și octaedrului, trebuie să punem $m = 3$, $n = 4$ și $\lambda = 6$. Așadar, căpătăm

$$\left(\frac{c_6}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2 - a_4^2.$$

Punînd aici $a_4 = \frac{1}{2} c_4$, găsim relația dintre laturile exagonului regulat, pătratului și triunghiului echilateral

$$c_6^2 + c_4^2 = c_3^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $BS\alpha$ și $B\alpha H$, avem

$$\frac{BS}{S\alpha} = \frac{B\alpha}{H\alpha} \text{ sau } BS = \frac{B\alpha \cdot S\alpha}{H\alpha}.$$

Punînd aici $BS = R$; $B\alpha = \rho \cdot c_m/2$ și exprimînd pe $H\alpha$ și pe $S\alpha$ prin $\alpha\beta$, cu ajutorul egalităților (1) și (2), căpătăm după transformări evidente,

$$\frac{R}{\frac{c_m}{2} \cdot \frac{c_n}{2}} = \frac{\rho}{\frac{1}{2} c_\lambda}.$$

Observînd că $r^2 = R^2 - \rho^2$ și că $(c_m/2)^2 \cdot (c_n/2)^2 - (c_\lambda/2)^2 = (1 - a_m^2)(c_n/2)^2 - (c_n/2)^2 + a_m^2 = a_m^2[1 - (c_n/2)^2] = a_m^2 a_n^2$, obținem

$$\frac{R}{\frac{c_m}{2} \cdot \frac{c_n}{2}} = \frac{r}{a_m a_n} = \frac{\rho}{\frac{1}{2} c_\lambda}.$$

Din aceste egalități, se vede că *rapoartele dintre razele R, r și ρ au aceeași valoare pentru două poliedre reciproce.*

În sfîrșit, muchiile poliedrului dat și ale reciprocului său sînt respectiv egale cu ρc_m și cu ρc_n. Punînd aici $\rho = 2Rc_\lambda/c_m c_n$, căpătăm valorile $2Rc_\lambda/c_n$ și $2Rc_\lambda/c_m$, date în textul problemei.

1021 *bis*. Să păstrăm toate notațiile adoptate la soluția exercițiului 1021. Să considerăm piramida regulată $SABC \ldots$, avînd ca bază un poligon cu m laturi și ca vîrf centrul S al poliedrului cu baza fața $ABC \ldots$ (fig. 285). Unghiul $V/2$ va fi unghiul dintre fața laterală și planul bazei acestei piramide. De aici rezultă că

$$\sin \frac{V}{2} = \frac{SO}{S\alpha}.$$

Însă în virtutea egalității (2) din soluția exercițiului 1021, avem $S\alpha = \alpha\beta/c_\lambda$; mai departe, în virtutea egalității (3) din soluția aceluiași exercițiu, avem $\alpha\beta = AB \cdot a_m$; în sfîrșit, $AB = \rho \cdot c_m$. Ținînd seama de aceste egalități și făcînd substituția $SO = r$, avem

$$\sin \frac{V}{2} = \frac{rc_\lambda}{\rho a_m c_m}.$$

În sfîrșit, înlocuind aici (în baza soluției ex. 1021) r/ρ prin $a_m a_n / \frac{1}{2} c_\lambda$, căpătăm expresia cerută. În virtutea relației $(c_\lambda/2)^2 = (c_m/2)^2 - a_n^2$, segmentele $c_\lambda/2$ și a_n vor fi catetele, iar segmentul $c_m/2$ ipotenuza unui triunghi dreptunghic avînd unul dintre unghiurile ascuțite egal cu $\frac{1}{2} V$.

O b s e r v a ț i e. Putem obține o expresie mai simplă, însă nu pentru sinusul unghiului $V/2$, ci pentru tangenta lui. Anume

$$\operatorname{tg} \frac{V}{2} = \frac{SO}{O \cdot \alpha} = \frac{r}{\rho a_m} = \frac{a_n}{\frac{1}{2} c_\lambda}.$$

1022. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că fiecare dintre suprafețele prismatice triunghiulare construite este întoarsă spre centrul poliedrului inițial cu muchia sa (fig. 286 reprezintă trei suprafețe prismatice din acestea, corespunzînd la trei muchii ale poliedrului inițial, care formează un triedru în unul dintre vîrfurile sale).

Să notăm cu F, S și A numărul de fețe, de vîrfuri și de muchii ale poliedrului regulat dat P, cu n numărul de fețe ale unghiului său solid, cu F', S' și A' numărul de fețe, de vîrfuri și de muchii ale poliedrului Q

și cu $N + 1$ ordinul de conexiune al suprafeței care se va obține, dacă vom înlătura o față a poliedrului Q (**706**).

Nu este greu să găsim expresia care dă numerele F', S' și A'. În primul rînd, este evident că $F' = 3A$. Mai departe, fiecărui vîrf al poliedrului P îi corespund, cum se vede ușor, $n + 2$ vîrfuri ale poliedrului Q (astfel, în fig. 286, unui vîrf al poliedrului P îi corespund vîrfurile M_1, M_2, M_3, M' și încă un vîrf M'' ale poliedrului Q), de unde $S' = (n + 2)S$. În sfîrșit, fiecărui vîrf al poliedrului P îi corespund $2n$ muchii ale poliedrului (în fig. 286 unui vîrf al poliedrului P îi corespund muchiile M_1M', M_2M', M_3M', M_1M'', M_2M'' și M_3M''), iar fiecărei muchii a poliedrului P îi corespund cîte trei muchii ale poliedrului C. Așadar, $A' = 2nS + 3A$.

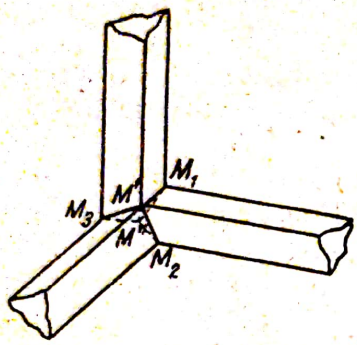


Fig. 286

Substituind acum expresiile găsite pentru F', S' și A' în egalitatea

$$N + 1 = A' + 2 - (F' - 1) - S',$$

care exprimă teorema generalizată a lui Euler (**706**), pentru suprafața care se obține dacă înlăturăm o față a poliedrului Q, vom găsi $N+1=(n-2)\,S+3$. Înlocuind aici (**715** *bis*) pe nS prin $2A$ și apoi pe $A - S$, conform teoremei lui Euler, prin $F - 2$, obținem expresia definitivă pentru ordinul de conexiune al suprafeței considerate

$$N + 1 = 2F - 1.$$

Ordinul de conexiune obținut nu se schimbă dacă înlocuim prismele triunghiulare prin prisme poligonale. În adevăr, între punctele suprafeței poliedrului Q și punctele suprafeței poliedrului analog, corespunzător unor prisme poligonale, putem stabili efectiv o corespondență de tipul celei considerate la nr. **700**. Același lucru va avea loc și pentru suprafețele care se vor obține dacă vom înlătura cîte o față a fiecăruia dintre aceste poliedre. În virtutea aceluiași sens geometric al ordinului de conexiune (**706**), acesta va avea, în ambele cazuri, aceeași valoare.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Redactor responsabil : Teodorescu Clotilda.
Tehnoredactor : Cătălin Maria.

Dat la cules 30.03.1962. Bun de tipar 25.08.1962. Apărut 1962. Tiraj 8.000+110 legate. Hîrtie semivelină de 65 g/m², 700×1000/16. Coli editoriale 38,27. Coli de tipar 27,75. A. 0978/1962. C.Z. pentru bibliotecile mari și mici 513.

Tiparul executat sub comanda nr. 20.352, la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piața Scînteii, nr. 1, București — R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

AU APĂRUT:

G. Țițeica

Culegere de probleme de geometrie
Ediția a IV-a
382 pag. Lei [illegible],80

★

J. Hadamard

Lecții de geometrie elementară
Geometrie în spațiu
(Traducere din limba franceză)
540 pag. Lei 24,20

★

★ ★ ★

Tabele matematice uzuale
280 pag. Lei 15

Scanned with OKEN Scanner